T2

प्रकरण 2: वास्तव संख्या : संकल्पना चित्र

पूर्वज्ञान: नैसर्गिक संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक परिमेय संख्या व त्यांचे दशांश अपूर्णांकात रूपांतर, अपरिमेय संख्या यांची ओळख.

<, >, =, ≠ ही चिन्हे वास्परण्याची माहिती,

संख्यांचा ल.सा.वि व म.सा.वि चा अर्थ व रीत,

वर्गमूळ व घनमूळ काढता येणे.

↓

परिमेय संख्या संख्यारेषेवर दाखविणे परिमेय संख्यांचे दशांशात रूपांतर(उजळणी), आवर्ती दशांश अपूर्णांकांचे व्यवहारी अपूर्णांकात रूपांतर

↓

अपरिमेय संख्या (वर्गमूळाच्या स्वरूपातील) संख्यारेषेवर दाखविणे, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $(5+\sqrt{2})$ ह्या स्वरूपातील अपरिमेय संख्या आहेत हे सिद्ध करणे, अपरिमेय संख्यांचे दशांश अपूर्णांकात रूपांतर

↓

वास्तव संख्यांसंच, वास्तव संख्यावरील क्रमसंबंधांचे गुणधर्म

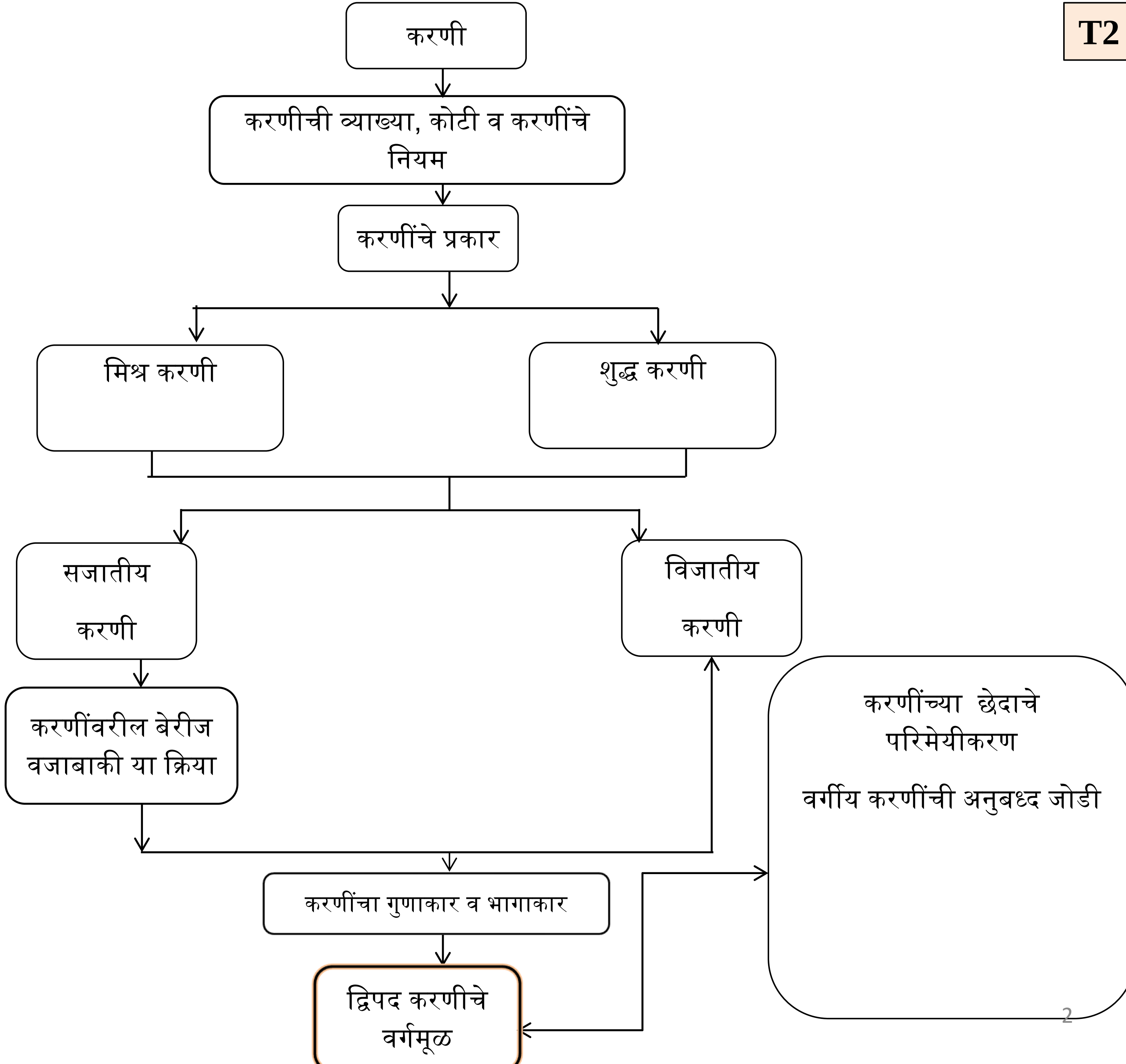
↓

केवलमूल्य: संकल्पना व त्यांमधील राशीना सोपे रूप देणे, समीकरणे सोडविणे

↓

युक्लिडचा भागाकाराचा सिद्धांत व अंकगणिताचा मूलभूत सिद्धांत, म.सा.वि. काढण्याची युक्लिडची पद्धत

T2


करणी
करणीची व्याख्या, कोटी व करणींचे नियम
करणींचे प्रकार
मिश्र करणी
शुद्ध करणी
सजातीय करणी
विजातीय करणी
करणींवरील बेरीज वजाबाकी या क्रिया
करणींच्या छेदाचे परिमेयीकरण
वर्गीय करणींची अनुबध्द जोडी
करणींचा गुणाकार व भागाकार
द्विपद करणीचे वर्गमूळ

गोष्ट संख्यांची

गोष्ट संख्यांची एकदा काय झाले की, शाळा सुटली, मुले व शिक्षकही घरी गेले. पण शाळेच्या काही वर्गातल्या संख्या फळ्यावर तशाच राहिल्या होत्या. शाळेत सामसूम झाल्यावर ह्या सगळ्या संख्या मैदानावर एकत्र जमल्या. त्या दिवशी तासांना झालेल्या गमती सांगू लागल्या. बघता बघता अचानक त्यांच्यात वाद सुरु झाला. नैसर्गिक संख्या म्हणाल्या, “आम्ही तुम्हा सगळ्यांपेक्षा श्रेष्ठ आहोत कारण माणसांना सुचलेल्या अगदी पहिल्या संख्या आम्ही आहोत.

त्यावेळी तुम्ही कोणी जन्मालापण आलेल्या नव्हता. वस्तू, गुरे- ढोरे मोजण्यासाठीची गरज म्हणून त्या काळापासून ते आजतागायत आम्ही माणसांसोबत असतोच. संपूर्ण जगातली छोटी मुले पहिल्यांदा वस्तू मोजायला आमच्या उपयोगानेच शिकत असतात हे तुम्हाला माहित आहे ना?

तेवढ्यात अंधारातून एक धीर गंभीर आवाज आला, “पण माझ्याशिवाय तुम्ही ’पूर्ण’ झाल्याच नसतात.याच भारतातल्या फार फार पूर्वीच्या लोकांनीच माझा उपयोग ओळखला आणि सर्व जगाला तो म्हणे अरब व्यापा-यांमुळे कळला.

ओळखला आणि सर्व जगाला तो म्हणे अरब व्यापा-यांमुळे कळला.

माझ्याशिवाय तुमच्या 105,1005,10005 यांना फक्त 15 चीच किंमत आली

असती हे लक्षात असू द्या.शिवाय एखाद्याजवळ एकही वस्तू शिल्लक नाही हे

दाखविण्यासाठीही माझीच जरूरी असते. म्हणून माझा समावेश तुमच्या

राज्यात झाल्यावरच माणूस आपल्या सगळयांना **’पूर्ण संख्या’** म्हणू लागलाय.”

हा आवाज 0 चा होता.

इतर संख्या म्हणाल्या, “पण जर माणसांची कामे तुमच्यामुळे सुरळीत झाली असती तर त्यांनी आमचा विचार तरी केला असता का? त्यामुळे आम्ही फार महत्वाच्या आहोत.”

असा त्यांचा वाद संपेनाच. मग त्यांच्यातल्या 2,3,5,7,……सारख्या मूळ संख्यांनी त्यांना कसेबसे गप्प केले आणि ठरविले की, “आपण उद्या 8वीच्या नाहीतर 9 वीच्या ज्या वर्गात ताईंचा तास असेल तिथे जाऊन त्यांनाच विचारु. कारण त्या मुलांना सारख्या सांगत असतात “संख्या माझ्या सख्या.”

दुसऱ्या दिवशी ताईंच्या वर्गात संख्या आल्या तेंव्हा आश्चर्य म्हणजे ताई मुलांशी संख्यांबद्दल गप्पा मारत होत्या. सगळया संख्यांना त्यामुळे आनंद झाला आणि त्या मजेत नेहमीप्रमाणे फळयावर जाऊन बसल्या आणि ऐकू लागल्या.

रोहितने ताईंना नेमके हेच विचारले, “0,1,2,3,4,……..अशा संख्या असूनसुध्दा -1,-2,-3,….ह्या ॠण संख्याची आपल्या पूर्वजांना गरज का लागली?” ताई म्हणाल्या,”तुम्हाला तर ते मी नुसता वजाबाकीचा विचार करा म्हटले तर कळू शकेल. बघा विचार करुन.” मुले आपापसात चर्चा करु लागली आणि अश्विनीच्या

पटकन लक्षात आले. ती म्हणाली,"ताई मला वाटते की आपण 9-4 ही नैसर्गिक संख्यांची वजाबाकी करू शकतो पण 4-9 अशी वजाबाकी नैसर्गिक संख्यांमध्ये केली तर उत्तर नैसर्गिक संख्यासंचात मिळत नाही. त्यामुळे नैसर्गिक संख्याच्या विरूद्ध संख्या -1,-2,-3,….यांचा माणसाने विचार करुन पूर्ण संख्यांचा विस्तार केला असावा. त्यामुळे -1,-2,-3 ह्यांचा पूर्ण संख्याबरोबर समावेश करुन काल तुम्ही सांगितले होते तो पूर्णांक संख्याचा संच I तयार केला असावा." ताईंना आनंद झाला त्यांनी अश्विनीला शाबासकी दिली.

मग काय एकेकाला आणखी सुचू लागले. पण पूर्णांक संख्या बेरीज, वजाबाकीसाठी पुरेशा असल्या व त्यामुळे गुणाकारासाठी सुध्दा पुरेशा असल्या तरी भागाकारासाठी त्या अपुऱ्या आहेत. 3÷12 चे उत्तर ह्या I संचात इतक्या अनंत संख्या असूनसुध्दा सापडत नाही. म्हणून माणसांनी कदाचित प्रथम धन परिमेय संख्या किंवा आपण अपूर्णांक म्हणून शिकलेल्या संख्या उपयोगात आणल्या असतील.” असे सुमितने सांगितले.

T2_L1

तेवढ्यात पुन्हा धीरगंभीर आवाज आला, “माझ्ा भागाकारात नेहमी समावेश करु नका बर का! कारण मला इतर कोणीही भाग दिला तरी सहन करतो, बदलतच नाही. मी मात्र इतरांच्या वाट्याला कधी जात नाही. मी कधीच कोणाला भागायला जात नाही हे विसरु नका.” अर्थातच हा आवाज होता ’0’ चा. सगळी मुले म्हणाली, “हे आम्ही नक्की लक्षात ठेवू, पण तू मात्र आमच्या उत्तरपत्रिकेवर कधीच यायचे नाही असे कबूल करशील तरच!”

सगळेजण हसू लागले. तेवढ्यात यश उभा राहिला आणि ताईंना म्हणाला, “हे ठीक आहे. पण ह्या असल्या अवघड अवघड संख्यांचा पूर्वीच्या माणसाने विचार केला नसता तर किती बरे झाले असते. मला तर त्यांचा विचारसुध्दा करु नये असे वाटतं.”

ताई त्याची समजूत काढण्यासाठी म्हणाल्या, “अरे ह्या संख्यांची सुध्दा माणसाला का गरज भासली असेल ह्याचाही विचार करायला पाहिजे. समजा, एखाद्या माणसाला असा चौरस काढायचा असेल की, ज्याचे क्षेत्रफळ 2 चौसेमीच हवे आहे. त्याने त्या चौरसाची बाजू किती घ्यायची?

ताई त्याची समजूत काढण्यासाठी म्हणाल्या, “अरे ह्या संख्यांची सुध्दा

माणसाला का गरज भासली असेल ह्याचाही विचार करायला पाहिजे.

समजा, एखाद्या माणसाला असा चौरस काढायचा असेल की, ज्याचे क्षेत्रफळ

2 चौसेमीच हवे आहे. त्याने त्या चौरसाची बाजू किती घ्यायची?

मुले कामाला लागली. स्वानंद चिन्मयला म्हणाला, “मी 1.4 चा वर्ग करतो.

तू 1.5 चा वर्ग कर.”

$(1.4)^2=1.96$ व $(1.5)^2=2.25$. अरेरे, एक संख्या 2 पेक्षा थोडी लहान तर

दुसरी 2 पेक्षा थोडी मोठी आली.

त्यांनी मग (1.41), (1.49) यांचे वर्ग करुन पाहिले पण मघाप्रमाणेच झाले."

दुसऱ्या गटातील एकाला वाटले भागाकार पध्द्तीने 2 चे वर्गमूळ काढून पाहू.

पण तो भागाकार संपण्याची काही लक्षणे दिसेनात.

प्रत्येक वेळी बाकी वाढत वाढतच गेली,शिवाय भागाकाराच्या उत्तरात

आवर्ती गट काही मिळेना.

मुले कामाला लागली. स्वानंद चिन्मयला म्हणाला, “मी 1.4 चा वर्ग करतो.

तू 1.5 चा वर्ग कर.”

$(1.4)^2=1.96$ व $(1.5)^2=2.25$. अरेरे, एक संख्या 2 पेक्षा थोडी लहान तर

दुसरी 2 पेक्षा थोडी मोठी आली.त्यांनी मग (1.41), (1.49) यांचे वर्ग करुन

पाहिले पण मघाप्रमाणेच झाले.”

दुसऱ्या गटातील एकाला वाटले भागाकार पध्द्तीने 2 चे वर्गमूळ काढून पाहू.

पण तो भागाकार संपण्याची काही लक्षणे दिसेनात.प्रत्येक वेळी बाकी वाढत

वाढतच गेली,शिवाय भागाकाराच्या उत्तरात आवर्ती गट काही मिळेना.

सगळ्यांनीच ताईंना सांगितले,अशी कोणतीच संख्या त्यांना सापडेना की,

जिचा वर्ग=2 आहे, तेंव्हा ताई म्हणाल्या, “यामुळेच त्यांना (म्हणजे पूर्वीच्या

माणसांना) नवीन संख्यांचा विचार केला पाहिजे हे कळले व त्यांनी ,अशा

संख्या मांडल्या व व्याख्या सांगितली की,

$\sqrt{2}$ म्हणजे अशी संख्या की जिचा वर्ग =2.

$\sqrt[3]{5}$ **म्हणजे अशी संख्या की जिचा घन= 5**.

या नवीन संख्या परिमेय नाहीत म्हणजेच अपरिमेय आहेत असा त्यांचा वापर सुरू झाला. माणसाचा जसा जसा विकास होत गेला तसा तसा गरज म्हणून संख्याप्रणालीचा विस्तार झाला."

यावर यशचे समाधान झाले. पण तो म्हणाला, "सर्व परिमेय संख्या व सर्व अपरिमेय संख्या ह्यांना एकत्र केल्यावर त्यांना एक नवीन नाव मिळाले का?"

ताईंना त्याचे कौतुक वाटले. त्यांनी सांगितले की,अशा सर्व परिमेय व सर्व अपरिमेय संख्यांना मिळून वास्तव संख्या म्हणतात.

गौतम म्हणाला, "या संख्य़ांचा विस्तार इथे तरी थांबला का?" ताईंनी सांगितले, "नाही.कारण काहीजणांच्या मनात एक प्रश्न ठाण मांडून बसला होता की, अशी कोणती संख्या असते की, जिचा वर्ग =-5 किंवा -9 अशी ॠण संख्या असते? कोणत्याच वास्तव संख्य़ेचा वर्ग कधीही ॠण नसतो.

गणितज्ञांनी मग आणखी नवीन संख्या तयार केल्या. त्याबद्दलची माहिती तुम्ही इंटरनेटवरून किंवा तुमच्या ओळखीतील योग्य व्यक्तीकडून मिळवा.”

फळयावरच्या संख्यांना कळले की आपण एकमेकींच्या सोबतच राहिले पाहिजे तरच आपले मोल अमूल्य ठरेल. त्यांचे भांडण मिटले.

पण मुले मात्र मनात म्हणाली की आपल्या पूर्वजांनी किती विचारपूर्वक ज्ञान निर्माण केले आणि वाढवलेसुध्दा.

आपण त्याच्यांशी नेहमी कृतज्ञ राहिले पाहिजे. हे अफाट काम त्यांनीसुध्दा एकमेकांच्या विचाराने, संमतीने तर केले असणारच शिवाय त्यांनी आपली नावे या शोधांना न देता अज्ञात राहणेच पसंत केले हा तर केवढा मोठा निस्वार्थीपणा!

मुलांनो,ह्या उता-यावरुन तुमच्या मनात काय काय विचार आले ते नक्की

लिहून ठेवा.

1) 'Story Of Zero' आणि 'मनोरंजक शून्य' ही पुस्तके अवश्य वाचा.

2) '0' चे अनेक गुणधर्म पुस्तकातून शोधून काढा व ते एकत्र करून त्याचा

एक तक्ता करुन तुमच्या वर्गात लावून ठेवा.

वर्गसमीकरणे सोडविण्यासाठी त्यापैकी कोणता गुणधर्म वापरला जातो ते

शोधा.

3) 1 ह्या संख्य़ेने कोणत्याही संख्य़ेला गुणले तर ती संख्या बदलत नाही.

तिला गुणाकाराचा अविकारक म्हणतात.

-1 चा गुणाकार गुणधर्म शोधून काढा.

4) 2012 हे वर्ष थोर भारतीय गणितज्ञ रामानुजन ह्यांच्या 125 व्या जयंतीचे वर्ष

असल्याने आपण ते गणित-वर्ष म्ह्णून साजरे केले. त्यांच्या बुद्धीमत्तेची चुणूक

लहानपणीच म्हणजे इ. 3 रीत असतानाच दिसली होती.

त्यांनी 0 बद्दल त्यांच्या शिक्षकांना काय शंका विचारलेली होती ते पुस्तके

वाचून शोधून काढा.

वास्तव संख्यांसंचाचे उपसंच:

1. नैसगिक संख्यांचा संच, N = {1, 2, 3, 4, 5, 6…}

2. पूर्ण संख्यांचा संच, W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…}

3. पूर्णांक संख्यांचा संच, I = {…….-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3,}

4. परिमेय संख्या:

ज्या संख्येचा अंश पूर्णांक व छेद शून्येतर पूर्णांक असतो अशी संख्या म्हणजे परिमेय संख्या.

$\frac{9}{4}, \frac{-6}{-4}, \frac{9}{-6}, \frac{8}{7}, \frac{5}{-2}$, 0, 4, 7, -5, -1,……….ह्या परिमेय आहेत.

जर दशांश अपूर्णांकातील संख्या अखंड आवर्ती असेल तर ती परिमेय संख्या असते.

परिमेय संख्यांचा संच Q ने दाखवितात.परंतु हा संच यादी पध्द्तीने लिहिता येत नाही.तो गुणधर्म पध्दतीने लिहावा लागतो.

Q={ x / x =$\frac{p}{q}$, p, q ϵ I व q ≠ 0}

5) अपरिमेय संख्या: जी संख्या परिमेय नसते तिला अपरिमेय संख्या असे म्हणतात.तसेच ज्या संख्य़ेचे द्शांश रुप अखंड अनावर्ती असते, त्या संख्येला अपरिमेय संख्या असे म्हणतात.

$\sqrt{2}, \sqrt[3]{7}$, -√5, (3-$\sqrt[3]{7}$), 4.34281674…… या काही अपरिमेय संख्या आहेत.

तसेच π ही अपरिमेय संख्या आहे. लक्षात ठेवा की 3.14 किंवा $\frac{22}{7}$या π च्या जवळात जवळच्या अंदाजे किंमती आहेत.

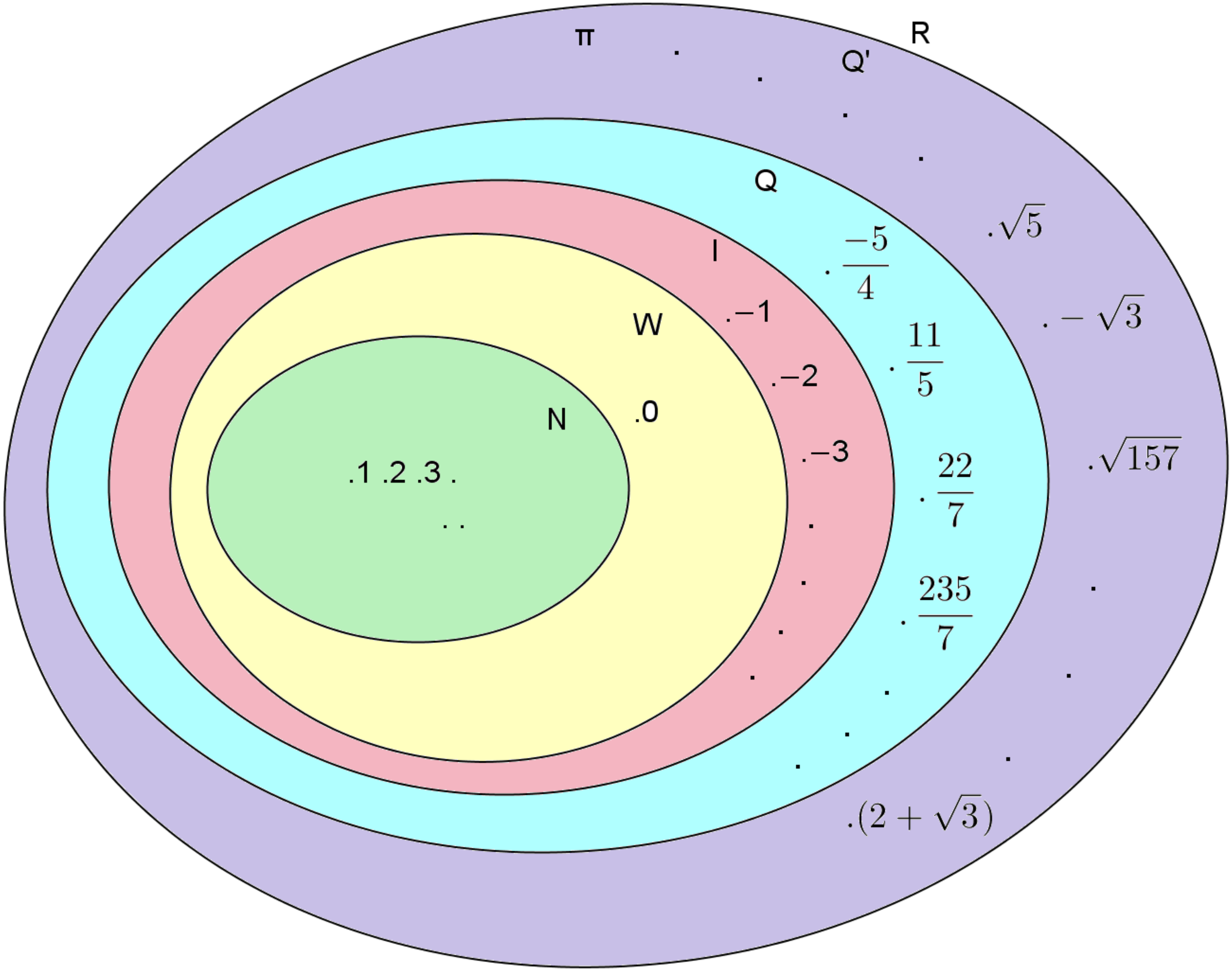
6) सर्व परिमेय व सर्व अपरिमेय संख्यांना मिळून वास्तव संख्या म्हणतात व त्यांच्या संचाला R हे नाव देतात.

∴जर R हा विश्वसंच घेतला तर परिमेय संख्यासंच व अपरिमेय संख्यासंच हे परस्परांचे पूरक संच असतात म्हणून अपरिमेय संख्यासंच Q’ ने दाखवितात.

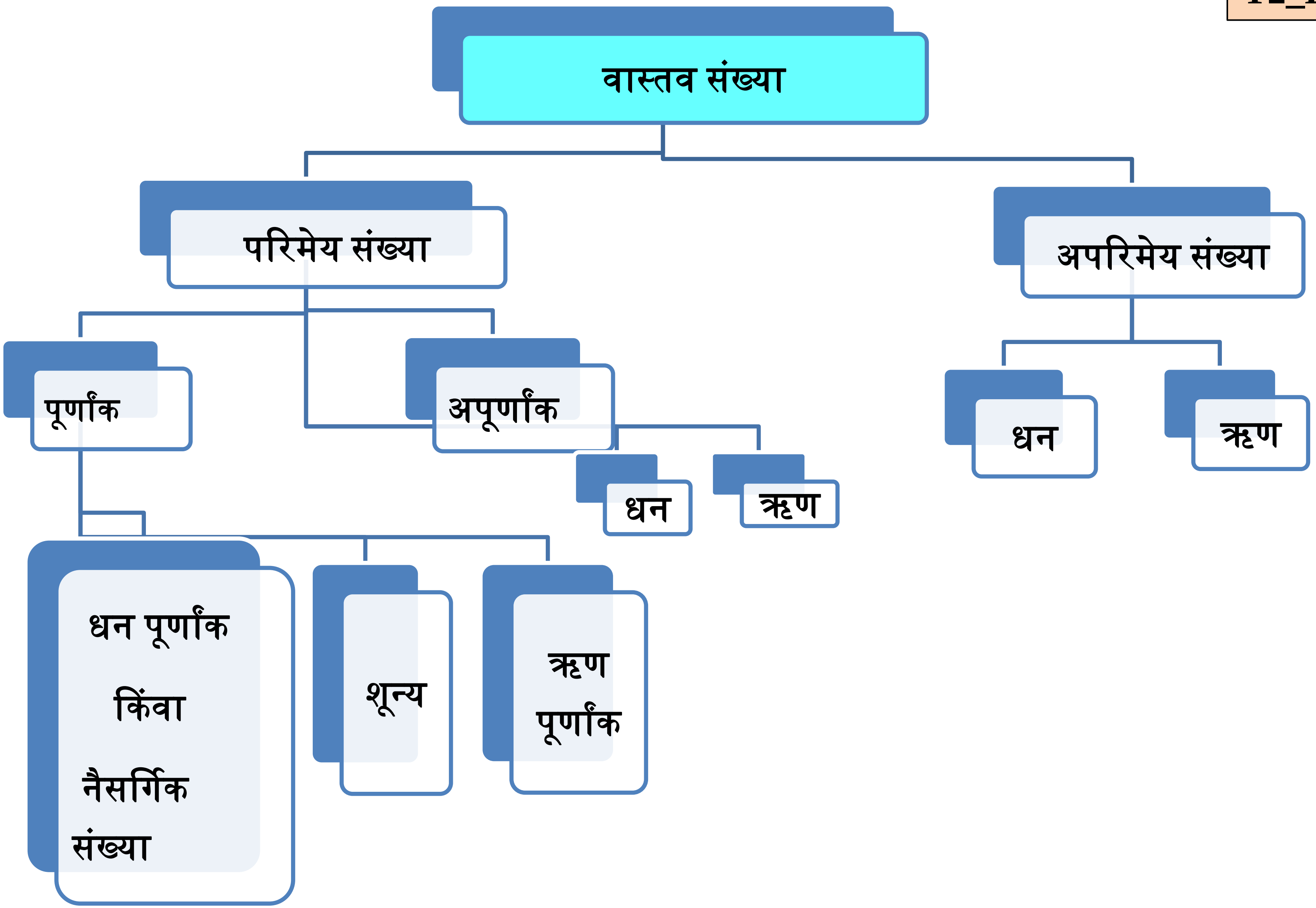
$$Q \cup Q' = R \text{ व } Q \cap Q' = \emptyset$$

संख्यासंच

T2_L1_A1



T2_L1_A1


वास्तव संख्या
परिमेय संख्या
अपरिमेय संख्या
पूर्णांक
अपूर्णांक
धन
ऋण
धन
ऋण
धन पूर्णांक
किंवा
नैसर्गिक
संख्या
शून्य
ऋण
पूर्णांक

वास्तव संख्यांतील संबंध:

N, W, I, Q, Q’ R या संचांतील उपसंच संबंध लिहा.

उत्तर: N ⊆ W ⊆ I ⊆ Q ⊆ R तसेच Q’ ⊆ R

वरील माहितीवरून पुढीलपैकी सत्य विधाने निवडा व त्याच्या कारणासाठी एक योग्य उदाहरण द्या.

1) प्रत्येक नैसर्गिक संख्या ही परिमेय संख्या असते.

2) प्रत्येक पूर्णांक संख्या ही नैसर्गिक संख्या असते.

3) प्रत्येक परिमेय संख्या ही पूर्णांक संख्या असते.

4) पूर्णांक संख्यांप्रमाणे काही अपरिमेय संख्या धन, ऋण व शून्य अशा तीन प्रकारच्या असतात.

5) अपरिमेय नसलेली वास्तव संख्या ही परिमेय असते.

उत्तरे:

T2_L1_A2

1)प्रत्येक नैसर्गिक संख्या ही परिमेय संख्या असते: सत्य विधान
कारण 3 ही नैसर्गिक संख्या 3/1 किंवा 6/2 अशा प्रकारे परिमेय संख्येच्या स्वरुपात लिहिता येते.

2)प्रत्येक पूर्णांक संख्या ही नैसर्गिक संख्या असते: असत्य विधान
कारण -2 ही पूर्णांक संख्या असून ती नैसर्गिक संख्या नाही.

3)प्रत्येक परिमेय संख्या ही पूर्णांक संख्या असते: असत्य विधान
कारण ¾ ही परिमेय संख्या असून ती पूर्णांक संख्या नाही.

4) पूर्णांक संख्यांप्रमाणे काही अपरिमेय संख्या धन, ऋण व शून्य अशा तीन प्रकारच्या असतात: असत्य विधान
अपरिमेय संख्या धन, ऋण या दोनच प्रकारच्या असतात.
0 ही परिमेय संख्या आहे व ती अपरिमेय मात्र नाही.

5)अपरिमेय नसलेली वास्तव संख्या ही परिमेय असते: सत्य विधान
कारण जी वास्तव संख्या परिमेय नसते ती व्याख्येनुसार अपरिमेयच असते.

परिमेय संख्यांचे दशांश रुप

दिलेल्या परिमेय संख्येला दशांश रुप कसे देतात हे तुम्हाला माहित आहेच.

काही संख्यांना दशांश रुप देताना काहीवेळेस बाकी = 0 मिळते त्याच्या उलट काही वेळेस,भागाकार संपत नाही,बाकी = 0 येत नाहीच आणि आवर्ती दशांश अपूर्णांक मिळतो.

तुम्ही यावर कधी विचार केला आहे?

तुम्हाला परिमेय संख्येवरून या दोनपैकी कोणती शक्यता असेल याचे उत्तर भागाकार न करताच ठरविता येते का?

आपण असा काही नियम मिळविता येतो का हे पाहू.

प्रथम काही भागाकार करून दशांश रुपे काढू.

T2_L2

पुढील संख्यांचे दशांश रुप शोधा.

$\frac{4}{5}$, $\frac{17}{8}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{15}{7}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{29}{20}$, $\frac{17}{9}$, $\frac{11}{12}$

तुमची उत्तरे पुढील सारणीत भरून सारणी पूर्ण करा.

T2_L2

संख्या	छेदाचे अवयव	बाकी = 0 आहे का?	बाकी ≠ 0 नसलेल्यासंख्येचे आवर्ती दशांशरुप
$\frac{4}{5}$	5×1	होय	----------------
$\frac{17}{8}$			
$\frac{3}{11}$			
$\frac{15}{7}$			
$\frac{4}{25}$			
$\frac{29}{20}$			
$\frac{17}{9}$			
$\frac{11}{12}$			

संख्या	छेदाचे अवयव	बाकी = 0 आहे का?	बाकी ≠ 0 नसलेल्या संख्येचे आवर्ती दशांशरुप
$\frac{4}{5}$	5×1	होय	----------------
$\frac{17}{8}$	$2\times 2\times2\times1$	होय	....
$\frac{3}{11}$	11×1	नाही	$0.27272727.... = 0.\overline{27}$
$\frac{15}{7}$	7×1	नाही	$2.142857142857.. = 2.\overline{142857}$
$\frac{4}{25}$	$5\times 5\times1$	होय	....
$\frac{29}{20}$	$2\times 2\times5\times1$	होय	......
$\frac{17}{9}$	3×3	नाही	$1.8888... = 1.\overline{8}$
$\frac{11}{12}$	$2\times 2 \times 3$	नाही	$0.91666.... = 0.91\overline{6}$

T2_L3

आवर्ती दशांश अपूर्णांकाला $\frac{p}{q}$ चे रुप देणे

1) $0.\bar{5} = 0.5555$

समजा, $x = 0.5555\ldots\ldots = 0.\bar{5}$ ………(I)

⇨ दोन्ही बाजूंना 10 ने गुणू.

$\therefore 10x = 5.555\ldots\ldots$ ....(II)

$$10x = 5.555\ldots\ldots(II)$$

$$x = 0.555\ldots\ldots(I)$$

समीकरण (II) मधून समीकरण (I) वजा करून.

$$9X = 5.000\ldots\ldots$$

$$x = \frac{5}{9}$$

$$\boxed{0.\bar{5} = \frac{5}{9}}$$

2) खालील रिकाम्या जागा पूर्ण भरून उदाहरण सोडवा.

$1.\overline{27} = 1.272727$………

समजा, $x = 1.272727..... = 1.\overline{27}$ ....(I)

दोन्ही बाजूंना 100 गुणू.

$\therefore$ 100x = 127.2727.... ....(II)

$$
\begin{array}{rll}
 & 100x = ... & \text{(II)} \\
- & x = ... & \text{(I)} \\
\hline
 & 99x = ... &
\end{array}
$$

समीकरण (II) मधून समीकरण (I) वजा करून.

$\therefore \quad x = \frac{......}{99}$

$\therefore 1.\overline{27} = \frac{......}{99}$

उत्तर : $1.\overline{27} = \frac{126}{99}$

3) खालील रिकाम्या जागा पूर्ण भरून उदाहरण सोडवा.

$0.\overline{586} =$ 0.586586........

समजा, $x = 0.586586\ldots\ldots\ldots = 0.\overline{586}$ ....(I)

दोन्ही बाजूंना 1000 ने गुणू.

$\therefore 1000x = 586.586\ldots\ldots$ ....(II)

$$\begin{array}{rl} 1000x = \ldots\ldots\ldots & \ldots(II) \\ - \quad x = \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots(I) \\ \hline 999x = \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

समीकरण (II) मधून समीकरण (I) वजा करून.

$\therefore x = \frac{\ldots\ldots}{999}$

$\therefore 0.\overline{586} = \frac{\ldots\ldots}{999}$

उत्तर : $0.\overline{586} = \frac{586}{999}$

अपरिमेय संख्येची दशांश रूपात मांडणी:

आपण 2 चे वर्गमूळ भागाकार पद्धतीने काढू.

	1. 4 1 4 2.....
	$2.\overline{00}\,\overline{00}\,\overline{00}\,\overline{00}$
1	1
+ 1	
2 4	1 0 0
+ 4	− 9 6
2 8 1	4 0 0
+ 1	− 2 8 1
2 8 2 4	1 1 9 0 0
+ 4	− 1 1 2 9 6
2 8 2 8 2	6 0 4 0 0
+ 2	− 5 6 5 6 4
2 8 2 8 4	0 3 8 3 6

$\therefore \sqrt{2} = \mathbf{1.4142}$

या भागाकार पद्धतीत दशांश चिन्हापुढील अंकांची संख्या वाढतच आहे व तिला अंत नाही किंवा अंकांचा कोणताही गट आवर्ती नाही. $\sqrt{2}$ चे दशांश रूप अखंड व अनावर्ती आहे. ते 1.4142... आहे.

जी दशांश मांडणी अखंड व अनावर्ती स्वरूपाची असते ती परिमेय संख्या नसते. अशा संख्यांना अपरिमेय संख्या म्हणतात.

$\sqrt{2}$ ही अपरिमेय कशी? : सिद्धता

T2_L4_A1

वास्तव संख्या दोन प्रकारच्या असतात: परिमेय नाहीतर अपरिमेय.

आपण $\sqrt{2}$ ही परिमेय मानू. ....(I)

व्याख्येनुसार, परिमेय संख्येचा अंश हा कोणताही पूर्णांक व छेद हा कोणताही शून्येतर पूर्णांक असतो.

$\sqrt{2} = p/q$, $q \neq 0$ असून

p व q या पूर्णांकांना 1 खेरीज इतर कोणताही सामाईक नाही असे मानू ......(II)

$\therefore \sqrt{2} \times q = p$ ....(तिरकस गुणाकाराने)

दोन्ही बाजूंचे वर्ग करून,

$2\,q^2 = p^2$ ....(III)

$\therefore q^2 = p^2/2$ ....(IV)

वरील समीकरण (IV) च्या डाव्या बाजूतील q^2 हा पूर्णांक आहे त्याअर्थी उजव्या

बाजूची

संख्यासुध्दा पूर्णांकच असली पाहिजे.म्हणजेच p^2 ला 2 ने पूर्ण भाग जातो.

याचाच अर्थ p ला सुध्दा 2 ने पूर्ण भाग जातो.

(p ही सम संख्या आहे.)...........(V)

समजा, $p = 2m$ (m हा पूर्णांक कारण समसंख्या ही पूर्णांकाच्या दुप्पट असते.)

दोन्ही बाजूंचे वर्ग करु.

$\therefore P^2 = (2m)^2$

$\therefore P^2 = 4m^2$ ……………………(vi)

परंतु $2q^2 = p^2$ ………………… (iii)

$\therefore 2q^2 = 4m^2$ …………………..(विधान (iii) व (v) वरून)

$\therefore q^2 = 2m^2$

$\therefore q^2$ ही m^2 या पूर्णांकाची दुप्पट आहे.

$\therefore q^2$ ला 2 ने पूर्ण भाग जातो.

$\therefore$ q ला 2 ने पूर्ण भाग जातो. ………………… (vii)

विधान (vi) व (vii) वरून p तसेच q ला 2 ने भाग जातो………… (viii)

परंतु p तसेच q ला 1 खेरीज इतर कोणताही सामाईक नाही असे आपण

विधान(II) मध्ये मानलेले होते. त्याच्याशी वरील विधान (viii) विसंगत आहे.

त्यामुळे आपण मानलेले $\sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या मानू हे **विधान (i) असत्य ठरते.**

म्हणजेच $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे हे सत्य.

$(3+\sqrt{2})$ ही संख्या अपरिमेय आहे का परिमेय?

हा प्रश्न अनेक मुलांना पडतो. कारण यातील 3 ही संख्या परिमेय आहे पण $\sqrt{2}$मात्र अपरिमेय आहे.

अप्रत्यक्ष सिध्दतेची रीत भूमितीमध्ये आपण पाहिली आहे व याआधी त्याचप्रकारे $\sqrt{2}$अपरिमेय आहे हे सिध्द झाले आहे.

त्याचप्रकारे तुम्ही $(3+\sqrt{2})$ ही अपरिमेय आहे का हे तपासून पाहू शकाल?

खालील सूचनांच्या आधारे तुम्ही सिद्धता तयार करा.

(i) अप्रत्यक्ष सिध्दतेच्या पध्दतीनुसार $(3+\sqrt{2})$ परिमेय संख्या आहे असे मानून सुरूवात करा.

(ii) ती परिमेय संख्या a ने दाखवा.

(iii) आता या समीकरणाच्या एका बाजूला आपल्याला नक्की माहित असलेली अपरिमेय संख्या ठेवा व उरलेल्या परिमेय संख्या विरुध्द बाजूला लिहा.

(iv) मनात वेगवेगळया परिमेय संख्या घ्या व त्यांच्या बेरजा/वजाबाक्या करून पहा.विचार करा की दोन परिमेय संख्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी करून मिळणारी संख्या कोणत्या प्रकारची संख्या असते परिमेय का अपरिमेय?

(v) या समीकरणाच्या दोन बाजूंना असलेल्या संख्या कोणत्या प्रकारच्या आहेत? अशा प्रकारच्या संख्या समान असणे त्यांच्या व्याख्येशी सुसंगत आहे की विसंगत?

(vi) जर त्या विसंगत असतील तर त्यातून तुम्हाला कोणकोणते निष्कर्ष काढता येतील ?

(vii) (3 + $\sqrt{2}$) ही कोणत्या प्रकारची संख्या आहे याबाबतचे विधान तयार करा.

i) $(3 + \sqrt{2})$ परिमेय संख्या आहे असे मानू.

ii) $(3 + \sqrt{2})$ ही परिमेय संख्या a ने दाखवू.

iii) $\therefore \sqrt{2} = (a-3)$

iv) a व 3 या दोन परिमेय संख्या आहेत.

दोन परिमेय संख्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी ही परिमेय संख्याच असते.

$\therefore$ (a -3) ही परिमेय संख्या आहे.

v) याचा अर्थ समीकरण (iii) ची डाव्या बाजूची संख्या $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय आहे,

तर उजव्या बाजूची संख्या (a -3) ही मात्र परिमेय आहे.

म्हणजे समीकरण (iii) हे अपरिमेय संख्येच्या व्याख्येशी विसंगत आहे.

$\therefore$ $(3 + \sqrt{2})$ परिमेय संख्या आहे असे मानल्यामुळे ही विसंगती निर्माण झाली आहे.

$\therefore$ त्याअर्थी $(3 + \sqrt{2})$ परिमेय संख्या आहे हे विधान असत्य आहे.

$\therefore$ $(3 + \sqrt{2})$ अपरिमेय संख्याआहे.

निष्कर्ष:
एक अपरिमेय संख्या व एक परिमेय संख्या यांची बेरीज तसेच वजाबाकी करून मिळणारी संख्या अपरिमेयच असते.

कोणत्याही दोन संख्यांच्या दरम्यानच्या संख्या मिळविणे.

समजा, आपल्याला $\frac{3}{8}$ व $\frac{7}{8}$ यांच्या दरम्यानच्या कोणत्याही चार संख्या शोधायच्या आहेत.

यासाठी आपण वास्तव संख्यांचा पुढील अतिशय उपयुक्त आणि महत्वाचा गुणधर्म वापरणार आहोत.हा गुणधर्म तुम्ही यापूर्वी शिकला आहात.अपूर्णांकाच्या अंशाला व छेदाला एकाच **शून्येतर** संख्येने गुणले तर तिची किंमत बदलत नाही.

चिन्हात $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ ….($k \neq 0$) येथे समजा $k = 5$ घेतले तर,

$\frac{3}{8} = \frac{3\times5}{8\times5} = \frac{15}{40}$ तसेच $\frac{7}{8} = \frac{7\times5}{8\times5} = \frac{35}{40}$

आता, $\frac{15}{40}$ व $\frac{35}{40}$ यांच्या दरम्यानच्या कोणत्याही चार संख्या निवडू.

उदाहरणार्थ, $\frac{17}{40}$,$\frac{19}{40}$, $\frac{23}{40}$, $\frac{25}{40}$ अशा संख्या $\frac{3}{8}$ पेक्षा मोठ्या व

$\frac{7}{8}$ पेक्षा लहान आहेत.

यासाठी दुसरीही एक पद्धत आहे. ती पुढे पहा.

दुसरी रीत:

T2_L5_A1

समजा, दिलेल्या दोन संख्या a व b आहेत.

i) त्यांच्या दरम्यानची एक संख्या म्हणजे त्यांची सरासरी: $\frac{a+b}{2}$

ii) समजा, a <b आहे.आता a व $\frac{a+b}{2}$ यांच्या दरम्यानची एक संख्या म्हणजे

a व $\frac{a+b}{2}$ यांची सरासरी = $\frac{1}{2}(a + \frac{(a+b)}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{2a+a+b}{2}) = \frac{3a+b}{4}$

iii) तसेच b व $\frac{a+b}{2}$ यांच्या दरम्यानची एक संख्या म्हणजे

b व $\frac{a+b}{2}$ यांची सरासरी = $\frac{1}{2}(b + \frac{(a+b)}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{2b+a+b}{2}) = \frac{a+3b}{4}$

iv) आता a व $\frac{3a+b}{4}$ यांची सरासरी काढली की आणखी एक दरम्यानची संख्या मिळेल.

या प्रकारे किती संख्या मिळतील?

अशा प्रकारे अनंत संख्या मिळू शकतील.

रेषेवरील कोणत्याही दोन बिंदूंच्या दरम्यान अनंत बिंदू

असतात.त्याचप्रमाणे कोणत्याही दोन संख्याच्या दरम्यान अनंत संख्या

असतात.

या पद्धतीने 2.33 व 2.37 मधील किमान चार परिमेय संख्या शोधण्याचा प्रयत्न कराल?

नैसर्गिक संख्यांचा म.सा.वि. व ल.सा. वि. :

म.सा.वि. (महत्तम साधारण विभाजक) :

84 आणि 48 यांच्या विभाजकांचा विचार करू.

84 च्या विभाजकांचा संच = A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 14, 21, 42, 84 }

48 च्या विभाजकांचा संच = B = { 1, 2, 3, 4, 6, 12, 14, 21, 28, 42, 84 }

84 व 48 च्या सामाईक विभाजकांचा संच = $(A \cap B)$ = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

$(A \cap B)$ या संचातील सर्वात मोठा घटक = 12

∴ 84 व 48 चा म. सा. वि. = 12

ल. सा. वि. (लघुतम साधारण विभाज्य):

18 व 24 यांनी विभाज्य असणाऱ्या संख्यांचा विचार करू.

18 ने विभाज्य संख्यांचा संच = A = {18, 36, 54,, 72, 90, 108, 126, 144, ...}

24 ने विभाज्य संख्यांचा संच = B = {24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, ... }

18 व 24 ने विभाज्य साधारण (सामाईक) संख्यांचा संच = (A ∩ B) = {72, 144, ...}

(A ∩ B) या संचातील सर्वात लहान घटक = 72

∴18 व 24 चा ल.सा. वि. = 72

युक्लिडचा भागाकार सिध्दांत

T2_L6_A3

तुम्हाला हे माहितच आहे:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \ \ 2 \\
\hline
5 & 13 \\
 & -10 \\
\hline
 & \ \ 03
\end{array}
$$

$13 - 10 = 3$

$13 = 10 + 3$

$13 = (5 \times 2) + 3$

भाज्य = (भाजक × भागाकार) + बाकी

युक्लिडचा भागाकार सिद्धांत :

a आणि b हे दोन धन पूर्णांक असून a ला b ने भागून
भागाकार = q
व बाकी = r असेल तर
$a = (b \times q) + r$, q आणि r या संख्या शून्य किंवा धन असू शकतात.

T2_L6_A3

युक्लिडने सांगितलेली भागाकाराची कार्यावली ही या सिद्धांतावर आधारित आहे.

(प्रश्न सोडविण्यासाठी क्रमवार पायऱ्या पायऱ्यांनी मुद्दे लिहिणे यालाच कार्यावली म्हणतात.)

युक्लिडच्या भागाकार सिद्धांतालाच युक्लिडची भागाकाराची कार्यावली असेही म्हणतात.

युक्लिडची भागाकाराची कार्यावली ही दोन धन पूर्णांक संख्यांचा महत्तम सामाईक विभाजक

काढण्याचे एक तंत्र म्हणून वापरली जाते.

युक्लिडच्या भागाकार कार्यावलीचा उपयोग करून a आणि b (a > b) या दोन धन पूर्णांकांचा म. सा. वि काढण्याची पद्धती :

खालील कार्यावलीचा (algorithm) उपयोग करून दोन धन पूर्णांकांचा म.सा. वि. काढता येतो.

पायरी 1 : युक्लिडची कार्यावली वापरून q आणि r असे शोधा की

$$a = bq + r,\ 0 \le r < b$$

[भाज्य = (भाजक)(भागाकार) + बाकी], 0 ≤ बाकी < भाजक

पायरी 2 : जर r = 0 (बाकी = 0), तर b (भाजक) हा म. सा. वि. असेल .

जर r ≠ 0 (बाकी ≠ 0), तर पुन्हा b (भाजक) ला r (बाकी) ने भागा.

पायरी 3 : बाकी शून्य येईपर्यंत भागाकार करा.

जेव्हा बाकी शून्य येईल तेव्हांचा भाजक हा त्या दोन संख्यांचा म.सा.वि. होय.

युक्लिडच्या कार्यावलीने म.सा.वि. काढणे.

T2_L6_A3_F1

उदा. युक्लिडची भागाकार कार्यावली वापरून 27727 व 53124 चा म.सा.वि काढा.

पायरी I : 27727 व 53124 साठी भागाकार सिद्धांत वापरू.

$$\begin{array}{r|r} & 1 \\ \hline 27727 & 53124 \\ & -\;27727 \\ \hline & 25397 \end{array}$$

$\therefore$ भाज्य = (भाजक)(भागाकार) + बाकी

$\therefore 53124 = 27727 \times 1 + 25397$

पायरी II : येथे बाकी = 25397 ≠ 0

∴ नविन भाजक **27727** व पायरी (I) मधील बाकी 25397 यांच्यासाठी पुन्हा भागाकार सिद्धांत वापरू.

$$\begin{array}{r|r} & 1 \\ \hline 25397 & 27727 \\ & -\,25397 \\ \hline & 02330 \end{array}$$

∴ भाज्य = (भाजक)(भागाकार) + बाकी

∴ **27727 = 25397 × 1 + 2330**

T2_L6_A3_F1

पायरी III : येथे बाकी = 2330 $\neq 0$

$\therefore$ नविन भाजक 25397 व पायरी (II) मधील बाकी 2330 यांच्यासाठी पुन्हा भागाकार सिद्धांत वापरू.

$$\begin{array}{r|r}
 & 10 \\ \hline
2330 & 25397 \\
 & -\,23300 \\ \hline
 & 02097
\end{array}$$

$\therefore$ भाज्य = (भाजक)(भागाकार) + बाकी

$\therefore 25397 = 2330 \times 10 + 2097$

पायरी (IV): येथे बाकी = 2097 ≠ 0

∴ नविन भाजक 2330 व पायरी (IV) मधील बाकी 2097 यांच्यासाठी पुन्हा भागाकार सिद्धांत वापरू.

$$\begin{array}{r|r} & 1 \\ \hline 2097 & 2330 \\ & -\,2097 \\ \hline & 0233 \end{array}$$

∴ भाज्य = (भाजक) (भागाकार) + बाकी

∴ $2330 = 2097 \times 1 + 233$

पायरी (V) : येथे बाकी = 233 ≠ 0

∴ नविन भाजक 2097 व पायरी (IV) मधील बाकी 233 यांच्यासाठी पुन्हा भागाकार सिद्धांत वापरू.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;9 \\
\hline
233 & 2097 \\
 & -\,2097 \\
\hline
 & \;\;\;0
\end{array}
$$

आता बाकी शून्य मिळाली. शेवटचा भाजक = 233

∴ 53124 व 27727 यांचा म. सा. वि. 233.

अंकगणिताचा मूलभूत सिद्धांत:

कोणतीही नैसर्गिक संख्या ही त्याच्या मूळ अवयवांच्या गुणाकाराच्या रूपात खालील पद्धतीने लिहू शकतो.

उदाहरण: 8624 ही संख्या मूळ अवयवांच्या गुणाकाराच्या रूपात खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$$8624 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 11$$

$$8624 = (2)^4 \times (7)^2 \times 11$$

सिद्धांत:

कोणतीही संयुक्त संख्या ही मूळ संख्यांच्या गुणाकाराच्या रूपात व्यक्त करता येते.

तिचे मूळ अवयव (क्रमाचा विचार न करता) हे एकमेव असतात.

संख्यांचे म. सा. वि. आणि ल. सा. वि काढण्यासाठी अंकगणिताच्या मूलभूत सिद्धांताचा उपयोग होतो.

उदाहरण: अंकगणिताचे मूलभूत प्रमेय वापरून खालील संख्यांचा म. सा. वि. व ल. स

90 व 72

➡ i) 90 व 72 यांचा म.सा. वि. काढू.

$90 = \underline{3} \times \underline{3} \times \underline{2} \times 5 = (3)^2 \times 2 \times 5$

$72 = \underline{2} \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times \underline{3} = (2)^3 \times (3)^2$

∴ 90 व 72 यांचा म.सा. वि. = $(3)^2 \times 2 = 18$

ii) 90 व 72 यांचा ल.सा. वि. काढू.

$90 = 3 \times 3 \times 2 \times 5$

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

90 व 72 चा ल. सा. वि. = पहिल्या संख्येचे सर्व अवयव × दुसऱ्या संख्येचे उरलेले अवयव

$= (3 \times 3 \times 2 \times 5) \times (2 \times 2)$

$= 3^2 \times 2^3 \times 5$

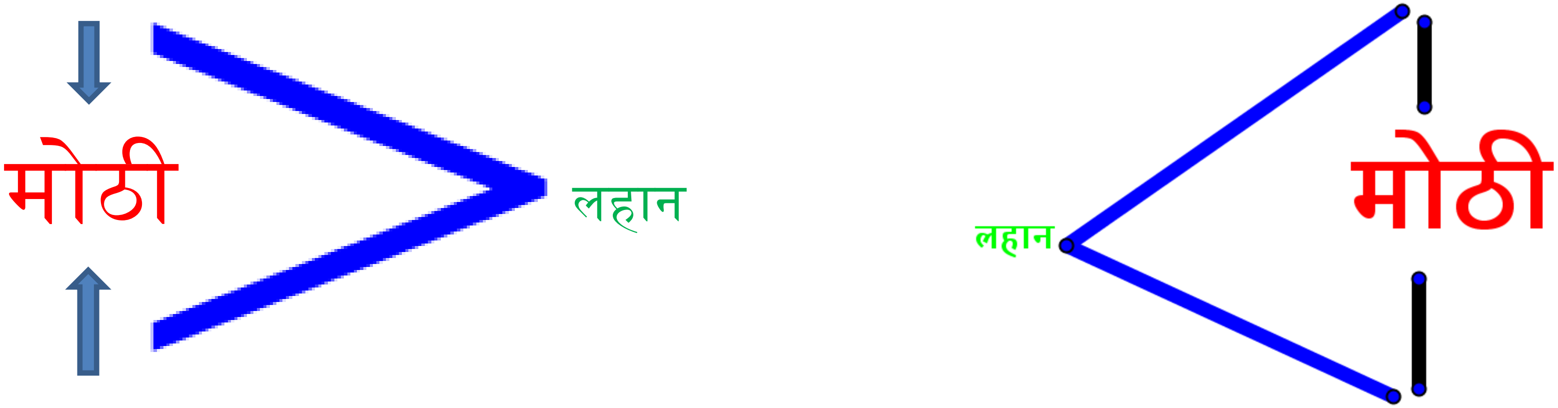
$= 360$

दोन संख्यांमधील तीन पर्याय

समजा, तुम्ही दुकानात बूट खरेदी करण्यासाठी गेलात आणि तुम्हाला दोन वेगवेगळ्या कंपन्यांचे जोड आवडले.
यानंतर खरेदी करण्यापूर्वी तुम्ही कशाचा विचार कराल?
अर्थातच त्यांच्या किंमतींचा ना?
त्या किंमतींची तुलना करताना किती शक्यता असतील?

i) त्या समान असतील किंवा
ii) पहिल्या जोडीची किंमत ,दुस-यापेक्षा कमी असेल किंवा
iii) पहिल्या जोडीची किंमत ,दुस-यापेक्षा जास्त असेल.

∴जर त्या संख्या x आणि y असतील तर
पुढीलपैकी **एक आणि एकच शक्यता सत्य** असते.
i) $x = y$ ii) x ही y पेक्षा मोठी (चिन्हात $x>y$)
iii) x ही y पेक्षा लहान(चिन्हात $x<y$)
याला त्रिभाजन गुणधर्म म्हणतात.



1) अनिकेत आणि भरत यांच्यात धावण्याची शर्यत लागली, त्यात भरत जिंकला!
या उदाहरणावरून आपल्याला काय समजले?
धावण्याच्या शर्यतीत भरतचा वेग अनिकेतपेक्षा कितीने जास्त होता, हे आपल्याला माहित नाही.
पण भरत अनिकेत पेक्षा जोरात धावला हे नक्की.
त्यांचा धावण्याचा वेग समान नाही. याला असमानता म्हणतात
येथे b = भरतचा धावण्याचा वेग
' >'= त्यापेक्षा जास्त
a = अनिकेतचा धावण्याचा वेग
वरील चिन्हे वापरून $b > a$ म्हणजेच $a < b$

2) एका भांड्यात 4 कपापर्यंत पाणी मावू शकते. मग भांड्यात किती पाणी आहे?

जोपर्यंत तुम्ही ते पाणी मोजून पाहत नाही तो पर्यंत तुम्ही '4 कपापेक्षा कमी किंवा 4 कपांइतके पाणी आहे' असे म्हणू शकता.

म्हणजे भांड्यातील पाणी 4 कपांपेक्षा कमी किंवा 4 कप हे विधान चिन्हाच्या स्वरुपात लिहिताना $<$ व $=$ ही चिन्हे एकत्र करतात व $\leq$ असे चिन्ह वापरतात.

$\therefore$ भांड्यातील पाणी $= x$ कप मानले तर वरील विधान पुढीलप्रमाणे लिहिता येते.

$$x \leq 4$$

3) मतदान करण्यासाठी तुमचे वय 18 वर्षे किंवा त्यापेक्षा जास्त पाहिजे.

येथे 'तुमचे वय' आणि 'वय वर्षे 18' येथे असमानता आहे.
मतदान करण्यासाठी तुमचे वय '18 वर्षे किंवा त्यापेक्षा जास्त पाहिजे.'

हे विधान चिन्हाच्या स्वरुपात लिहिताना > व = ही चिन्हे एकत्र करतात.
व $\geq$ असे चिन्ह वापरतात.

तुमचे वय = y वर्षे मानले तर वरील विधान चिन्हात पुढील पध्द्तीने लिहितात: $y \geq 18$

वास्तव संख्यांमधील असमानता चिन्हे

>	च्यापेक्षा मोठी
<	च्यापेक्षा लहान
≥	च्यापेक्षा मोठी किंवा समान (म्हणजे लहान नाही.)
≤	च्यापेक्षा लहान किंवा समान(म्हणजे मोठी नाही.)
a < x <b	x ही a पेक्षा मोठी परंतु b पेक्षा लहान आहे.

वास्तव संख्या व असमानता:

1.तुम्हाला माहित आहेच की, वास्तव संख्या तीन प्रकारच्या असतात.

i) धन

किंवा

ii) ऋण

किंवा

iii) 0 (शून्य : जी धनही नाही व ऋणही नाही.)

1) x ही धनेतर संख्या आहे हे विधान योग्य चिन्ह वापरून लिहिण्यासाठी धनेतर म्हणजे x ही धन सोडून इतर म्हणजे ऋण किंवा 0 आहे.

$x \leq 0$

2) y ही ऋणेतर आहे म्हणजे y ही ऋण सोडून इतर म्हणजे धन किंवा 0 आहे.

$y \geq 0$

3) a ही धन नाही आणि ऋणही नाही म्हणजे $a = 0$.

4) x ची किंमत -3 पेक्षा मोठी पण 3 पेक्षा लहान आहे.

$-3 < x < 3$

असमानतांचे गुणधर्म:

पहिल्या स्तंभातील उदाहरणे पाहून दुसऱ्या स्तंभातील नियम बनवा.

उदाहरण	नियम
1) -5 < -3 दोन्ही बाजूत 2 मिळवू -5+2=-3 -3+2=-1 व -3 < -1	जर a < b असेल तर दोन्ही बाजूत c ही कोणतीही एक संख्या मिळवून कोणता क्रमसंबध मिळेल त्याचे चिन्ह रिकाम्या जागी भरा. (a + c) ..... (b + c)
2) 8 > -8 दोन्ही बाजूतून 2 वजा करू 8-2=6 -8-2=-10 व 6-10	जर a > b असेल तर, दोन्ही बाजूतून c ही कोणतीही एक संख्या वजा करून कोणता क्रमसंबध मिळेल त्याचे चिन्ह रिकाम्या जागी भरा. (a - c) ...... (b –c)

T2_L8_A1

5) एकाच धन संख्येने भागल्यास: 12 < 18 दोन्ही बाजूंना 6 ह्या एकाच धनसंख्येने भागू. $\frac{12}{6}$= 2 $\frac{18}{6}$= 3 व 2 <3	5) जर a < b असेल व c ही कोणतीही धन संख्या असेल तर, c ह्या एकाच धन संख्येने दोन्ही बाजूंना भागून कोणता क्रमसंबध मिळेल त्याचे चिन्ह रिकाम्या जागी भरा. $\frac{a}{c}$ .... $\frac{b}{c}$
6) एकाच ऋण संख्य़ेने भागल्यास 12 <18 दोन्ही बाजूंना -6 ह्या एकाच ऋण संख्य़ेने भागू. $\frac{-12}{6}$ = -2 $\frac{-18}{6}$ = -3 व -2 >-3	6) जर a < b असेल व c ही कोणतीही ऋण संख्या असेल तर दोन्हीबाजूंनाc ने भागून कोणता क्रमसंबध मिळेल त्याचे चिन्ह रिकाम्या जागी भरा. $\frac{a}{c}$ .... $\frac{b}{c}$

5) एकाच धन संख्येने भागल्यास: 12 < 18 दोन्ही बाजूंना 6 ह्या एकाच धन संख्येने भागू. $\frac{12}{6}$= 2 $\frac{18}{6}$= 3 व 2 <3	5) जर a < b असेल व c ही कोणतीही धन संख्या असेल तर, c ह्याएकाचधनसंख्येने दोन्हीबाजूंनाभागून कोणता क्रमसंबध मिळेल त्याचे चिन्ह रिकाम्या जागी भरा. $\frac{a}{c}$ ……… $\frac{b}{c}$
6) एकाच ऋण संख्येने भागल्यास 12 <18 दोन्ही बाजूंना -6 ह्या एकाच ऋण संख्येने भागू. $\frac{-12}{6}$ = -2 $\frac{-18}{6}$ = -3 व -2 >-3	6) जर a < b असेल व c ही कोणतीही ऋण संख्या असेल तर दोन्ही बाजूंनाc ने भागून कोणता क्रमसंबध मिळेल त्याचे चिन्ह रिकाम्या जागी भरा. $\frac{a}{c}$ ……… $\frac{b}{c}$

असमानता संबंध शोधणे

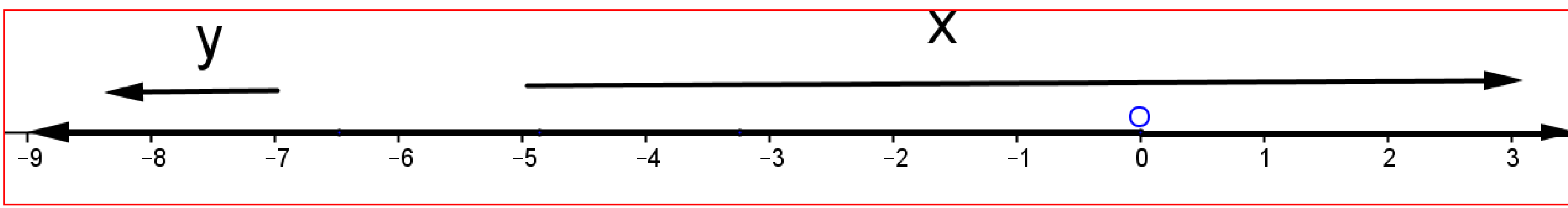
T2_L8_A2

1) समजा, $a < b$ व $b < c$ असेल तर तुम्हाला a व c मधील क्रमसंबंध कळला का?
तो $a<c$ असा असतो.

2) समजा,$x = -4$ व $y < -4$ तर xआणि y यांमधील क्रमसंबंध कोणता?
$y < x$

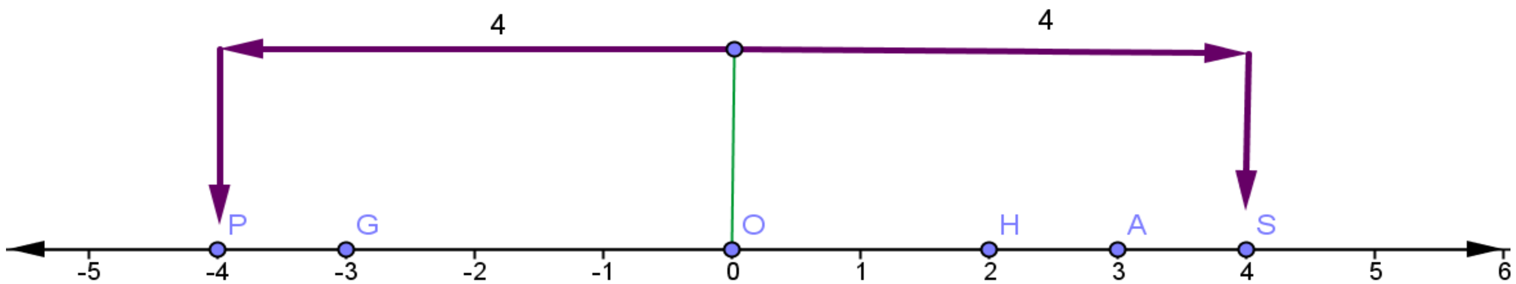
3) समजा, $x > -5$; $-7 > y$ तर xआणि y यांमधील क्रमसंबंध कोणता?
याचे उत्तर संख्यारेषेवरून लगेच मिळेल. खालील आकृतीवरून उत्तर ठरवा.
संख्यारेषेवर उजवीकडच्या बिंदूने दाखविलेली संख्या त्याच्या डावीकडील बिंदूने दाखविलेल्या संख्येपेक्षा मोठी असते हे तुमच्या लक्षात आहे ना?

उत्तर :



विरुध्द संख्या

4 आणि -4 या संख्याबाबत खालील तुम्हाला आकृतीवरून काय कळेल?



बिंदू P आणि S यांच्या आरंभबिंदूपासूनच्या अंतरांबाबत काय आढळले?

बिंदू P आणि S यांची आरंभबिंदूंपासूनची अंतरे समान आहेत.पण ते बिंदू आरंभबिंदूच्या विरूध्द बाजूला आहेत.

त्यामुळे त्यांनी दाखविलेल्या संख्यांना विरुध्द संख्या म्हणतात.
आणखी कोणत्या बिंदूंनी दाखविलेल्या संख्या विरुध्द संख्या आहेत?

उत्तर :
बिंदू A व G ने दाखविलेल्या संख्या अनुक्रमे 3 व -3 या विरुध्द संख्या आहेत.

T2_L8_A3

यावरून पुढील प्रश्नांवर विचार करा व उत्तरे शोधण्याचा प्रयत्न करा.

1. धन संख्येची विरूध्द संख्या कोणत्या प्रकारची असते ?
2. ऋण संख्येची विरूध्द संख्या कोणत्या प्रकारची असते?
3. 0 ला विरूध्द संख्या असते का? असल्यास कोणती?
4. विरूध्द संख्यांची कोणत्याही 4 जोडया घ्या व त्यांची बेरीज करा. उत्तरावरून कोणता निष्कर्ष काढाल?
5. x ही कोणतीही संख्या असेल तर तिची विरूध्द संख्या कोणती?
6. (-x) ने नेहमी ऋण संख्याच दाखविली जाते का? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.

After click

उत्तरे: 1. धन संख्येची विरूध्द संख्या ऋण असते.
2. ऋण संख्येची विरूध्द संख्या धन असते.
3. 0 ला विरूध्द संख्या असते व ती संख्या = 0.
4. कोणत्याही दोन विरूध्द संख्यांची बेरीज = 0.
5. x ही कोणतीही संख्या असेल तर तिची विरूध्द संख्या = (-x) ने दाखविली जाते.
6. (-x) ने नेहमी ऋण संख्याच दाखविली जाते असे नाही. (-x) ने x ची विरूध्द संख्या दाखविली जाते. त्यामुळे जर x धन असेल तरच (-x) ही ऋण असते.
जर x ऋण असेल तर (-x) ही धन असते आणि जर x =0 असेल तर (-x) = 0

विरुध्द संख्यांमधील नाते

$(4) \times (-1) = -4$ व $(-4) \times (-1) = 4$

यातून आपल्याला (-1) या संख्येचा गुणाकार गुणधर्म काय दिसतो?

कोणत्याही वास्तव संख्येला (-1) ने गुणल्यास त्या संख्येची विरूध्द संख्या मिळते.

एकाच ऋण संख्येने असमानतेच्या दोन्ही बाजूंना गुणल्यास असमानतेमध्ये विरुध्द क्रमसंबंध मिळतो हे आपण वरील सारणीमध्ये नियम 4 मध्ये पाहिले आहे.

आता – 7 व -3 मधील संबंध सकारण ठरविता येईल का?

$7 > 3$

– 7 व -3 या त्यांच्या विरुध्द संख्या मिळविण्यासाठी दोन्ही बाजूंना (-1)ने गुणू.

$7 \times (-1) < 3 \times (-1)$

$-7 < -3$

दोन संख्यांमध्ये जो क्रमसंबंध असतो त्याच्या विरूध्द क्रमसंबंध त्यांच्या विरुध्द संख्यांमध्ये असतो.

वास्तव संख्यांचे वर्ग

दिलेल्या संख्येचा वर्ग करणे तुम्हाला माहित आहेच. काही संख्यांचे वर्ग करून कोणत्या प्रकारच्या संख्या मिळतात ते पाहू.

i) $(4)^2 = 16$

(ii) $(-4)^2 = 16$

iii) $(0)^2 = 0$

(iv) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

v) $(\sqrt{3})^2 = 3$

(vi) $\left(\frac{-2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$

वरील वर्गसंख्यांचे निरीक्षण करून पुढील प्रश्नांवर विचार करा.

i) जी वर्गसंख्या धन नाही ती कोणत्या प्रकारची आहे?

ii) वर्गसंख्या ही कोणत्या प्रकारची संख्या नाही?

iii) वर्गसंख्या ही कोणत्या प्रकारची असतेच?

आपण आत्ता शिकलेल्या चिन्हांचा उपयोग करून हे विधान कसे लिहाल?

उत्तरे:

i) जी वर्गसंख्या धन नाही ती संख्या = 0 आहे.

ii) वर्गसंख्या या ऋण नसतात.

iii) वास्तव संख्यांचे वर्ग करून मिळणा-या वर्गसंख्या या धन किंवा 0 असतात.

म्हणजेच वर्गसंख्या ऋणेतर असतात.

iv) जर x ही कोणतीही वास्तव संख्या असेल तर $x \geq 0$

v) याचाच अर्थ ऋण संख्येचे वर्गमूळ ही वास्तव संख्या नसते.

$\frac{x-1}{x^2+5} \geq \frac{3}{x^2+5}$

ही असमानता कशी सोडवता येईल ते पहा.

ह्या असमानतेच्या दोन्ही बाजूंना छेद (x^2+5) हा समान आहे.

∴दोन्ही बाजूंना (x^2+5)ने गुणण्यापूर्वी (x^2+5)कोणत्या प्रकारची (धन/ऋण) आहे ते आपल्याला माहित पाहिजे.ते कसे ठरविता येते ते पाहू.

x ही कोणतीही वास्तव संख्या असेल तरी तिचा वर्ग धन किंवा **0** असतो. ∴ **x**$^2 \geq 0$

∴ $(x^2+5) \geq 0 + 5$ (दोन्ही बाजूत 5 मिळवून)

∴ $(x^2+5) \geq 5$

∴ (x^2+5) ही **5** किंवा त्यापेक्षा मोठी म्हणजे धन संख्या आहे.

एकाच <u>धन</u> संख्येने असमानतेच्या दोन्ही बाजूंना गुणले तर क्रमसंबंध बदलत नाही.

$$\therefore \frac{x-1}{x^2+5} \times (x^2+5) \geq \frac{3}{x^2+5} \times (x^2+5)$$

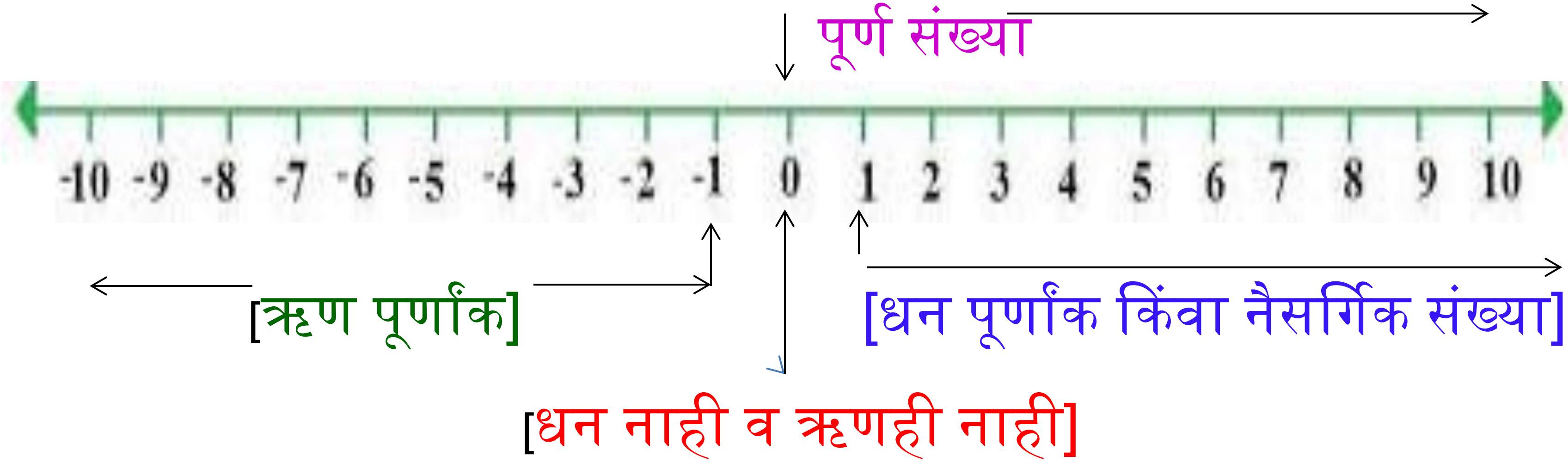
$$\therefore (x-1) \geq 3$$

$$\therefore (x-1+1) \geq 3+1$$

$$\therefore x \geq 4$$

संख्यारेषा व वास्तव संख्या

ज्या रेषेवरील बिंदूंनी संख्या दाखविलेल्या असतात तिला संख्यारेषा म्हणतात. खालील आकृतीवरून पूर्णांक संख्या रेषेवर कशा दाखवितात हे कळेल.



संख्यारेषेवर परिमेय संख्या दाखविणे.

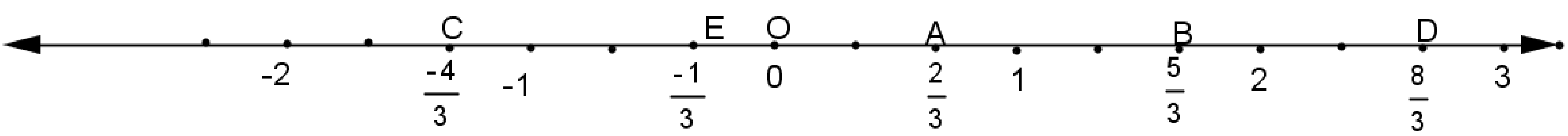
पुढील परिमेय संख्या संख्यारेषेवर दाखवा: $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-4}{3}$

खुलासा: या सर्व संख्यांच्या छेदस्थानी 3 ही समान संख्या आहे म्हणून कोणतेही एक सोय़ीस्करअंतरघेऊन आरंभबिंदूपासून उजवीकडे व डावीकडे समान अंतरावरील बिंदूंना खुणा करा व प्रत्येक तिस-या खुणेवर आरंभबिंदूच्या उजवीकडे 1,2,… आणि डावीकडे -1,-2 हे पूर्णांक दाखवा.

एक महत्त्वाचा मुद्दा लक्षात घ्या की,

$\frac{5}{3} = 5 \times \frac{1}{3}$असा अर्थ असल्याने $\frac{1}{3}$ अंतरावर ज्या खुणा प्रथम केल्या आहेत त्यातील आरंभबिंदूपासूनच्य़ा 5 व्या खुणेवर असलेल्या बिंदूने $\frac{5}{3}$ ही संख्या दाखविली जाते.

याच पध्दतीने इतर संख्या दाखविल्या आहेत.



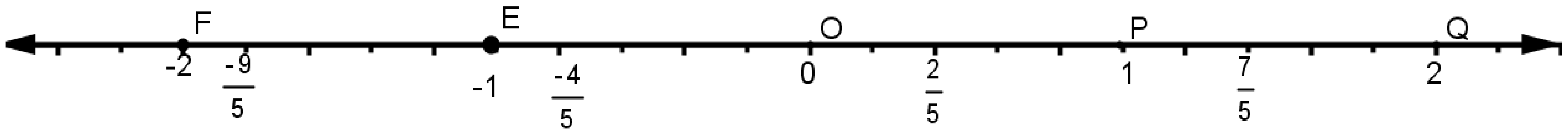
T2_L9_A1

संख्यारेषेवर परिमेय संख्या दाखविणे.

वरील खुलासा कळला असेल तर पुढील परिमेय संख्या संख्यारेषेवर दाखवा:

$$\frac{7}{5}, \quad \frac{-4}{5}, \quad \frac{-9}{5}, \quad \frac{2}{5}$$

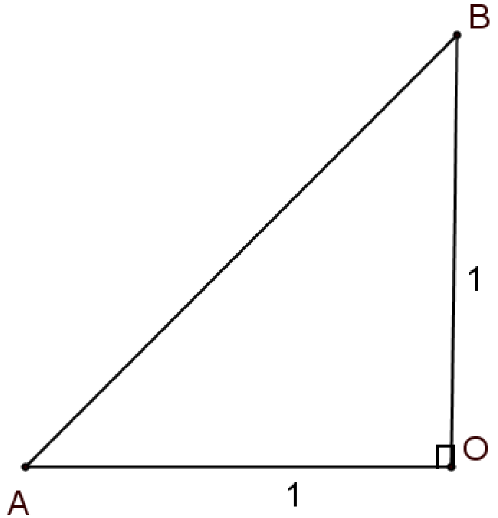
उत्तर:



काही अपरिमेय संख्या संख्यारेषेवर दाखविणे.

T2_L9_A2

सोबतच्या आकृतीवरून उत्तरे लिहा.



i) आकृतीमधील त्रिकोणाचे नाव

ii) त्याचा कोणता कोन काटकोन

iii) त्याचा कर्ण कोणता?

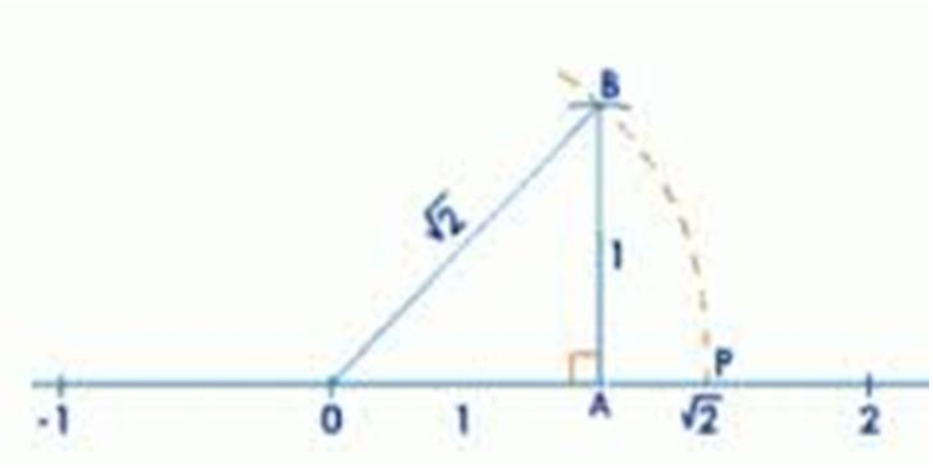
iv) पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार मिळणारे समीकरण लिहा.
जर AB =1, OA = 1 असल्यास OB = ?
याचा उपयोग करून कोणती अपरिमेय संख्या आपण संख्यारेषेवर दाखवितो? कशी?

काही अपरिमेय संख्या संख्यारेषेवर दाखविणे.

$(AB)^2 + (OA)^2 = (OB)^2$ .....(पायथागोरसचे प्रमेय)

$\therefore 1 + 1 = (OB)^2$ $\therefore 2 = (OB)^2$ $\therefore OB = \sqrt{2}$

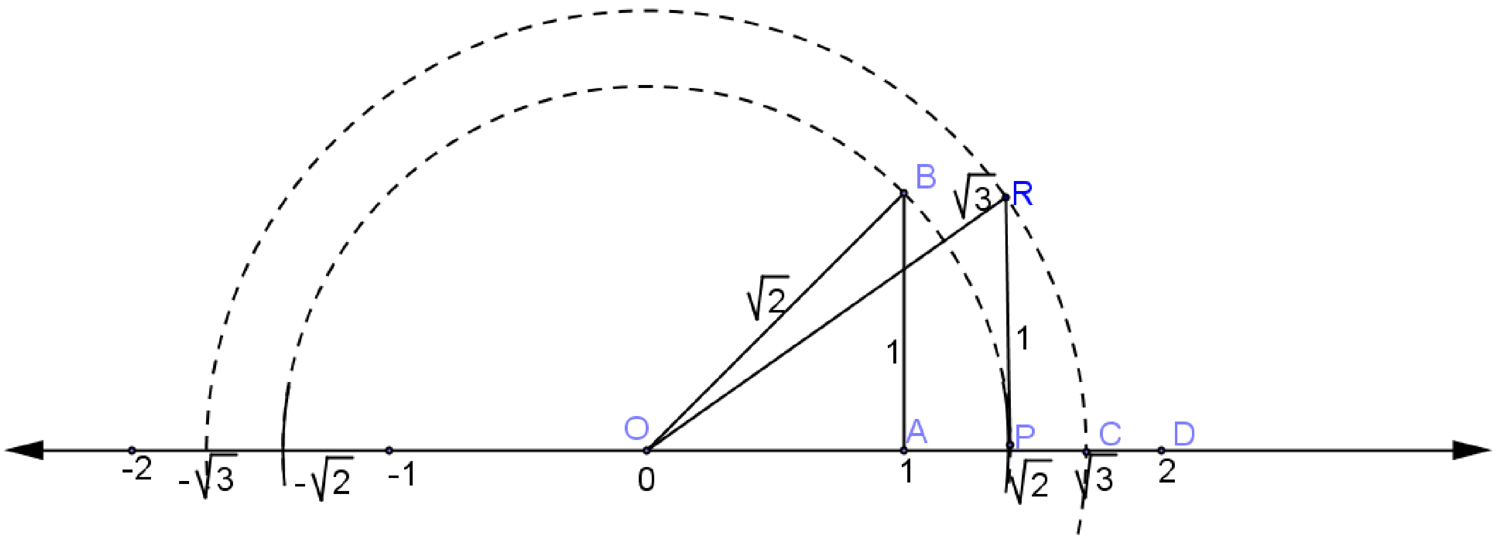
याचा उपयोग करून आपण $\sqrt{2}$ ही संख्या संख्यारेषेवर दाखवू शकतो.



काही अपरिमेय संख्या संख्यारेषेवर दाखविणे.

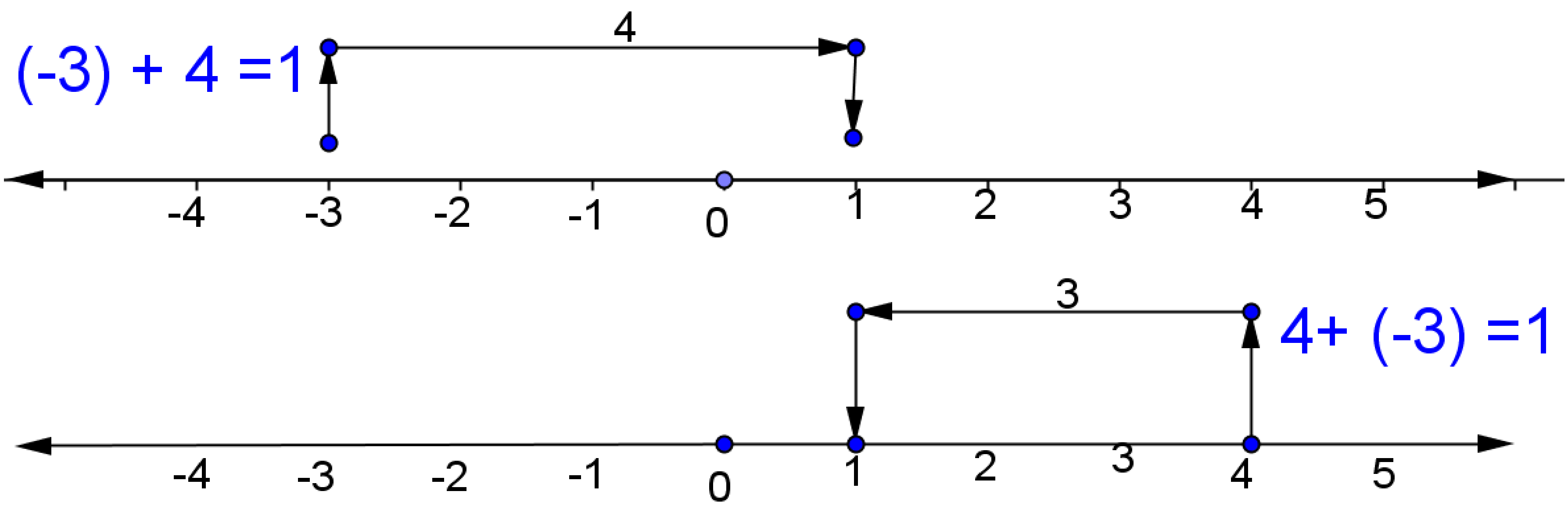
संख्यारेषेवर $\sqrt{2}$, -$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, -$\sqrt{3}$ या संख्या दाखविण्यासाठी 'पायथागोरसचे प्रमेय'वापरू या.

खालील आकृतीचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा म्हणजे रचना तुम्हाला कळेल.



वास्तव संख्यांवरील काही क्रिया व गुणधर्म:

बेरीज

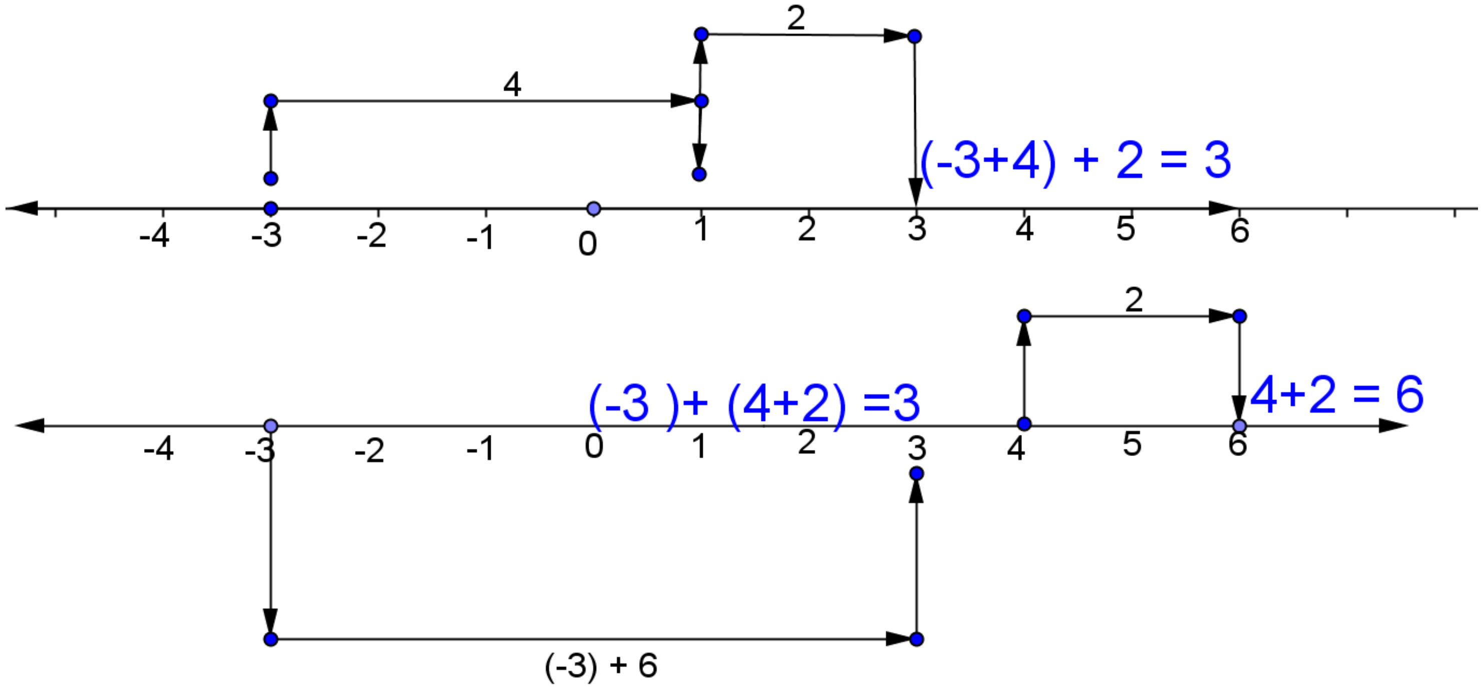


या आकृतीचे निरीक्षण करा. यामधून बेरजेचा कोणता गुणधर्म कळतो?

(-3) + (4) = 4 + (-3) या बेरजांची उत्तरे समान आहेत. बेरीज करताना संख्यांच्या क्रमाला महत्व नसते.यातून बेरजेची क्रमनिरपेक्षता हा गुणधर्म कळतो.

(a +b) = (b +a)

बेरीज



वरील आकृतीत, प्रथम (-3+4) =1 ही बेरीज करून त्यात नंतर 2 ही संख्या मिळविली आहे. त्या बेरजेचे उत्तर = 3 आहे.

त्याच्या खालील आकृतीत प्रथम (4+2) =6 ही बेरीज (-3) मध्ये मिळविली आहे. त्या बेरजेचे ही उत्तर = 3 आहे.

म्हणजेच (-3+ 4) + 2 = (-3) + (4 + 2).

याला बेरजेचा साहचर्याचा गुणधर्म म्हणतात.

(a +b) + c = a + (b +c)

बेरीज

सर्व विद्यार्थ्यांना आवडणारी बेरीज म्हणजे दिलेल्या संख्येत 0 ही संख्या मिळविणे. कारण याचे उत्तर कधीच चुकत नाही.

$a + 0 = 0 + a = a$

कोणत्याही संख्येत 0 मिळविल्यास किंवा 0 मध्ये कोणतीही संख्या मिळविल्यास त्या संख्येमध्ये काहीही बदल होत नाही.

यामुळे 0 ला 'बेरजेचा अविकारक'म्हणतात.

दोन विरूध्द संख्यांची बेरीज = 0 या बेरजेच्या अविकारकाएवढीच येत असल्यामुळे त्यांना परस्परांच्या 'बेरीज व्यस्त' संख्यासुध्दा म्हणतात.

वजाबाकीचा अर्थ व गुणधर्म

वजाबाकीला बेरजेची विरूध्द क्रिया म्हणतात. हे तुम्हाला माहित आहे का? नसेल तर पुढे दिलेली उदाहरणे पहा व कारण शोधण्याचा प्रयत्न करा.

1) 10 – 4 = 6 व 2)10 + (- 4) = 6 ∴ 10 – 4 = 10 + (- 4)

3) -23 – 39 = -62 व(-23) + (-39) = -62 ∴ -23 – 39 = (-23)+ (-39)

यांवरून असे दिसते की,

a मधून b ही कोणतीही संख्या वजा करणे म्हणजेच bची विरूध्द संख्या(- b) ही a मध्ये मिळविणे.यामुळे वजाबाकीला बेरजेची विरूध्द क्रिया म्हणतात

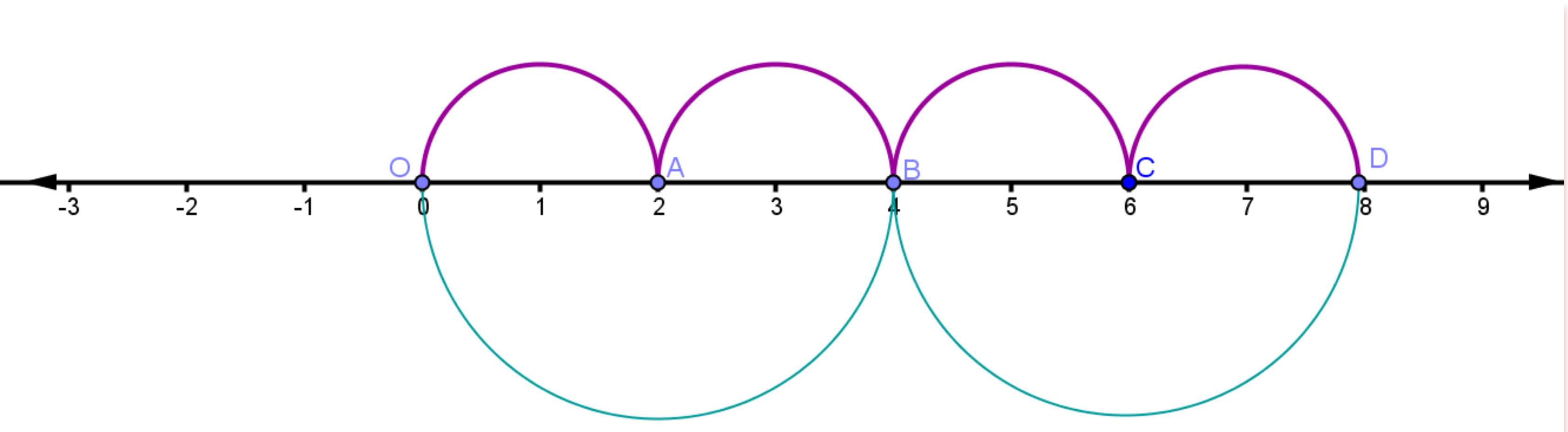
दोन संख्यांची बेरीज करताना त्यांच्या क्रमाला महत्व नसते हे आपण पाहिले. दोन संख्यांची वजाबाकी अशीच क्रमनिरपेक्ष असते काय? हे तुम्ही पडताळून पहा. त्यासाठी पुढील रिकाम्या जागा भरा.

1) 3 - 5 = …… 2) 5 – 3 = …..

ही उत्तरे समान ……….. म्हणून वजाबाकी ही क्रिया क्रमनिरपेक्ष ……..

गुणाकार व त्याचे गुणधर्म

प्राथमिक शाळेत जेव्हा तुम्ही दोन संख्यांचा गुणाकार म्हणजे काय? याचा बेरजेशी काय संबंध असतो?
हे शिकलात .त्यावरून नैसर्गिक संख्यांचे पाढे तुम्ही शिकला आहात'
पण जर आता आठवत नसेल तर पुढील उदाहरणे पहा.



2 × 4 म्हणजे 2 मध्ये 2 हीच संख्या 4 वेळा मिळविणे. 2+2 +2 +2 =8
नैसर्गिक संख्यांच्या गुणाकाराचा हा अर्थ असतो.
वरील आकृतीत संख्यारेषेच्या वर हे दाखविले आहे.उत्तर = 8 हे सगळयांना माहित आहे.
क्रम बदलून 4 × 2 = 4 +4 = 8
वरील आकृतीत संख्यारेषेच्या खाली हे दाखविले आहे.
यातून गुणाकाराचा जो गुणधर्म कळतो त्याला काय म्हणतात?

1.याला गुणाकाराचा क्रमनिरपेक्षता गुणधर्म म्हणतात.
चिन्हात: $a \times b = \quad b \times a$

2.बेरजेप्रमाणे पुढील तीन संख्या घेऊन गुणाकार क्रियेच्याबाबत साहचर्याचा गुणधर्म सत्य असतो का ते पडताळून पहा.
$a = 14$, $b = -3$, $c = ½$

i) a × (b × c) = 14 × (…. × ….) = 14 × (…..) = 14 × … = ….

ii) (a × b) × c = (14 × ….) × ½ = (…….) × ½ =…….

iii) a × (b × c) व (a × b) × c यांच्यामध्ये = किंवा ≠ यांपैकी योग्य चिन्ह भरा.

दोन मोठ्या नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार तुम्ही शिकला आहात.त्यामध्ये आपण गुणाकाराचा एक अत्यंत महत्वाचा गुणधर्म वापरत असतो.
(547 × 92) हा गुणाकार तुम्ही आत्ता एका कागदावर किंवा पाटीवर करा.

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times\ 92 \\ \hline 108 \\ +\ 4860 \\ \hline 4968 \end{array}$$

पायरी 1 : प्रथम 92 च्या एकक स्थानच्या 2 ने
54 ला गुणलेत.

पायरी 2 : नंतर 92 च्या दशक स्थानच्या 9 ने
54 ला गुणलेत.

पण एकक स्थानी 0 का लिहिले?
माहित आहे का?

पायरी 3 : मिळालेल्या वरील दोन
गुणाकारांची बेरीज केलीत.

उत्तर बरोबर आहे, रीतही बरोबर आहे.
पण आता कारणही समजावून घ्या

गुणाकाराचे बेरजेवर वितरण

1) आपण येथे 92 = 90 +2 हा दशमान संख्यांचा अर्थ उपयोगात आणतो हे लक्षात घ्या .

2) $54 \times 92 = 54 (90 + 2) = (54 \times 90) + (54 \times 2)$

$= [(54 \times 9) \times 10] + (54 \times 2)$

या पायरीत 54 × 9 ला 10 ने गुणावयाचे असते त्यामुळे आपण प्रथम 0 लिहितो व नंतर 9 ने गुणतो.

येथे गुणाकाराचे उत्तर शोधताना बेरीज ही क्रियासुध्दा करावी लागते.

या गुणाधर्माला गुणाकाराचे बेरजेवर वितरण असे म्हणतात.

$a (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

हा गुणधर्म आपण बीजगणितामध्येही कसा वापरतो यावर विचार करा.

T2_L10_A3

गुणाकाराचा अर्थ व गुणधर्म

1) दिलेल्या संख्येला कोणत्या संख्येने गुणल्यास दिलेली संख्या बदलत नाही?
त्यामुळे गुणाकाराचा अविकारक कोणता?

2) कोणतीही शून्येतर संख्या घ्या. तिला अशा संख्येने गुणा की,गुणाकाराचे उत्तर
गुणाकार - अविकारकाएवढे मिळेल.
या दोन संख्यांना परस्परांचे गुणाकार व्यस्त म्हणतात.
यावर विचार करून पुढील प्रश्नांची उत्तरे ठरवा.
a) धन संख्येची गुणाकार-व्यस्त संख्या कोणत्या प्रकारची संख्या असते?
b) धन संख्येची गुणाकार-व्यस्त संख्या कोणत्या प्रकारची संख्या असते?
c) 0 ला गुणाकार व्यस्त का नसतो?

0 चा गुणाकार गुणधर्म

0 ला कोणत्याही संख्येने गुणल्यास उत्तर = 0 मिळते.
यावरून आपण असेही निश्चितपणे ठरवू शकतो की,
जर दोन संख्यांचा गुणाकार = 0 असेल तर त्यांपैकी एकतरी संख्या = 0 असतेच.

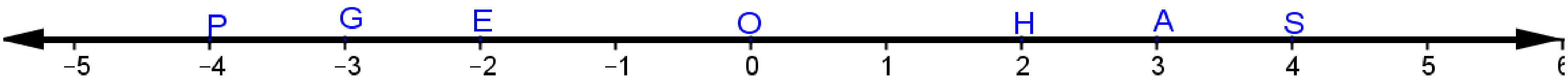
भागाकाराचा अर्थ व त्याचे गुणधर्म

जो संबंध बेरीज व वजाबाकीमध्ये असतो असे आपण पाहिले तोच संबंध गुणाकार व भागाकार यांमध्ये असतो असे सांगितले तर तुम्हाला a ला b ने भागणे म्हणजे काय हे सांगता येईल का? (b ≠ 0)

बरोबर आहे की, भागाकार ही गुणाकाराची व्यस्त क्रिया आहे.
a ला b ने भागणे म्हणजे a ला b च्या गुणाकार-व्यस्त $\frac{1}{b}$ ने गुणणे.हा भागाकाराचा अर्थ आहे.
0 ला गुणाकार-व्यस्त नसतो. म्हणजेच 1/0 अशी संख्या नसते.
त्यामुळे a ला b ने भागणे यासाठी(b ≠ 0) ही अट आवश्यक असते.
म्हणून 0 ने भागणे अर्थहीन असते असेही तुमच्या वाचनात येईल.

गुणाकाराप्रमाणेच i) दोन धन संख्यांचा भागाकारही धन असतो.
ii) एक धन व एक ऋण संख्या यांचा भागाकार ऋण असतो.
iii) दोन ऋण संख्यांचा भागाकारही धन असतो.
iv) विरुध्द सख्यांचा भागाकार = -1

वास्तव संख्येचे केवलमूल्य



बिंदूचे आरंभबिंदूपासूनचे अंतर म्हणजेच त्याच्या निर्देशक-संख्येचे केवलमूल्य असेल तर वरील आकृतीच्या सहाय्याने सारणी पूर्ण करा

बिंदूचेनाव	निर्देशक	आरंभबिंदूपासून अंतर	निर्देशक-संख्येचे केवलमूल्य
S			
P			
A			
G			
E			
H			
O			

कोणत्याही वास्तव संख्येचे केवलमूल्य लिहिण्यासाठी ती संख्या दोन उभ्या रेघांमध्ये लिहितात.
समजा, ती संख्या x आहे. तिचे केवलमूल्य $|x|$ ने दाखवितात.
आता तुम्ही पूर्णकेलेल्या सारणीवरून केवलमूल्यांच्या किंमती चिन्ह वापरून लिहा.

1. $|4| = \cdots$
2. $|-4|$ = ...
3. $|3|$ = ...
4. $|-3|$ = ...
5. $|2|$ = ...
6. $|-2|$ = ...
7. $|0| =$ ....

या किंमतींवरून वास्तव संख्येचे केवलमूल्याच्या किंमतीबद्दलचे निष्कर्ष तयार करा.

1. कोणकोणत्या प्रकारच्या संख्यांची केवलमूल्ये त्या संख्यांशीच समान असतात?

2. कोणत्या प्रकारच्या संख्येचे केवलमूल्य तिची विरुध्द संख्या असते?

3. कोणत्याही वास्तव संख्येचे केवलमूल्य कोणत्या प्रकारची संख्या **नसते**?

4. जर दोन संख्यांच्या वास्तव संख्यांच्या केवलमूल्यांच्या किंमती समान असतील तर त्या संख्यांमधील संबंध काय असतो?

उत्तरे:

1. $|4| = 4$
2. $|-4| = 4$
3. $|3| = 3$
4. $|-3| = 3$
5. $|2| = 2$
6. $|-2| = 2.$
7. $|0| = 0$

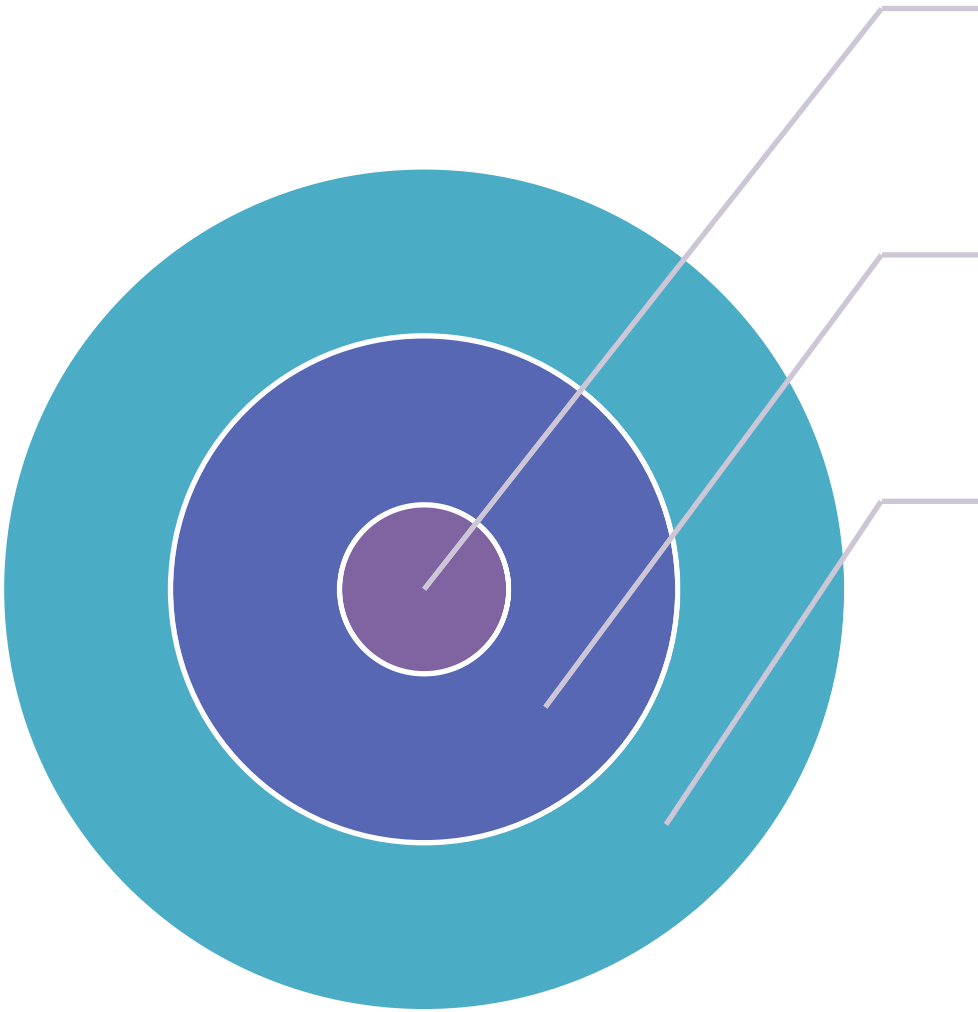
1. कोणकोणत्या प्रकारच्या संख्यांची केवलमूल्ये त्या संख्यांशीच समान असतात?
   धन संख्येचे केवलमूल्य तीच संख्या असते. $\left|\frac{6}{5}\right| = \frac{6}{5}$, $\left|\frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3}$
   तसेच 0 चे केवलमूल्य =0
2. कोणत्या प्रकारच्या संख्येचे केवलमूल्य तिची विरुध्द संख्या असते?
   ऋण संख्येचे केवलमूल्य = तिची विरुध्द संख्या असते.
   $\left|\frac{-4}{7}\right| = \frac{4}{7}$, $|-12| = 12$, $|-7.4| = 7.4$
3. कोणत्याही वास्तव संख्येचे केवलमूल्य कोणत्या प्रकारची संख्या **नसते**?
   कोणत्याही वास्तव संख्येचे केवलमूल्य ऋण नसते.(ऋणेतर असते.)
4. जर दोन संख्यांच्या वास्तव संख्यांच्या केवलमूल्यांच्या किंमती समान असतील तर त्या संख्यांमधील संबंध काय असतो?
   जर दोन संख्यांच्या वास्तव संख्यांच्या केवलमूल्यांच्या किंमती समान असतील तर त्या संख्या परस्परांच्या विरुध्द संख्या असतात.
   जर $|x| = 5.3$ असेल तर x= 5.3 किंवा x = -5.3
5. जर $|x| = 0$ असेल तर x = 0

काही नैसर्गिक संख्यांचे काही घात :

T2_L12

संख्या	2	3	4	5	6	7	8	9
वर्ग	4	9	16	25	36	49	64	81
घन	8	27	64	125	216	343	512	729
चतुर्थ घात	16	81	256	625				
पाचवा घात	32	243	1024	3125				
सहावा घात	64	729						
सातवा घात	128							
आठवा घात	256							
नववा घात	512							
दहावा घात	1024							

दिलेली संख्या करणी आहे का?



a चे n वे मूळ ही अपरिमेय संख्या आहे का ते बघा.

उत्तर हो असल्यासच a चे n वे मूळ करणी आहे असे ठरवा.

n ही 1 पेक्षा मोठी नैसर्गिक संख्या आहे का?उत्तर हो असल्यासच पुढे जा.

करणीस्थ संख्या धन परिमेय आहे का? उत्तर हो असल्यासच पुढे जा.

वरील पध्द्तीचा उपयोग करून पुढील संख्या करणी आहेत का ते ठरवा.

$\sqrt{5}$ ही करणी आहे का ते ठरवा.

I) येथे a=5 ही करणीस्थ संख्या धन परिमेय आहे. (पहिली अट पूर्ण)

II) वर्गमूळ म्हणजे n=2 असून ती नैसर्गिक संख्या आहे. (दुसरी अट पूर्ण)

III) 5 हा पूर्ण वर्ग नाही.

$\therefore \sqrt{5}$ ही अपरिमेय संख्या आहे. (तिसरी अट पूर्ण)

$\therefore \sqrt{5}$ ही करणी आहे.तिची कोटी = 2

$\sqrt[3]{343}$ ही करणी आहे का?

I) येथे a = 343 ही करणीस्थ संख्या धन परिमेय आहे. (पहिली अट पूर्ण)

II) घनमूळ म्हणजे n = 3 असून ती नैसर्गिक संख्या आहे. (दुसरी अट पूर्ण)

III) 343 हा पूर्ण घन आहे. 7^3= 343

$\therefore \sqrt[3]{343}$ = 7 ही परिमेय संख्या आहे..

तिसरी अट पूर्ण झाली नाही. $\therefore \sqrt[3]{343}$ ही करणी नाही.

3) $\sqrt[5]{-81}$ ही करणी आहे का?

येथे a = -81 ही करणीस्थ संख्या ऋण असल्याने पहिलीच अट पूर्ण होत नाही.
$\therefore \sqrt[5]{-81}$ ही करणी नाही.

4) $\sqrt[3]{\sqrt{6}}$ही करणी आहे का?

येथे a = 6 ही धन परिमेय संख्या आहे. (पहिली अट पूर्ण)

येथे वर्गमूळाचे घनमूळ असल्याने n = 3 नसून

n =3×2 = 6 आहे. ही नैसर्गिक संख्या आहे. (दुसरी अट पूर्ण)

दिलेली संख्या $\sqrt[3]{\sqrt{6}} = \sqrt[6]{6}$आहे. लक्षात घ्या की, 6 हा कोणात्याही परिमेय संख्येचा सहावा घात नाही.

$\therefore \sqrt[6]{6}$ ही अपरिमेय संख्या आहे. (तिसरी अट पूर्ण)

$\sqrt[3]{\sqrt{6}}$ म्हणजेच $\sqrt[6]{6}$ ही करणी आहे. तिची कोटी =6

करणींचे नियम:

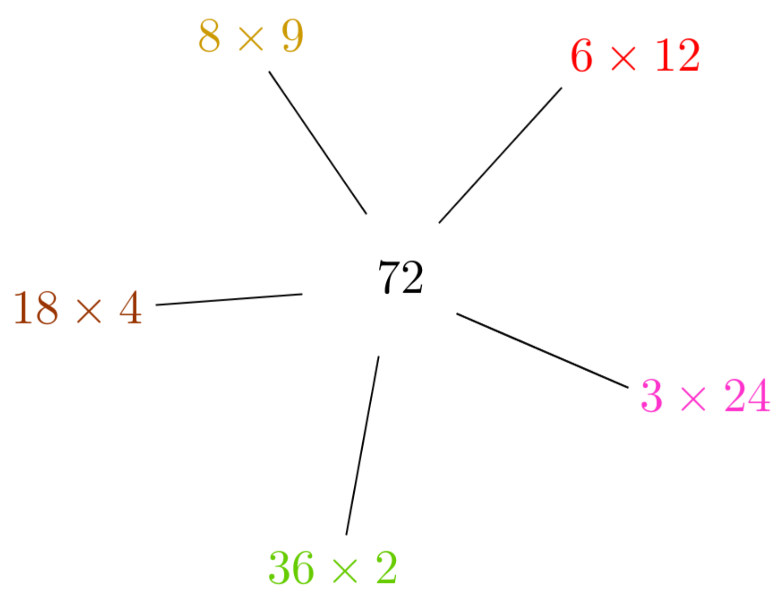
जर ‘a’ आणि ‘b’ या कोणत्याही दोन धन परिमेय संख्या असतील व ‘m’,’n’ या 1 खेरीज कोणत्याही नैसर्गिक संख्या असतील तर करणींचे खालील नियम सत्य असतात.

करणींचे नियम	उदाहरण
1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$	$(\sqrt[7]{5})^7 = 5$
2) $\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[5]{25} \,.\, \sqrt[5]{25} = \sqrt[5]{25 \times 25} = \sqrt[5]{625}$
3) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[4]{\frac{2}{7}}$
4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[2]{\sqrt[3]{46}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{46}} = \sqrt[2\times3]{46} = \sqrt[6]{46}$
5) $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$	$\sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5\times3]{3^{2\times3}} = \sqrt[15]{3^6} = \sqrt[15]{729}$

करणीचे सोपे रूप

$\sqrt{72}$ या करणीला असे रूप द्यायचे आहे की, नंतर मिळणाऱ्या करणीस्थ संख्येचा 1 खेरीज इतर कोणताही अवयव पूर्ण वर्ग असणार नाही.

त्यासाठी 72 च्या अवयवयांच्या जोड्यांचा विचार केला पाहिजे.



$\sqrt{72}$ ला सोपे रूप देण्यासाठी कोणती जोडी निवडाल?

3 × 24 किंवा 6 × 12 तर नक्कीच नाही कारण ह्या अवयवांपैकी कोणतीच संख्या पूर्ण वर्ग नाही.

समजा, $\sqrt{72} = \sqrt{9 \times 8}$ अशी फोड केली तर?

$\sqrt{72} = \sqrt{9} \times \sqrt{8} = 3\sqrt{8}$ ……….(I) याला करणीचे सोपे रूप म्हणता येईल का?

करणीस्थ संख्या = 8 आहे.

8 च्या अवयवात पूर्ण वर्ग असलेला अवयव आहे का?

असा विचार केला तर काय आढळते?

8 = 4 × 2

$\therefore \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2}$

$= \sqrt{4} \times \sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2}$

त्यामुळे $\sqrt{72} = 3\sqrt{8}$ ………….(I) वरून

$= 3\sqrt{4 \times 2} = 3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ हे सोपे रूप मिळते.

जर एखाद्याने 72 चे अवयव 4 × 18 ही जोडी निवडली तर?

$\sqrt{72} = \sqrt{4 \times 18}$

$= \sqrt{4} \times \sqrt{18}$

$= 2 \times \sqrt{18}$ ....(I)

हे सोपे रूप आहे का? कारण शोधा. $\sqrt{18}$ बद्दल काय आढळते?

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2}$

$= \sqrt{9} \times \sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2}$ ....(II)

(I) व (II) वरून,

$\sqrt{72} = 2 \times \sqrt{18}$

$= 2 \times \sqrt{9 \times 2}$

$= 2 \times 3\sqrt{2}$

$= 6\sqrt{2}$

या दोन प्रकारांच्याऐवजी प्रथमच कोणती जोडी निवडली असती तर एकाच पायरीत सोपे रूप मिळाले असते?

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2}$

$= \sqrt{36} \times \sqrt{2}$

$= 6\sqrt{2}$

असाच विचार करून $\sqrt{24}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{300}$ या करणींची सोपी रूपे पुढे दिलेल्या चौकटीमध्ये योग्य प्रकारे लिहून उत्तर मिळवा.

$\sqrt{24} = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$

$\sqrt{48} = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$

$\sqrt{300} = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$

$\sqrt[3]{54}$ ला सोपे रूप देण्यासाठी 54 चा पूर्ण घन असलेला असा एक अवयव शोधा की दुसऱ्या अवयवाचा कोणताही अवयव पूर्ण घन नसेल .

पुढे दिलेल्या चौकटीत योग्य प्रकारे लिहून उत्तर मिळवा.

$\sqrt[3]{54} = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$

$\sqrt[3]{40} = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$

$\sqrt[3]{375} = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$

करणींचे प्रकार

1) शुध्द करणी:

$\sqrt{12}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{675}$ अशा स्वरुपाच्या करणींना शुध्द करणी म्हणतात.

2) मिश्र करणी:

पुढील उदाहरणे पाहिलीत की, मिश्र करणी म्हणजे काय ते सहज कळेल.

$-3\times\sqrt{5}$, $5\times\sqrt[3]{6}$, $\frac{9}{2}\sqrt[5]{3}$ या सर्व मिश्र करणी आहेत.

$\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\times\sqrt{3}$ असे शुध्द करणीला मिश्र करणीचे रुप देता येते तर बरोब्बर याच्या विरुध्द प्रकारे मिश्र करणीला शुध्द करणीचे रुप देता येते.

$6\sqrt[3]{2}$ या मिश्र करणीला शुध्द करणीचे रुप कसे देता येईल यावर विचार करा.

उत्तर: येथे 6 हा सहगुणक किंमत न बदलता घनमूळाच्या पध्दतीत कसा लिहिता येईल तर $6 = \sqrt[3]{6^3} = \sqrt[3]{216}$

$\therefore 6\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{216\times 2} = \sqrt[3]{432}$

करणींचा लहानमोठेपणा ठरविणे

T2_L13_A4

करणींची तुलना:

दोन करणींची कोटी समान असेल, तर करणीस्थ संख्यांवरून त्या

करणीतील लहान- मोठेपणा आपल्याला ठरविता येतो.

$\sqrt[n]{a}$ आणि $\sqrt[n]{b}$ या दोन करणींची तुलना खालीलप्रमाणे करतात.

1) जेव्हा a = b तेव्हा $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$

T2_L13_A4

2) उदा. $\sqrt[3]{21}$, $\sqrt[3]{19}$

पहिल्या करणीतील करणीस्थ संख्या 21 (धन परिमेय) असून त्याची कोटी 3 आहे.

दुसऱ्या करणीतील करणीस्थ संख्या 19 (धन परिमेय) असून त्याची कोटी 3 आहे.

दोन्ही करणींची कोटी समान आहे.

करणीस्थ संख्यांची तुलना करू.

$$21 > 19$$

$$\therefore \sqrt[3]{21} > \sqrt[3]{19}$$

$\therefore$ जेव्हा a > b तेव्हा $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

3) उदा. $\sqrt[7]{26}$, $\sqrt[7]{31}$

पहिल्या करणीतील करणीस्थ संख्या 26 असून त्याची कोटी 7 आहे.

दुसऱ्या करणीतील करणीस्थ संख्या 31 असून त्याची कोटी 7 आहे.

दोन्ही करणींची कोटी समान आहे.

करणीस्थ संख्यांची तुलना करू.

$26 < 31$

$$\therefore \sqrt[7]{26} < \sqrt[7]{31}$$

T2_L13_A5

2) खालील प्रश्नांच्या आधारे करणींची तुलना करा. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$

i) $\sqrt{3}$ करणीतील करणीस्थ संख्या कोणती आहे?

After click

उत्तर: i) $\sqrt{3}$ करणीतील करणीस्थ संख्या 3 आहे.

ii) $\sqrt{3}$ करणीची कोटी किती आहे? म्हणजेच घातांक किती ?

After click

उत्तर: ii) $\sqrt{3}$ करणीची कोटी 2 आहे. घातांक $\frac{1}{2}$ आहे.

iii) $\sqrt[3]{5}$ करणीतील करणीस्थ संख्या कोणती आहे?

After click

उत्तर: iii) $\sqrt[3]{5}$ करणीतील करणीतील करणीस्थ संख्या 5 आहे.

iv) $\sqrt[3]{5}$ करणीची कोटी किती आहे? म्हणजेच घातांक किती?

After click

उत्तर: iv) $\sqrt[3]{5}$ करणीची कोटी 3 आहे. घातांक $\frac{1}{3}$ आहे.

T2_L13_A5

v) दोन्ही करणींची कोटी समान आहेत का?

After click

उत्तर: v) नाही. दोन्ही करणींची कोटी असमान आहे.

vi) $\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{3}$ यांची तुलना करण्यासाठी त्यांना समच्छेद रूप कसे देतात?

After click

उत्तर: vi) त्यांचा छेदांचा ल.सा. वि. काढतात. येथे 2 व 3 चा ल.सा. वि. = 6

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \quad \therefore \sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \because a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

व $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \quad \therefore \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \quad \ldots\ldots\ldots . \because a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

vii)मिळालेल्या दोन्ही करणीतील करणीस्थ संख्यांवरून संख्यांची तुलना करा.

After click

उत्तर: vii) 27 > 25

viii) त्यावरून करणींमधील लहान मोठेपणा ठरवा.

After click

उत्तर: viii) $\sqrt[6]{27} > \sqrt[6]{25}$

म्हणजेच, $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$

पुढील करणी चढत्या क्रमाने लिहिण्यासाठी पुढील रिकाम्या जागा भरा. **T2_L13_A5**

i) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{5}$

i) $\sqrt{2}$ या करणीतील करणीस्थ संख्या ....आहे.

ii) $\sqrt{2}$ या करणीची कोटी ....आहे. म्हणजेच 2 चा घातांक = ...

iii) $\sqrt[3]{6}$ या करणीतील करणीस्थ संख्या ....आहे.

iv) $\sqrt[3]{6}$ या करणीची कोटी ....आहे. म्हणजेच 6 चा घातांक = ...

v) $\sqrt[4]{5}$ या करणीतील करणीस्थ संख्या ....आहे.

vi) $\sqrt[4]{5}$ या करणीची कोटी ....आहे. म्हणजेच 5 चा घातांक = ...

vii) तीनही करणींच्या कोटी .... आहेत. (समान की असमान?)

viii) करणींची तुलना करण्यासाठी करणींची कोटी .... करून घेऊ.

T2_L13_A5

viii) $\sqrt{2} = (2)^{\cdots\cdots}$ ix) $\sqrt[3]{6} = (6)^{\cdots\cdots}$ x) $\sqrt[4]{5} = (5)^{\cdots\cdots}$

xi) विधान (viii), (ix) व (x) वरून,

$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}, \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}, \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$ याअपूर्णांकांचे छेद असमान आहेत, छेद समान करण्यासाठी आपण छेदांचा ल.सा. वि. काढू.

xii) 2, 3 व 4 चा ल.सा. वि. ....आहे.

xiii) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{5}$ करणींची कोटी ....करून घेऊ.

xiv) प्रत्येक धन परिमेय संख्या = तिच्या n व्या घाताचे n वे मूळ असते हा करणींचा गुणधर्म आहे.

$$\sqrt{2} = \sqrt{\sqrt[6]{2^6}} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{\cdots\ .} \quad \text{.........(i)} \quad .$$

$$\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{6^4}} = \sqrt[12]{\cdots\ .\ .} \quad \text{..............(ii)}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^3}} = \sqrt[12]{\cdots\ \cdots} \quad \text{..............(iii)}$$

तीनही करणींची कोटी ....झाली आहे. यांतील ....संख्यांची तुलना करू.

.... < ....< ....

∴ .... < .... < ....

दिलेल्या करणींची चढत्या क्रमाने मांडणी पुढीलप्रमाणे होईल.

.......< ....< ....

उत्तर:

i) $\sqrt{2}$ या करणीची करणीस्थ संख्या 2 आहे.

ii) $\sqrt{2}$ या करणीची कोटी 2 आहे. म्हणजेच 2 चा घातांक = $\frac{1}{2}$

iii) $\sqrt[3]{6}$ या करणीची करणीस्थ संख्या 6 आहे.

iv) $\sqrt[3]{6}$ या करणीची कोटी 3 आहे. म्हणजेच 6 चा घातांक = $\frac{1}{3}$

v) $\sqrt[4]{5}$ या करणीची करणीस्थ संख्या 5 आहे.

vi) $\sqrt[4]{5}$ या करणीची कोटी 4 आहे. म्हणजेच 5 चा घातांक = $\frac{1}{4}$

vii) तीनही करणींच्या कोटी असमान आहे.

viii) करणींची तुलना करण्यासाठी करणींची कोटी समान करून घेऊ.

T2_L13_A5

viii) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ ix) $\sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$ x) $\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}}$

xi) विधान (viii), (ix) व (x) वरून,

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ या अपूर्णांकांचे छेद असमान आहेत, छेद समान करण्यासाठी आपण छेदांचा ल. सा. वि. काढू.

xii) 2, 3 व 4 चा ल.सा. वि. 12 आहे.

xiii) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{5}$ करणींची कोटी 12 करून घेऊ.

xiv) प्रत्येक धन परिमेय संख्या = तिच्या n व्या घाताचे n वे मूळ असते हा करणींचा गुणधर्म आहे.

$$\sqrt{2} = \sqrt{\sqrt[6]{2^6}} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64} \text{ ....(i) .}$$

$$\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{6^4}} = \sqrt[12]{1296} \text{ ....(ii)}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^3}} = \sqrt[12]{125} \text{ ....(iii)}$$

तीनही करणींची कोटी समान झाली आहे. यांतील करणीस्थ संख्यांची तुलना करू.

$64 < 125 < 1296$

$\therefore \sqrt[12]{64} < \sqrt[12]{125} < \sqrt[12]{1296}$

दिलेल्या करणींची चढत्या क्रमाने मांडणी पुढीलप्रमाणे होईल.

$\sqrt{2} < \sqrt[3]{6} < \sqrt[4]{5}$

सजातीय करणी:

दोन किंवा अधिक करणींना सोपे रूप दिल्यानंतर समान अपरिमेय संख्या मिळत असेल, तर अशा करणींना **सजातीय करणी** म्हणतात.

उदा. $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$ या सजातीय करणी आहेत का? ते ठरवा.

→ i) $\sqrt{18}$ करणीला सोपे रूप देऊ.

$\therefore \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2}$

$\therefore \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

ii) $\sqrt{50}$ करणीला सोपे रूप देऊ.

$\therefore \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2}$

$\therefore \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

विधान (i) व (ii) वरून $\sqrt{18}$ व $\sqrt{50}$ या करणींना सोपे रूप दिल्यानंतर ' $\sqrt{2}$ ' ही समान अपरिमेय संख्या मिळाली.

$\therefore$ $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$ या **सजातीय करणी** आहेत.

$\sqrt[3]{5}$ व $\sqrt{5}$ यांना सजातीय करणी म्हणू शकतो का?

T2_L13_A6

After click

उत्तर: $\sqrt[3]{5}$ व $\sqrt{5}$ या करणीतील करणीस्थ संख्या समान आहे.

पण दोन्ही करणींची कोटी समान नाही.

$\therefore$ $\sqrt[3]{5}$ व $\sqrt{5}$ या सजातीय करणी नाहीत.

यावरून,

सजातीय करणी (व्याख्या):

जर p आणि q या शून्येतर परिमेय संख्या असतील, तर (p.$\sqrt[n]{a}$) आणि (q. $\sqrt[n]{a}$) या प्रकारच्या करणींना सजातीय करणी म्हणतात.

करणींवरील क्रिया:

वास्तव संख्यांवर बेरीज आणि वजाबाकी करण्याची क्रिया आपल्याला माहित आहे.

करणी ही अपरिमेय संख्या म्हणजेच वास्तव संख्या असल्याने तिची बेरीज किंवा वजाबाकी करता येते. तिची बेरीज किंवा वजाबाकी करून मिळणारी संख्या ही वास्तव संख्या असते.

फक्त सजातीय करणींचीच बेरीज किंवा वजाबाकी करता येते.

करणींची बेरीज

उदा. $(\sqrt{18} + \sqrt{50})$

दोन्ही करणींची कोटी 2 आहे.

दोन्ही करणींची कोटी समान आहे.

दोन्ही करणींना सोपे रूप देऊन,

$\therefore (\sqrt{18} + \sqrt{50}) = (\sqrt{9 \times 2} + \sqrt{25 \times 2})$

$= (3\sqrt{2} + 5\sqrt{2})$ ......सजातीय करणी

$= (3 + 5)\sqrt{2}$

$= 8\sqrt{2}$

आता $[3\sqrt{5} + 2\sqrt{45}]$ या करणींची बेरीज वरील रीत वापरून करा.

After click

उत्तर: $[3\sqrt{5} + 2\sqrt{45}] = 9 \times \sqrt{5}$

करणींची वजाबाकी:

T2_L14_A2

करणींची वजाबाकी करताना करणींना अगोदर सोपे रूप देऊन नंतर त्यांची वजाबाकी करतात.

करणींच्या बेरेजेप्रमाणेच त्यांची वजाबाकीची क्रियाही केली जाते.

उदा. $3\sqrt{8} - 5\sqrt{2}$

➡ i) दिलेल्या दोन्ही करणींची कोटी 2 आहे.

दोन्ही करणींची कोटी समान आहे.

दोन्ही करणींना सोपे रूप देऊ व त्या सजातीय करणी आहेत का ते पाहू.

$$\therefore 3\sqrt{8} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{4 \times 2} - 5\sqrt{2}$$

$$= 3 \times 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

$$= 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$ ....सजातीय करणी

$$=(6 - 5)\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}$$

आता [$7\sqrt{48} - \sqrt{75}$] या करणींची वजाबाकी वरील रीत वापरून करा.

उत्तर: $23\sqrt{3}$

करणींचा गुणाकार :

करणींचे नियम वापरून करणींचा गुणाकार, भागाकार करता येतो.

दिलेल्या करणींचा गुणाकार किंवा भागाकार करण्यासाठी , त्या करणीची कोटी समान नसेल तर प्रथम त्या करणीची कोटी समान करून घेणे जरूरीचे असते.

करणींचा गुणाकार: नमुना पहिला (करणींची कोटी समान)

T2_L14_A3_F1

1) i) करणींची कोटी समान असताना करणींचा गुणाकार:

उदा. $\sqrt[4]{13}$, $\sqrt[4]{21}$

$\sqrt[4]{13}$ या करणीची कोटी 4 आहे. ....(i)

$\sqrt[4]{13} = (13)^{\frac{1}{4}}$

$\sqrt[4]{21}$ या करणीची कोटी 4 आहे. ....(ii)

$\sqrt[4]{21} = (21)^{\frac{1}{4}}$

विधान (i) व (ii) वरून,

दोन्ही करणींची कोटी समान आहे.

∴ करणींचा पुढील नियम वापरून दोन्ही करणींचा गुणाकार करू.

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\sqrt[4]{13} \cdot \sqrt[4]{21} = \sqrt[4]{13 \times 21}$

$= \sqrt[4]{273}$

($\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{4}$) करणींचा गुणाकार वरील रीत वापरून करा.

After click

उत्तर : ($\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{4}$) = $\sqrt[3]{24}$

करणींचा गुणाकार: नमुना दुसरा (करणींची कोटी असमान असताना)

T2_L14_A3_F2

2) करणींची कोटी समान नसताना (असमान असताना) करणींचा गुणाकार:

उदा. $\sqrt{3}$ आणि $\sqrt[3]{2}$ यांचा गुणाकार.

$\sqrt{3}$ करणीची कोटी 2.

$\sqrt{3} = (3)^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{2}$ करणीची कोटी 3 आहे.

$\sqrt[3]{2} = (2)^{\frac{1}{3}}$

दोन्ही करणींची कोटी असमान आहे.

करणींचा गुणाकार करण्यासाठी दोन्ही करणींची कोटी समान करून घेऊ.

छेद समान करण्यासाठी आपण छेदांचा ल. सा. वि. काढू. येथे 2 व 3 चा ल.सा. वि. 6 आहे.

दोन्ही करणींची कोटी 6 करुन घेऊ.

i) $\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt[3]{3^3}} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[6]{27}$

ii) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2}} = \sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[6]{4}$

$\therefore \sqrt{3} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{27} \times \sqrt[6]{4}$ .... विधान (i) व (ii) वरून

$= \sqrt[6]{27 \times 4}$ .... ($\because \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$)

$= \sqrt[6]{108}$

[$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt{2}$] करणींचा गुणाकार करा.

After click

उत्तर : [$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt{2}$] = $2 \times \sqrt[12]{2}$

या दोन उदाहरणांवरून दोन करणींचा गुणाकार करून मिळणारी संख्या अपरिमेय संख्याच असते असे वाटते. हे सत्य आहे का? त्यासाठी आणखी दोन उदाहरणे पहा.

1) $\sqrt[4]{8} \times \sqrt[4]{2}$

यामधील करणींची कोटी समान आहे.

$\therefore \sqrt[4]{8} \times \sqrt[4]{2}$

$= \sqrt[4]{16}$

$= \sqrt[4]{2^4}$

$= 2$ ($\because \sqrt[n]{a^n} = a$ नुसार) येथे दोन करणींचा गुणाकार 2 ही परिमेय संख्या आहे.

आणखी एक उदाहरण पाहू.

2) $\sqrt[5]{27} \times \sqrt[5]{9}$

यामधील करणींची कोटी समान आहे.

$\therefore \sqrt[5]{27} \times \sqrt[5]{9}$

$= \sqrt[5]{27 \times 9}$

$= \sqrt[5]{243}$

$= \sqrt[5]{3^5}$

$= 3$ ($\because \sqrt[n]{a^n} = a$ नुसार) येथे दोन करणींचा गुणाकार 3 ही परिमेय संख्या आहे.

वरील चार उदाहरणांवरून

दोन करणींचा गुणाकार करून मिळणारी संख्या अपरिमेय संख्याच असते असे नाही.

करणींचा भागाकार

करणींचा भागाकार: नमुना पहिला (करणींची कोटी समान)

a) $\sqrt{98} \div \sqrt{2}$

i) $\sqrt{98}$ या करणीची कोटी 2 आहे.

ii) $\sqrt{2}$ या करणीची कोटी 2 आहे.

विधान (i) व (ii) वरून, दोन्ही करणींची कोटी समान आहे.

∴ करणींचा पुढील नियम वापरून दोन्ही करणींचा भागाकार करू, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$$\sqrt{98} \div \sqrt{2} = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{98}{2}}$$
$$= \sqrt{49}$$
$$= 7$$ ही परिमेय संख्या आहे.

[$\sqrt{14} \div \sqrt{7}$] करणींचा भागाकार वरील रीत वापरून करा.

उत्तर: [$\sqrt{14} \div \sqrt{7}$] = $\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{5} \div \sqrt[4]{3}$

→ $\sqrt[3]{5}$ या करणीची कोटी 3 आहे. म्हणजेच घातांक $\frac{1}{3}$ आहे. ....(i)

$\sqrt[4]{3}$ या करणीची कोटी 4 आहे. म्हणजेच घातांक $\frac{1}{4}$ आहे. ....(ii)

विधान (i) व (ii) वरून, दोन्ही करणींची कोटी समान नाही.

करणींचा भागाकार करण्यासाठी दोन्ही करणींची कोटी समान करून घेऊ.

छेद समान करण्यासाठी आपण छेदांचा ल. सा. वि. काढू.

येथे 3 व 4 चा ल.सा. वि. 12 आहे.

दोन्ही करणींची कोटी 12 करुन घेऊ.

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{5^4}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{625}} = \sqrt[12]{625}$$ ....(iii)

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[12]{27}$$ ....(iv)

दोन्ही करणींची कोटी समान आहे.

∴ करणींचा पुढील नियम वापरून दोन्ही करणींचा भागाकार करू,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[3]{5} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{625} \div \sqrt[12]{27} = \sqrt[12]{\frac{625}{27}}$$ .....(विधान (iii) व (iv) वरून)

$(5\sqrt[3]{4} \div 4\sqrt{2}\ )$ करणींचा भागाकार वरील रीत वापरून करा.

उत्तर: $(5\sqrt[3]{4} \div 4\sqrt{2}\ ) = \frac{5}{4}\sqrt[6]{2}$

आपण सोडविलेली उदाहरणे (उत्तरासह) पुन्हा पाहू. त्यावरून दोन करणींचा भागाकार ही संख्या नेहमीच परिमेय असते की अपरिमेय ते ठरवा.

1) $\sqrt{98} \div \sqrt{2} = 7$

2) $\sqrt[3]{5} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{\frac{625}{27}}$

उत्तर: दोन करणींचा भागाकार करून मिळणारी संख्या अपरिमेय असतेच असे नाही.

करणीचे परिमेयीकरण गुणक :

वर्गात एकदा शिक्षकांनी सांगितले की, “ तुम्हाला सगळयांना माहित आहे की,

i) जर ’a’ ही धन संख्या असेल व n ही 1 खेरीज इतर कोणतीही नैसर्गिक संख्या असेल तर, $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

ii) यामुळे दोन अपरिमेय संख्यांचा गुणाकार ही नेहमी अपरिमेय संख्याच असते असे नाही.
उदाहरणार्थ, $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 = 5$ व 5 ही परिमेय संख्या आहे.

iii) आता विचार करून सांगा किंवा आकडेमोड वहीत करून ठरवा की, $\sqrt{72}$ ला कोणत्या संख्येने गुणले तर गुणाकाराचे उत्तर परिमेय संख्या मिळेल?

काही वेळाने एकेकजण शिक्षकांना आपापली वही दाखवू लागला.काहीजणांची उत्तरे बरोबर नव्हती पण ज्यांची बरोबर होती त्यांची उत्तरे वेगवेगळी होती.त्यांना फार आश्चर्य वाटले.
तेव्हा शिक्षकांनी त्यांना उत्तरे फळयावर लिहिण्यास सांगितले, वर्गातल्या बाकीच्यांनाही सगळी उत्तरे पटली,तेव्हा शिक्षक त्यांना म्हणाले की,अशी आणखी कितीतरी उत्तरे सांगता येतील पण तुम्हीच ठरवा की यांपैकी कोणती सख्या सर्वात सोईस्कर आहे?
तुम्हीसुध्दा अशा काही किंमती शोधा व निर्णय घ्या.

मुलांनी फळ्यावर लिहिलेली उत्तरे

कशाने गुणले? (गुणक)	गुणाकार	मिळालेली परिमेय संख्या
1) $\sqrt{72}$	$\sqrt{72}\times\sqrt{72}=(\sqrt{72})^2$	**72**
2) $-\sqrt{8}$	$\sqrt{72}\times(-\sqrt{8})=-\sqrt{576}=-\sqrt{24^2}$	-(24)
3) $\sqrt{32}$	$\sqrt{72}\times\sqrt{32}=\sqrt{36\times16\times2\times2}$ $=\sqrt{6^2\times4^2\times2^2}$	6× 4×2= 48
4) $\sqrt{2}$	$\sqrt{72}\times\sqrt{2}=\sqrt{36\times2\times2}=\sqrt{6^2\times2^2}$	6× 2 =12

तुम्हाला कोणती संख्या सोईची वाटते? अर्थातच $\sqrt{2}$ ना ?

सारणीतील पहिल्या स्तंभातील संख्यांना $\sqrt{72}$ चे परिमेयीकरण गुणक म्हणतात कारण त्यांनी $\sqrt{72}$ ला गुणल्यास गुणाकाराचे उत्तर परिमेय संख्या आहे.

परिमेयीकरण गुणक

एका करणीसाठी अनेक परिमेयीकरण गुणक असतात.पण त्यांपैकी सर्वात लहान गुणक हा सोईचा असतो.तो शोधण्यासाठी सोपी पध्दत म्हणजे दिलेल्या करणीचे सोपे रुप शोधणे व त्यातील करणीस्थ संख्या आणि कोटी यांवरून परिमेयीकरण गुणक ओळखणे. हे, थोडक्यात लक्षात घ्या की,

धन परिमेय संख्येच्या n व्या मुळाचा n वा घात = तीच संख्या हा गुणधर्म वापरू.

$\sqrt[3]{49}$ चा लहानात लहान परिमेयीकरण गुणक कसा शोधाल?

$\sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{7^2}$ असा विचार केलात तर वरील नियमानुसार जर आपण घनमूळातील करणीस्थ संख्येला अशा संख्येने गुणले पाहिजे की,त्यामुळे पूर्ण घन असणारी संख्या मिळेल.आत्ता करणीस्थ संख्येत घातांक 2 आहेच म्हणून आपण फक्त $\sqrt[3]{7}$ ने गुणले तर तिचे परिमेयीकरण होईल.

$\sqrt[3]{7^2}$ चा परिमेयीकरण गुणक = $\sqrt[3]{7}$ कारण त्यांचा गुणाकार = $\sqrt[3]{7^2} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

या गुणाकारावरून तुम्हाला $\sqrt[3]{7}$ चा परिमेयीकरण गुणक सांगता येईल का?

करणींच्या छेदाचे परिमेयीकरण: नमुना पहिला (छेदस्थानी एकपदी)

खालील दोन उदाहरणांचे निरीक्षण करा.
दुस-या उदाहरणात मिळणा-या नवीन संख्येच्या छेदस्थानच्या संख्येमध्ये काय बदल झालेला दिसतो?
दिलेल्या संख्येची किंमत बदलली गेली का?
त्यांमध्ये वास्तव संख्यांचा कोणता गुणधर्म वापरला आहे?

1)

$$\frac{12.612}{0.06}=\frac{12.612\times 100}{0.06\times 100}=\frac{126.12}{6}=21.02$$

2)

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{6\times\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

उदाहरण 1 मधील दिलेल्या अपूर्णांकाच्या छेदस्थानी दशांश अपूर्णांक होता. त्याच्या अंशाला व छेदाला 100 गुणले आहे. त्यामुळे छेदस्थानी पूर्णांक मिळाला.

त्याचप्रकारे,उदाहरण 2 मध्ये, दिलेल्या अपूर्णांकाच्या छेदस्थानी करणी होती.त्याच्या अंशाला व छेदाला $\sqrt{2}$ या एकाच संख्येने गुणले आहे. त्यामुळे मिळालेल्या अपूर्णांकाच्या छेदस्थानी 2 ही परिमेय संख्या आली.नंतर अंशातील 6 ला 2 ने भाग दिला व 1 ही परिमेय संख्या छेदस्थानी मिळाली.

येथे वास्तव संख्येचा पुढील गुणधर्म वापरला आहे :

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}, k \neq 0$$

दिलेल्या अपूर्णांकाच्या छेदस्थानी एखादी एकपद करणी असेल तर त्या अपूर्णांकाच्या छेदाला तसेच अंशाला छेदातील करणीच्या परिमेयीकरण गुणकाने गुणतात.. त्यामूळे छेदस्थानी परिमेय संख्या मिळते. तसेच मूळच्या संख्येची किंमत बदलत नाही.या संपूर्ण प्रक्रियेला छेदाचे परिमेयीकरण म्हणतात.

आता ही संख्या $\dfrac{6}{\sqrt{192}}$ पहा. यातील छेदाचे परिमेयीकरण करण्यासाठी

कोणत्या संख्येने गुणावे? कसे ठरविणार?

अनेकजणांना वाटते की, करणीची कोटी 2 असल्याने अंशाला व छेदाला $\sqrt{192}$ ने गुणावे. यात चूक काहीच नाही पण यापेक्षा लहान संख्या असेल तर?

पण अशी संख्या सापडणार कशी?

त्यासाठीच आपण करणीचे सोपे रुप ही संकल्पना समजावून घेतली ना?

$$\sqrt{192} = \sqrt{2\times 96}$$
$$= \sqrt{3\times 64}$$
$$= 8\sqrt{3}$$

येथे 96 हा पूर्ण वर्ग नाही.
म्हणून 3 ने भागून पाहिले तेव्हा मिळालेला दुसरा अवयव 64' हा पूर्ण वर्ग आढळला .

आता $\dfrac{6}{\sqrt{192}}$ च्या छेदाला प्रथम सोपे रुप देऊ व नंतर छेदाचे परिमेयीकरण करू.

$$\frac{6}{\sqrt{192}} = \frac{6}{\sqrt{64\times 3}} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{4}{\cancel{8}}\sqrt{3}} = \frac{3\times\sqrt{3}}{4\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{3\times\sqrt{3}}{4\times(\sqrt{3})^2} = \frac{3\times\sqrt{3}}{4\times 3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

वर्गकरणीचे व्दिपद रूप:

ज्या करणीची कोटी = 2 असते तिला वर्गीय करणी म्हणतात.

खालील उदाहरणे काळजीपूर्वक बघितलीत तर तुम्हालाच वर्गकरणीचे व्दिपद रूप कशाला म्हणावे ते सहज कळेल.

वर्गकरणीची काही व्दिपद रूपे : $(5+\sqrt{3})$, $(\frac{6}{11}-\sqrt{7})$, $(-12+\sqrt{12})$,

$(4-2\sqrt{5})$, $(x\sqrt{a}+y\sqrt{b})$

T2_L16_A1

अनुबध्द करणींची जोडी:

पुढील संख्यांचे निरीक्षण करा.

(i) $(3+\sqrt{7})$ व $(3-\sqrt{7})$, (ii) $(4-\sqrt{10})$ व $(4+\sqrt{10})$

(iii) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})$व $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})$(iv) $(-9+\sqrt{6})$ व $(-9+\sqrt{6})$

प्रत्येक जोडीतील वर्गकरणीला परस्परांची अनुबध्द करणी म्हणतात. त्यांचे रूप कोणत्या स्वरुपाचे आहे?

अनुबध्द करणींचे रूप (a +b) व (a -b) या स्वरूपातील असते.

अनुबध्द जोडीतील करणींचा गुणाकार

कोणती नित्यसमानता वापरता येईल यावर विचार करा.

सूत्र: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ नुसार,

$$(3+\sqrt{7}) \times (3 - \sqrt{7}) = (3)^2 - (\sqrt{7})^2 = 9 - 7 = 2.$$

वरील विस्तारसूत्र वापरून वरील गुणाकार करू.

2) $(4 - \sqrt{10}) \times (4+\sqrt{10}) = (4)^2 - (\sqrt{10})^2$

$= 16 - 100$

$= -84$

रिकाम्या जागा योग्य प्रकारे भरून विस्तार पूर्ण लिहा.

3) $(3\sqrt{2}+ 2\sqrt{5}) \times (3\sqrt{2}+ 2\sqrt{5}) = (\ldots\ldots\ldots)^2 - (\ldots\ldots\ldots)^2$

$= (9 \times \ldots\ldots) - (4 \times \ldots.)$

$= \ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots$

उत्तर: -2

विस्तार करा: $(-9 + \sqrt{6})$ व $(-9 - \sqrt{6})$

उत्तर: 75

अनुबध्द करणींचा गुणाकार करून मिळणारी संख्या कोणत्या प्रकारची असते हे वरील उदाहरणांवरून ठरवा. त्याचा उपयोग आपण कशासाठी करू शकू यावर विचार करा.

उत्तर:

छेदाच्या परिमेयीकरणासाठी अनुबध्द करणींचा उपयोग करता येईल.

1) छेदाचे परिमेयीकरण :

$$\frac{(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})}$$

या अपूर्णांकाच्या छेदात व्दिपद वर्गकरणी आहे. जर किंमत न बदलता या अपूर्णाकाच्या छेदाचे परिमेयीकरण करावयाचे असेल तर अंशाला व छेदाला छेदाच्या अनुबध्द जोडीतील संख्येने गुणले पाहिजे. पुढील रीत नीट अभ्यासा.

$$\frac{(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})}=\frac{(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})}\times\frac{(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})}$$

या अंशातील वर्ग विस्ताराला $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ हे सूत्र वापरा व छेदासाठी $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ हे सूत्र वापरा व राशीला सोपे रूप द्या.

उत्तर:

$$\therefore \quad \frac{(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})}=\frac{(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})}\times\frac{(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2^{2})-(\sqrt{3})^2} = \frac{(2)^2+2(2\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{4-3}$$

$$=\left(\frac{4+4\sqrt{3}+3}{1}\right) = 7+4\sqrt{3}$$

2. छेदाचे परिमेयीकरण करा:

(जर छेदस्थानी तीन पदे असतील तर काय कराल?)

$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{11}}$ यामध्ये छेदस्थानी तीन पदे आहेत आणि आपल्याला वर्ग करणीचे

द्विपद रूप असेल तरच त्याची अनुबध्द जोडी शोधता येते. मग आपण यातूनअसा मार्ग काढू शकतो की,यातील सोईस्कर अशी दोन पदे एकत्र घेऊन उरलेले पद स्वतंत्र ठेऊ.

$(\sqrt{6}+\sqrt{5}) - (\sqrt{11})$

आता याची अनुबध्द जोडी = $(\sqrt{6}+\sqrt{5}) + (\sqrt{11})$ ही संख्या आहे.

$\therefore$ या राशीने अंशाला व छेदाला गुणून सोपे रूप द्या.

T2_L16_A1_F1

$$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{11}}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)-\sqrt{11}} \times \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{5})+\sqrt{11})}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{11}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{11}}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{11})^2} = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{11}}{(\sqrt{6})^2+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2)-(\sqrt{11})^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{11}}{6+2\times\sqrt{30}+(5)-11} = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{11}}{2\sqrt{30}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{11}}{2\sqrt{30}} \times \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{30}}$$

T2_L16_A1_F1

$$= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{5\,)}+\sqrt{11})\times\sqrt{30)}}{2\times30}$$

$$= \frac{(\sqrt{180}+\sqrt{150}-\sqrt{330)}}{60}$$

$$= \frac{(\sqrt{36\times5}+\sqrt{25\times6}-\sqrt{330}}{60}$$

$$= \frac{6\sqrt{5}+5\sqrt{6}-\sqrt{330}}{60}$$

वर्ग विस्तार सूत्रे.

T2_L16_A2

1) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 2) $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

पुढील सारणीचे नीट निरीक्षण करा.

$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$	$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$
$= (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{3}.\sqrt{2})$	$= (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{3}.\sqrt{2})$
$=(3 + 2) + 2\sqrt{6}$	$=(3 + 2) - 2\sqrt{6}$
येथे $6 = 3 \times 2$	$= 5 - 2\sqrt{6}$
$5 = 3 + 2$	येथेही $6 = 3 \times 2$
$\therefore (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$	$5 = 3 + 2$
म्हणजेच $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$	$\therefore (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$
	म्हणजेच $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

पुढील वर्ग –विस्तार पहा.

कोणत्याही धन संख्येचे वर्गमूळ काढणेम्हणजे ती कोणत्या संख्येचा वर्ग आहे ते शोधणे.

हाच अर्थ वर्गीय द्विपद करणीच्या वर्गमूळासाठी कसा वापरतात ते पुढे पहा.

$(\sqrt{12} - \sqrt{6})^2$

$= (\sqrt{12})^2 - 2(\sqrt{12})(\sqrt{6}) + (\sqrt{6})^2$

$= 12 - 2\sqrt{72} + 6$

$= 18 - 2\sqrt{72}$

$= 18 - 2\sqrt{36 \times 2}$

$= 18 - 2 \times 6\sqrt{2}$

$= 18 - 12\sqrt{2}$

$(\sqrt{12} - \sqrt{6})^2 = 18 - 12\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{18 - 12\sqrt{2}} = (\sqrt{12} - \sqrt{6})$

आता जर आपल्याला

$(18 - \ 12\sqrt{2})$ चे वर्गमूळ काढावयाचे असेल तर वरील उदाहरणांप्रमाणे विचार

करता येईल का?

उत्तर:

नाही कारण $12\sqrt{2}$ हे गुणाकारपद 2ab या नमुन्याचे नाही.

त्यासाठी काय स्वरूपात $12\sqrt{2}$ हे पद व्यक्त करता आले पाहिजे?

उत्तर:

$12\sqrt{2} = 2 \times 6 \times \sqrt{2}$ या मिश्र करणीमधील $6 = \sqrt{36}$ असे लिहिले पाहिजे.

$\therefore\ 12\sqrt{2} = 2 \times \sqrt{36} \times \sqrt{2}$

$= 2 \times \sqrt{72}$

आता 72 चे असे दोन अवयव शोधू या की ज्यांची बेरीज 18 मिळेल.

72 = 12 × 6 व 12 + 6 = 18

$\therefore$ $18 - 12\sqrt{2} = 12 - 2\sqrt{72} + 6$

$18 - 12\sqrt{2} = (\sqrt{12})^2 - 2(\sqrt{12 \times 6}) + (\sqrt{6})^2$

$18 - 12\sqrt{2} = (\sqrt{12} - \sqrt{6})^2$ .....[a^2-2ab+ b^2 = $(a-b)^2$]

म्हणजेच, $\sqrt{18 - 12\sqrt{2}} = (\sqrt{12} - \sqrt{6})$

जर तुम्हाला असे समीकरण दिले की,

$a + \sqrt{b} = 4 + \sqrt{5}$ तर दोन्ही बाजूंची तुलना केल्यास तुम्हाला a व b च्या

किंमती सहज कळतील.

$a = 4$, $b = 5$.

नियम: जर $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ तर $a = c$ व $b = d$

Exercise:

1 गुणांचे प्रश्न:

1) खालील विधाने सत्य की असत्य ते सकारण स्पष्ट करा.

i) प्रत्येक पूर्ण संख्या ही नैसर्गिक संख्या असते.

ii) प्रत्येक पूर्णांक परिमेय संख्या असते.

iii) प्रत्येक परिमेय संख्या पूर्णांक असते.

2 गुणांचे प्रश्न:

1) $\frac{5}{9}$ व $\frac{7}{6}$ मधील कोणत्याही तीन परिमेय संख्या शोधा.

2) खाली दिलेल्या मांडणीवरुन खालीलपैकी शुद्ध करणी कोणती आणि मिश्र करणी कोणती ते लिहा.

i) $\sqrt{0.9}$ ii) $\sqrt{51}$ iii) $\sqrt{\sqrt[3]{27}}$ iv) $\frac{5}{7}\sqrt{8}$

3) खालील किंमती काढा.

$|6| - |-6|$

3 गुणांचे प्रश्न:

1) पुढील संख्याचे परिमेय / अपरिमेय असे वर्गीकरण करा.

i) $\sqrt{625}$ **ii)** $\sqrt{\frac{48}{75}}$ **iii)** 3.010010001…… **iv)** $\sqrt{1000}$

v) $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$ **vi)** $(\sqrt{2} + 3)^2$

2) सरळरूप द्या.

$(4.5)^3 - (2.5)^3 - 3 \times 4.5 \times 2.5\,(4.5 - 2.5)$

3) युक्लिडचा भागाकाराचा सिद्धांत वापरुन खालील संख्याचा म.सा.वि. काढा.

i) 75 आणि 595

ii) 7068 आणि 17646

T2_L17

4) अंकगणिताचे मूलभूत प्रमेय वापरून खालील संख्यांचा म.सा.वि. व ल.
काढा.

i) 90 आणि 72 **ii)** 82 आणि 700

5) खालीलपैकी कोणत्या संख्या करणी आहेत ते लिहा.

i) $\sqrt{100}$ **ii)** $\sqrt{45}$ **iii)** $(\sqrt[3]{7})^3$

6) खालील करणींची तुलना करा.

i) $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$

ii) $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{8}$

7) खालील विधांनावरुन x आणि y मधील संबंध लिहा.

i) $x = 4$; $4 < y$

ii) $x > -3$; $-6 > y$

iii) $x > 5$; $y < -5$

8) सोडवा.

i) $|x-5| = 9$

ii) $\left|x-\frac{3}{2}\right| = \frac{5}{2}$

9) छेदाचे परिमेयीकरण करा.

i) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

ii) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$

iii) $\frac{9}{(6-\sqrt{3})}$

10) सोपे रुप द्या:

i) $(7-\sqrt{2})^2 + (7+\sqrt{2})^2$

ii) $\sqrt{98} + \sqrt{200} - \sqrt{242}$

T2_L17

4 गुणांचे प्रश्न: (प्रत्येक उपप्रश्नाला 4 गुण)

1) खालील करणीची अनुबद्ध करणी लिहा आणि प्रत्येक जोडीचा गुणाकार करा.

i) $(5\sqrt{7} - 7\sqrt{5})$ **ii)** $(a\sqrt{b} + b\sqrt{a})$

2) खालील करणी चढत्या क्रमाने लिहा.

i) $\sqrt[5]{6}$, $\sqrt[8]{9}$, $\sqrt[10]{25}$

ii) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[9]{4}$

Assessment:

पुढील प्रत्येक उपप्रश्नासाठी (a), (b), (c) व (d) असे चार पर्याय दिले आहेत त्यातील अचूक पर्याय शोधा.

i) पुढीलपैकी ....ही अपरिमेय संख्या आहे.

a) $\sqrt[4]{\frac{162}{32}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

c) $\sqrt{\frac{49}{25}}$

d) $\sqrt{\frac{45}{25}}$

ii) खालीलपैकी कोणत्या करणीची कोटी = 6 आहे.

a) $\sqrt{6}$

b) $\sqrt[3]{2^6}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{15}}$

d) $\sqrt[6]{(m^3)^2}$

iii) जर 5 - $\sqrt[3]{b}$ = a - $\sqrt[3]{5}$ तर a व b मधील पुढीलपैकी ......विधान सत्य आहे.

a) a = b = 5

b) a < b

c) a > b

d) a – b = 5

iv) पुढीलपैकी ....ही संख्या $\sqrt{96}$ चा परिमेयीकरण गुणक आहे.

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\sqrt{12}$

T2_L18

v) $|5(1 - 4) + (15)| =$ ……….

a) 0

b) 30

c) -30

d) 15