संकल्पना चित्र:
प्रकरण 3
बैजिक राशी

T3

पूर्वज्ञान: बैजिक राशी, त्यांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार व अवयव पाडणे

नित्यसमानता: (x + a) (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab

a^2 - b^2 = (a + b) (a – b)

$(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$, $(a + b + c)^2$ विस्तार

बहुपदी व तिची कोटी

चल, स्थिरांक

बैजिक राशींवरील क्रिया: बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार

बैजिक राशींचे अवयव पाडण्याची सूत्रे :

i) ax + ay = a (x + y)

ii) ax + ay + bx + by = a (x + y) + b (x + y)= (x + y) (a + b)

iii) a^2 - b^2 = (a + b) (a – b)

iv) a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 – ab + b^2)

v) a^3 - b^3 = (a – b) (a^2 + ab + b^2)

i) वर्गीय त्रिपद राशींचे अवयव,

ii) (a^3 + b^3 + c^3 – 3abc) या रूपातील राशींचे अवयव.

iii) जर (a + b + c)= 0 तर ($a^3 + b^3 + c^3$) या रूपातील राशींचे अवयव

T3

भाग II बहुपदी

बहुपदी ओळखणे (बहुपदीचे सहगुणक रूप, कोटी, घातरूप), बहुपदींची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार,

↓

संश्लेषक भागाकार पद्धती

↓

बहुपदीची किंमत चलाच्या किंमतीवरून काढणे

↓

शेष सिद्धांत

↓

अवयव सिद्धांत

↓

बहुपदीची शून्ये : (कोटी = 1, 2, 3)

चल व स्थिरांक

खालील सारणी पहा:- समजा दोन गावातील अंतर = d =120किमी.

गाडीचा ताशी वेग x किमी /तास	30	40	60	80
लागलेला वेळ t (तास)	4	3	2	1.5

या सारणीमध्ये x च्या किंमतींबद्दल काय आढळते?

तसेच t च्या किंमतींबद्दल काय आढळते?

उत्तर: दोन्हींच्या किंमती बदलणा-या आहेत.

d च्या किंमतीबद्दल काय आढळते?

उत्तर: d ची किंमत बदलणारी नाही. d =120 कि.मी.

ज्याची किंमत बदलते त्याला काय म्हणतात?

उत्तर : ज्याची किंमत बदलते त्याला ’चल’ म्हणतात.

ज्याची किंमत बदलत नाही त्याला काय म्हणतात?

उत्तर : ज्याची किंमत बदलते त्याला **’स्थिर’** किंवा **’स्थिरांक’** म्हणतात.

वरील उदाहरणात (x) ,(t) ही चले असून (d) हा स्थिरांक आहे.

बैजिक राशी, सरूप पदे ह्यांच्याशी तुमची ओळख मागेच झाली आहे.

पुन्हा एकदा ते थोडक्यात पाहू.

1) एक संख्या x घ्या. त्या संख्येतून 7 वजा करा. आलेल्या उत्तराला 4 ने गुणा व त्यात 6 मिळवा.

ती राशी लिहा.

उत्तर: मिळालेली राशी = $4(x - 7) + 6$

मिळालेल्या राशीला x मधील बैजिक राशी म्हणतात.

2) तीन क्रमवार नैसर्गिक संख्यांपैकी सर्वात लहान संख्या x मानून येणा-या संख्यांचा गुणाकार करून मिळणारी बैजिक राशी लिहा.

उत्तर :त्या संख्यांपैकी सर्वात लहान संख्या x मानू.

∴ पुढील दोन क्रमवार नैसर्गिक संख्या अनुक्रमे (x +1) व (x+2)

त्यांच्या गुणाकाराने मिळालेली राशी = x (x +1) (x+2)

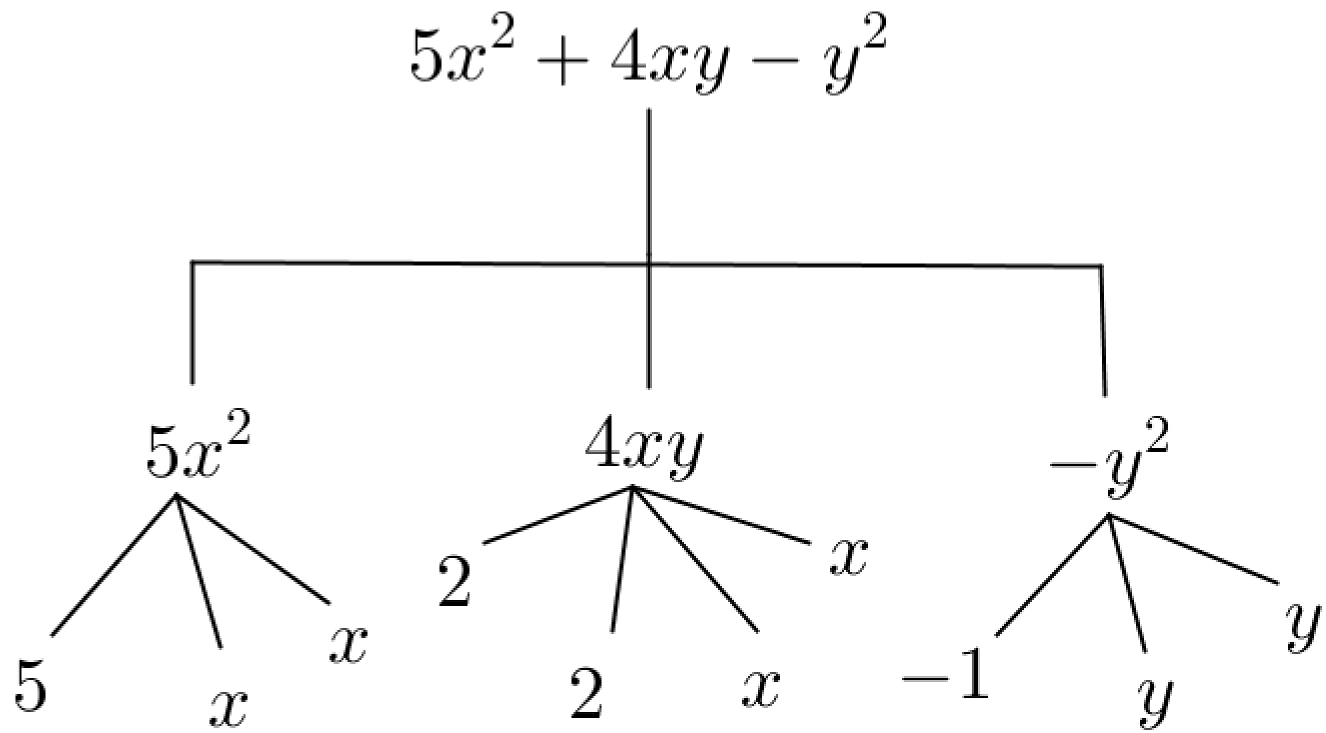
3) चौरसाची प्रत्येक बाजू = (x +3) असल्यास त्याचे क्षेत्रफळ दाखविणारी राशी लिहा.

उत्तर: मिळालेली राशी =$(x+3)^2$

राशींमधील सरूप पदे कशी ओळखाल?

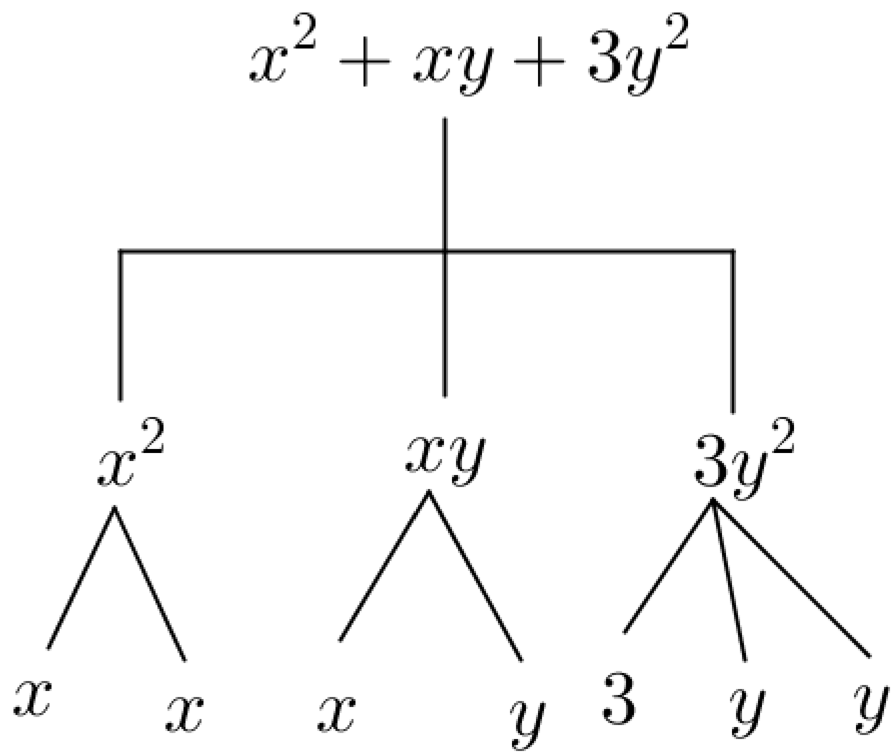
समजा बैजिक राशी= $5x^2 + 4xy - y^2$ ही राशी दिलेली आहे.

या राशीतील प्रत्येक पद गुणाकाराच्या रूपात खाली दाखविली आहे.



बैजिक राशी= x^2+ xy + 3y^2 ही राशी दिलेली आहे.

T3_L2_A1



आता या दोन्ही बैजिक राशीतील ज्या पदांमध्ये चल समान व त्या चलाचा घातांकही समान आहे ती सरूप पदे आहेत.
त्यांच्या सहगुणकांची बेरीज करतात.

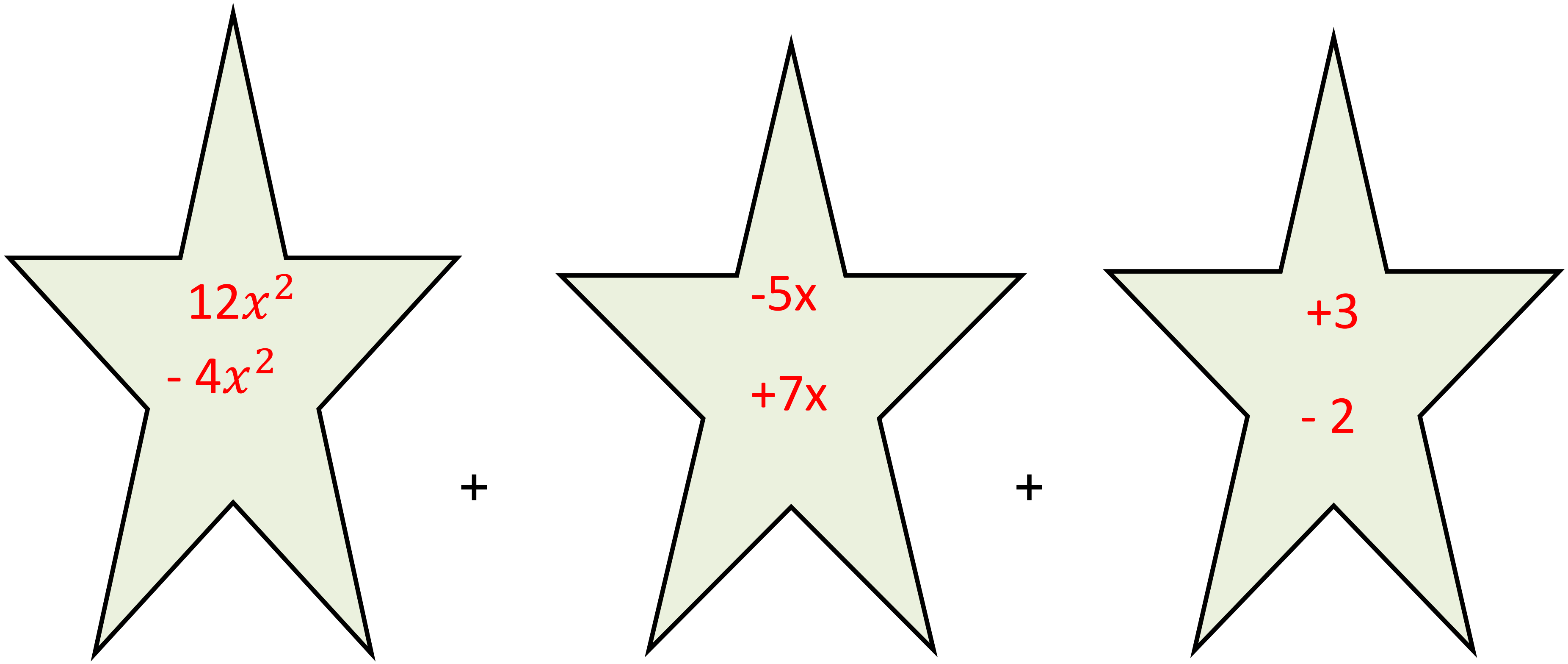
आता $(5x^2+4xy - y^2)$ व $(x^2$+ xy + $3y^2)$ या दोन राशीतील सरूप पदे

एकत्र करून त्यांची बेरीज लिहा.

	x^2 चे सहगुणक	xy चे सहगुणक	y^2 चे सहगुणक
राशी 1	1	1	3
राशी 2	5	4	-1
बेरजेने मिळणारी राशीतील पदांचे सहगुणक	6	5	2

उत्तर: $6x^2 + 5xy + 2y^2$

$(12x^2 - 5x + 3)$ व $(7x - 2 - 4x^2)$ यातील सरूप पदांची बेरीज करून मिळणारी राशी लिहा.



उत्तर:

रोहनचे आजोबा एका शाळेत पूर्वी शिकवित असत. सध्या निवृत्तीमुळे ते घरीच असतात. रोहन आठवीत गेल्यावर आजोबांनी त्याला लागोपाठ तीन दिवस तीनच उदाहरणे सोडविण्यास सांगितले. त्याने सर्व उदाहरणे बरोबर सोडविली शेवटी चौथ्या दिवशी रोहनला स्वत:लाच एक नियम तयार करता आला तेव्हा आजोबा त्याच्यावर खूष झाले. ती उदाहरणे पुढे दिली आहेत. त्यातून रोहनला कोणता नियम सापडला असेल तो तुम्हालाही सापडतो का बघा.

T3_L3

सोमवारचा प्रश्न : (57 × 6) या गुणाकारात (6 × 43) या गुणाकाराचे उत्तर

मिळव व बेरीज सांग.

रोहनचे उत्तर : 57 × 6 = 342 व 6 × 43 = 258

∴ 57 × 6 + 6 × 43 = 342 + 258 = 600

मंगळवारचा प्रश्न : 389 × 13 च्या गुणाकारात 111 × 13 या गुणाकाराचे उत्तर

मिळविले तर मिळणारी संख्या सांग.

रोहनचे उत्तर :

389 × 13	111 × 13	5057 + 1443
5057	1443	6500

आता रोहनला आजोबांची आयडिया कळायला लागली होती. तो मनात म्हणाला,

“आता बघाच माझी Idea उद्या.”

त्यामुळे नंतर तर रोहनने आपली Idea वापरायचीच असे ठरविले

बुधवारचा प्रश्न : 2.6 ला 56 ने गुणून त्यात (44 × 2.6) ची किंमत काढून ती

मिळव व येणारी संख्या सांग.

रोहनचे उत्तर : (2.6 × 56) + (44 × 2.6) ह्याचे उत्तर काढण्यासाठी फक्त

एकच बेरीज व एकच गुणाकार करणार.

$\therefore (56 + 44) = 100$

$\therefore 2.6 \times 100 = 260.0$ हे माझे उत्तर.

आज मात्र आजोबा रोहनवर फारच खूष झाले आणि त्याला शाबासकी देत म्हणाले, “अरे वा! रोहन तू तर बीजगणितातले एक सूत्रच तयार केलेस की! आता तुझी सोमवारच्या उदाहरणांची उत्तरे या पद्धतीने करून तीच उत्तरे मिळतात का बघ. मग रोहनने लिहिले :

i) $(57 \times 6) + (6 \times 43) = 6(57 + 43) = 6 \times 100 = 600$

ii) $(389 \times 13) + (111 \times 13) = 13(389 + 111) = 13(500) = 6500$

iii) $(2.6 \times 56) + (44 \times 2.6) = 2.6\,(56 + 44)$

$$= 2.6 \times 100$$

$$= 260.0$$

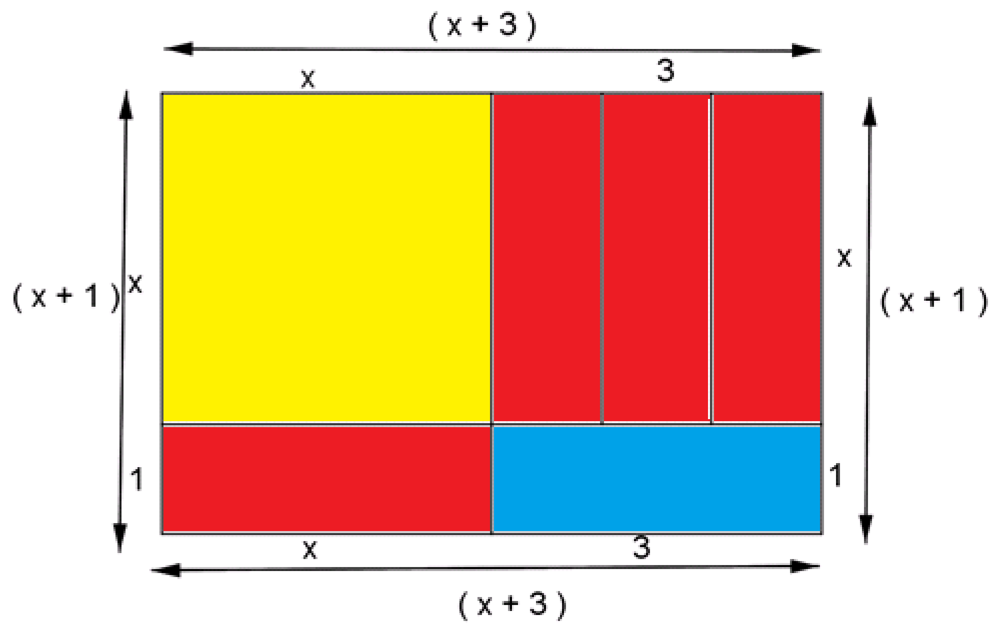
रोहनची Idea एकदम बरोबर ठरली. यावरून आता तुम्ही बीजगणितातून अंकगणितातील उत्तरे सोपी करणारे कोणते सूत्र वापरले गेले ते संख्यांऐवजी a, b, c सारखी अक्षरे घेऊन रोहनला सांगा.

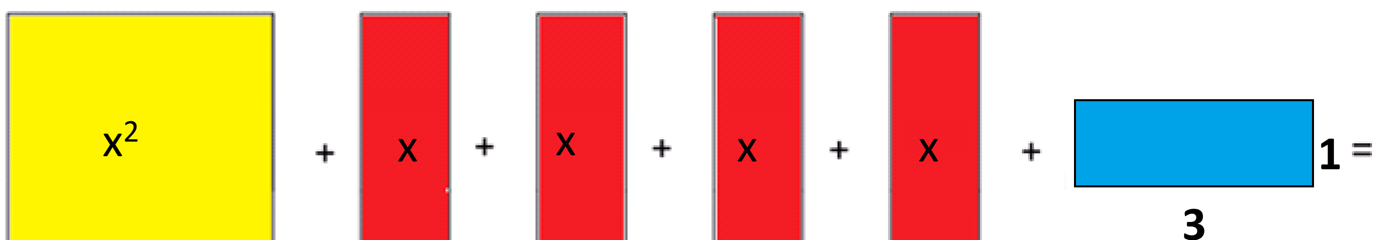
उत्तर: $(a \times b) + (a \times c) = a\,(b + c)$

भूमितीतून बीजगणिताकडे:

(x +3) (x + 1) ह्यांचा विस्तार आयत आणि चौरस यांच्या क्षेत्रफळांमधून कसा मिळतो ते पहा म्हणजे भूमितीमध्येही बीजगणित कसे उपयोगात येते ते तुम्हाला कळेल.

Fig. 1

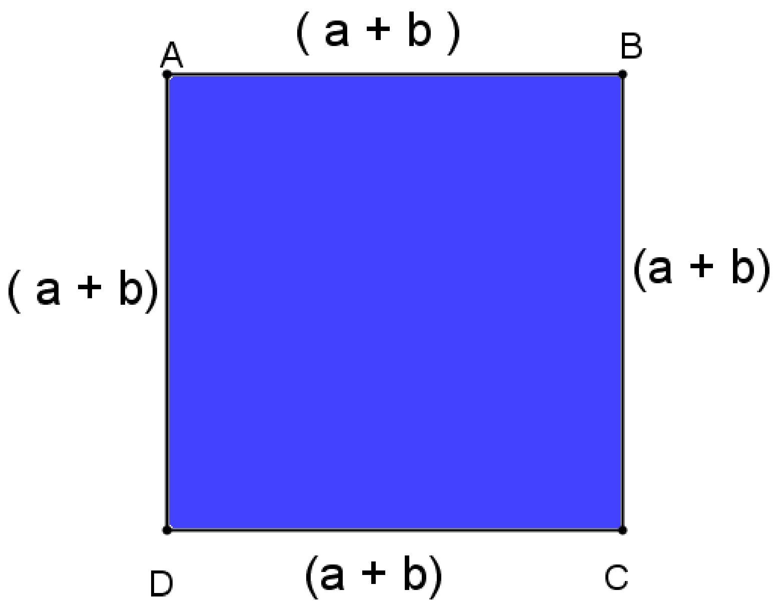


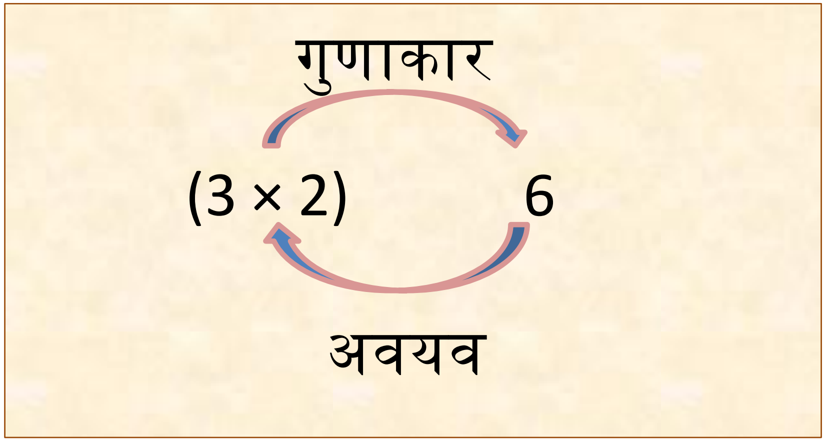


उत्तर:

$x^2 + 4x + 3$

वर्ग विस्तार: $(a+b)^2$ = (a + b) (a + b) = a^2 + 2ab + b^2 हे तुम्हाला माहित आहे. याआधीच्या उदाहरणावरून वरील चौरसाकृती क्षेत्राचे असे चार भाग पाडा की त्यांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेने वरील वर्ग – विस्तार मिळेल.





हे चित्र पाहिल्यावर अंकगणितातील गुणाकार करणे व अवयव पाडणे ह्यांबद्दल जे कळते तोच संबंध बीजगणितात राशींचा विस्तार करणे आणि त्यांचे अवयव पाडणे यांमध्ये असतो हे जर तुम्हाला समजले तर बैजिक राशींचे अवयव पाडणे ही विस्तार करण्याच्या विरूद्ध क्रिया आहे हे तुम्हाला पटेल.

T3_L5_A1

बैजिक राशींच्या विस्तारातून अवयव पाडण्याची सूत्रे.

नमुना	गुणाकार (विस्तार)	अवयव सूत्रे
I	1) $a(b+c)$ $= ab + ac$ 2) $(a+b)(c+d)$ $= a(c+d) + b(c+d)$ $= ac + ad + bc + bd$	$ab + ac$ $= a(b+c)$ गट पाडून $ac + ad + bc + bd$ $= a(c+d) + b(c+d)$ $= (a+b)(c+d)$
II	$(a+b)(a-b)$ $= a^2 - b^2$	दोन वर्गांची वजाबाकी $a^2 - b^2$ $=(a+b)(a-b)$

वर्ग विस्तार व अवयव:

III	$(a+b)^2$ $= (a+b)(a+b)$ $= a(a+b) + b(a+b)$ $= a^2 + ab + ba + b^2$ $= a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2$ $= a^2 + ab + ba + b^2$ $= a(a+b) + b(a+b)$ $= (a+b)(a+b)$ $= (a+b)^2$
IV	$(a-b)^2$ $= (a-b)(a-b)$ $= a(a-b) - b(a-b)$ $= a^2 - ab - ba + b^2$ $= a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 - 2ab + b^2$ $= a^2 - ab - ba + b^2$ $= a(a-b) - b(a-b)$ $= (a-b)(a-b)$ $= (a-b)^2$

T3_L5_A3

वर्ग त्रिपदीचे अवयव:

V	a) $(x+2)(x+3)$ $= x(x+3) + 2(x+3)$ $= x^2 + 3x + 2x + 6$ $= x^2 + x(3+2) + 6$ $= x^2 + 5x + 6$	$x^2 + 5x + 6$ $= x^2 + 3x + 2x + 3\times 2$ $= x(x+3) + 2(x+3)$ $= (x+3)(x+2)$
	b) $(x+3)(x-2)$ $= x(x-2) + 3(x-2)$ $= x^2 - 2x + 3x + 3(-2)$ $= x^2 + (3-2)x + 3(-2)$ $= x^2 + x - 6$	$x^2 + x - 6$ $= x^2 + 3x - 2x - 3(2)$ $= x(x+3) - 2(x+3)$ $= (x+3)(x-2)$

	c) $(x-2)(x-3)$ $= x(x-3) - 2(x-3)$ $= x^2 - 3x - 2x + (-3)(-2)$ $= x^2 + (-3-2)x + (-3)(-2)$ $= x^2 - 5x + 6$	$x^2 - 5x + 6$ $= x^2 + (-3-2)x + (-3)(-2)$ $= x^2 - 3x - 2x + 6$ $= x(x-3) - 2(x-3)$ $= (x-3)(x-2)$
	a) $(x-3)(x+2)$ $= x(x+2) - 3(x+2)$ $= x^2 + 2x - 3x + (-3)(2)$ $= x^2 + 2x - 3x + (-3)(2)$ $= x^2 + (-3+2)x - 6$ $= x^2 - x - 6$	$x^2 - x - 6$ $= x^2 + (-3+2)x + (-3)(2)$ $= x^2 - 3x + 2x - 6$ $= x^2 + (-3+2)x - 6$ $= x^2 - x - 6$

जर वर्गीय बैजिक राशींमध्ये वर्गपदाचा सहगुणक 1 पेक्षा भिन्न असल्यामुळे 6 व 20 चा गुणाकार करून येणाऱ्या 120 चे दोन अवयव शोधावे लागतात.

1	$(2x + 5)(3x + 4)$ $= 2x(3x + 4) + 5(3x + 4)$ $= 6x^2 + 8x + 15x + 20$ $= 6x^2 + 23x + 20$	$6x^2 + 23x + 20$ $= 6x^2 + 15x + 8x + 5(4)$ $= 3x(2x + 5) + 4(2x + 5)$ $= (2x + 5)(3x + 4)$	खुलासा : $6 \times 20 = 120$ चे असे दोन अवयव की ज्यांची बेरीज 23 आहे. $\therefore 15 \times 8 = 120$ $15 + 8 = 23$
2	$(2x - 5)(3x - 4)$ $= 2x(3x - 4) - 5(3x - 4)$ $= 6x^2 - 8x - 15x + 20$ $= 6x^2 - 23x + 20$	$6x^2 - 23x + 20$ $= 6x^2 - 15x - 8x + 5(4)$ $= 3x(2x - 5) - 4(2x - 5)$ $= (2x - 5)(3x - 4)$	खुलासा : $6 \times 20 = 120$ चे असे दोन अवयव की ज्यांची बेरीज - 23 आहे. $\therefore (-15) \times (-8) = 120$ $(-15) + (-8) = -23$

3	$(2x+5)(3x-4)$ $= 2x(3x-4) + 5(3x-4)$ $= 6x^2 - 8x + 15x - 20$ $= 6x^2 + 7x - 20$	$6x^2 + 7x - 20$ $= 6x^2 - 8x + 15x - 20$ $= 2x(3x-4) + 5(3x-4)$ $= (3x-4)(2x+5)$	खुलासा : $6 \times 20 = 120$ चे असे दोन अवयव की ज्यांची बेरीज 7 आहे. $\therefore 15 - 8 = 7$
4	$(2x-5)(3x-4)$ $= 2x(3x-4) - 5(3x-4)$ $= 6x^2 - 8x - 15x + 20$ $= 6x^2 - 23x + 20$	$6x^2 - 23x + 20$ $= 6x^2 - 8x - 15x + 20$ $= 2x(3x-4) - 5(3x-4)$ $= (3x-4)(2x-5)$	खुलासा : $(-6) \times (-20) = 120$ चे असे दोन अवयव की ज्यांची बेरीज -23 आहे. $\therefore -23 = -15 - 8$

दोन घनांची बेरीज:

विस्तार सूत्र व अवयव सूत्र:

विस्तार सूत्र:

$$(a + b)^3 = (a + b) (a + b) (a + b)$$

$$= (a + b)^2 (a + b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^{2)} (a + b)$$

$$= a (a^2) + a (2ab) + a (b^2) + b (a^2) b (2ab) + b (b^2)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

मागील विस्तारावरून खालील नित्यसमीकरण तयार करू.

(अवयव सूत्रे तयार करू.)

अवयव सूत्र:

$\therefore\ (a^3 + b^3) = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$

$\therefore\ (a^3 + b^3) = (a + b)^3 - 3ab (a + b)$

$\therefore\ (a^3 + b^3) = (a + b) \quad (a + b)^2 - 3ab$

$\therefore\ (a^3 + b^3) = (a + b) (a^2 + 2ab + b^2 - 3 ab)$

$\therefore\ (a^3 + b^3) = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$

दोन घनांची वजाबाकी:

विस्तार सूत्र:

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b)$$

$$\therefore (a - b)^3 = (a - b)^2 (a - b)$$

$$\therefore (a - b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$$

$$\therefore (a - b)^3 = a^2(a) - a^2(b) - 2ab(a) - 2ab(-b) + b^2(a) - b^2(b)$$

$$\therefore (a - b)^3 = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$$

$$\therefore (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\therefore (a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$$

अवयव सूत्र:

मागील विस्तारावरून खालील समीकरण लिहू.

$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$

$= (a - b)\,[\,(a - b)^2 + 3ab\,]$ ……सामाईक अवयव (a – b)

$= (a - b)\,(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$

$= (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$…………… (अवयव सूत्र.)

$a^3+b^3+c^3-3abc$ चे अवयव सूत्र तयार करणे:

यातील (a^3+b^3) ही पदे कोणत्या विस्तार सूत्रात मिळतात?

त्यावरून आपण $a^3+b^3=$ ... ...काय लिहू शकतो ते शोधा.

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc$

$= [(a+b)^3 + c^3] - 3ab(a-b) - 3abc$

$= [(a+b)+c][(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab[(a+b)+c]$

$= (a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2] - 3ab[a+b+c]$

$= (a+b+c)[a^2+2ab+b^2-ca-bc+c^2-3ab]$

$= (a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ = (a + b + c) [$a^2 + b^2 + c^2 - ab$– bc - ca]

हे सूत्र आता तुम्हाला माहित आहे.

जर (a + b + c) या अवयवाची किंमत 0 असेल तर काय होईल?

वरील सूत्रात (a + b + c) = 0 घालून पाहू.

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ = 0 ($a^2+b^2 + c^2 - ab$– bc - ca)

= 0

∴ जर (a + b + c) = 0 तर $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

बहुपदी:

खालील बैजिक राशी बहुपदी आहेत. स्तंभ A	खालील बैजिक राशी बहुपदी नाहीत. स्तंभ B
1) $5x^2 + 7x - 12$	1) $x^3 - 2\sqrt{x} + 8$
2) $x^3 - 9$	2) $\sqrt[3]{x} - 9$
3) $x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 5x - 16x^0$	3) $x^4 - 6x^3 + \frac{7}{x^2} - \frac{5}{x} - 16$
4) $x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 0x - 32x^0$	4) $x^5 + 0x^4 - 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{x^2} + 0x - 32x^0$

वरील दोन्ही स्तंभातील चलांच्या प्रत्येक बैजिक राशीतील प्रत्येक पदातील चलाच्या घातांकांचे निरीक्षण करा व त्यातून बहुपदीसाठी चलाचे घातांक कोणत्या प्रकारच्या संख्या असाव्या लागतात यासंबधी विधान करा.

जर बैजिक राशीतील चलाचे घातांक ऋण किंवा अपूर्णांक असतील तर ती बैजिक राशी बहुपदी नसते.

म्हणजेच बहुपदीतील प्रत्येक पदातील चलाचा घातांक 0, 1, 2, 3, 4, …… यांसारख्या पूर्ण संख्या (w या संचाचे घटक) असतात.

खालील सारणीचे निरीक्षण करून बहुपदीची कोटी कशी ठरवतात याबाबत तुम्ही नियम तयार करू शकता का?

बहुपदी	तिची कोटी
1) x + 2	1
2)5 + x^2 - 7x	2
3) 4x – $6x^3$ – 6 = -6x^3 + 0x^2 + 4x – 6	3
4) ax^4 - bx^3+ cx^2 + dx – e	4

प्रश्न: ax^3+ ax^2+ ax+ a या बहुपदीची कोटी ठरवा. उत्तर : कोटी = 3

खालील रिकाम्या जागी तुम्ही तयार केलेला नियम लिहा.

एकच चल असलेल्या शून्येतर बहुपदीची कोटी = ...

उत्तर: एकच चल असलेल्या शून्येतर बहुपदीची कोटी = तिच्यातील चलाचा सर्वात मोठा घातांक

एकापेक्षा अधिक चलातील बहुपदीची कोटी:

एकापेक्षा अधिक चलातील बहुपदीची कोटी ठरविण्यासाठी त्या बहुपदीमधील प्रत्येक पदामध्ये असलेल्या चलांच्या घातांकाची बेरीज करून जी बेरीज सर्वाधिक असते त्या बेरजेस त्या बहुपदीची कोटी असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ, $4x^6y^2z^3 + 5x^3y - 5xy - 5y + 3z - 15$ ची कोटी = 6 + 2 +3= 11

स्थिर बहुपदी:

x^0 = 1 हे तुम्हाला माहित आहे.

∴7 ही स्थिर संख्या आपण बहुपदीच्या स्वरूपात लिहू शकतो.

$7 = 7 \times 1 = 7 \times x^0$

यामध्ये x या चलाच्या वेगवेगळ्या किंमती घालून पहा.

x = 5 असल्यास $7x^0 = 7(5)^0 = 7(1) = 7$

$x = \frac{-2}{3}$ असल्यास $7x^0 = 7(\frac{-2}{3})^0 = 7(1) = 7$

$x = \sqrt{5}$ असल्यास $7x^0 = 7(\sqrt{5})^0 = 7(1) = 7$

x च्या वेगवेगळ्या किंमतींसाठी $7 = 7x^0$ या बहुपदीची किंमत बदलत नाही म्हणून तिला स्थिर बहुपदी म्हणतात.

स्थिर बहुपदीची कोटी = 0 असते.

प्रमाणरूप बहुपदी:-

जेंव्हा P(x) या बहुपदीची पदे x च्या घातांकाच्या चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने लिहिलेली असतात तेंव्हा अशा स्वरूपात लिहिलेल्या बहुपदीस प्रमाणरूप पद्धतीतील बहुपदी असे म्हणतात.

$P(x) = 5x^3 - 4x^4 + 6x - 7x^2 + 1$ ही बहुपदी प्रमाणरूपात लिहिल्यास

$P(x) = - 4x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x + 1$

बहुपदींचे सहगुणक रूप :

$7x^4 + 10x + 5x^6$ ही बहुपदी आहे. आपण ही बहुपदी x च्या घातांकाच्या उतरत्या क्रमाने लिहू जसे $5x^6 + 7x^4 + 10x$. या बहुपदीमध्ये x^5, x^3, x^2 ही पदे नाहीत. याचा अर्थ असा की या पदांचे सहगुणक शून्य आहेत.

आता ही नसलेली पदे बहुपदीमध्ये विचारात घेऊन बहुपदी घातांकाच्या उतरत्या क्रमाने $5x^6 + 0x^5 + 7x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 10x$ अशा प्रकारे लिहिता येते.

यालाच घातांकरूपातील बहुपदी म्हणतात.

वरील बहुपदी आपण (5, 0, 7, 0, 0, 10) अशी लिहितो.

या रूपातील बहुपदीला बहुपदींचे सहगुणकरूप म्हणतात.

मागील उदाहरणावरून

घातरूपातील बहुपदीमधील सहगुणकांची संख्या = त्या बहुपदीची कोटी + 1

बहुपदीची कोटी = सहगुणकांची संख्या - 1

नमुना उदाहरण : (2, 0, 0, 1) ही सहगुणकरुपातील बहुपदी घातरुपात लिहा.

उत्तर : घातरुपातील बहुपदी

$= 2x^3 + 0x^2 + 0x + 1$

$= 2x^3 + 1$

टीप:

बैजिक राशींच्या बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार करण्याच्या पद्धतीच बहुपदींच्या बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकारासाठी वापरतात. विशिष्ट प्रकारचा भाजक असताना वेगळ्या पद्धतीने भागाकार कसा करतात ते पुढे पाहू.

संश्लेषक भागाकार :

पहिल्या बहुपदीस दुसऱ्या बहुपदीने भागाकार करण्याची पद्धती आपणांस माहित आहे.

जेंव्हा भाजक हा $x \pm a$ ($a \neq 0$) या स्वरुपाचा असतो तेंव्हा तो भागाकार आणखी एका विशिष्ट पद्धतीने केला जातो. तिला संश्लेषक भागाकार पद्धती म्हणतात.

शिक्षकांनी वर्गात संश्लेषक भागाकाराची ही पद्धत मुलांना सांगितली.

त्यावर आधरित उदाहरणे मुले सोडवू लागली ,

ब-याच जणांना आनंद झाला कारण त्यांची उत्तरेही बरोब्बर यायला लागली.

पण काहीजणांना वाटू लागले की, आपण नेहमी ऐकतो की, गणित म्हणजे ’का?’

मग या रीतीमागचे कारण कळले तरच खरी मजा !

त्यांच्यातल्या एकाने शिक्षकांना विचारले ,” ही रीत मला समजली पण असे

करण्याचे कारण काय?

ही पध्दत कोणी शोधून काढली?

शिक्षक तर या प्रश्नाची वाटच बघत होते. त्यांनी मुलांना तोच भागाकार

नेहमीच्या पध्दतीने सोडवायला सांगितला आणि दोन्ही भागाकारांचे निरीक्षण

करायला सांगितले. तुम्हीही तेच करा.

3x + 6 ÷ (x + 2)

पद्धत (1) : (3x + 6) चे अवयव पाडा म्हणजे प्रत्यक्ष भागाकार न करताही समजेल.

(3x + 6) = 3 (x + 2)

∴ **3x + 6 ÷ (x + 2) = 3**

पद्धत (2):

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 3 \\
\hline
x+2 & 3x + 6 \\
 & \underline{\,_{-}3x +\, _{-}6\,} \\
 & 0
\end{array}
$$

भागाकार = 3

बाकी = 0

पद्धत (3):

संश्लेषक भागाकार पद्धतीने: (3x +6) ÷ (x + 2)

$$
\begin{array}{r|rr}
-2 & 3 & 6 \\
 & & -6 \\
\hline
 & 3 & 0
\end{array}
$$

$\therefore$ भागाकार = 3

बाकी = 0

2) $(x^2 - 4) \div (x + 2)$

पद्धत (1) : $(x^2 - 4)$ चे अवयव पाडा म्हणजे प्रत्यक्ष भागाकार न करताही समजेल.

$$(x^2 - 4) = (x + 2)(x - 2)$$

$$\therefore (x^2 - 4) \div (x + 2) = (x - 2)$$

पद्धत (2):

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & x & - & 2 \\
\hline
x + 2 & x^2 & + & 0x & - & 4 \\
- & \underset{-}{x^2} & \underset{-}{+} & 2x & & \\
\hline
 & 0 & & -2x & - & 4 \\
 & & - & \underset{+}{-2x} & \underset{+}{-} & 4 \\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}
$$

भागाकार = (x + 2)

बाकी = 0

पद्धत (3):

संश्लेषक भागाकार पद्धतीने :

$(x^2 - 4) \div (x + 2)$

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & 0 & -4 \\
 & & -2 & 4 \\
\hline
 & 1 & -2 & 0
\end{array}
$$

भागाकाराचे सहगुणक रूप = (1, -2)

∴ भागाकार = (x – 2) बाकी = 0

टीप:

प्रत्येक भागाकार अवयव पद्धतीने करता येणार नाही कारण नेहमी भाजक हा भाज्याचा अवयव असेलच असे नाही(बाकी = 0 असणार नाही) म्हणून पद्धत(2) किंवा पद्धत(3) वापरतात.

भाजक :$(x - 2)$

भाज्य : $(5x^3 - 4x^2 + 17x - 20)$ ही बहुपदी घात रुपात आहे.

$(5x^3 - 4x^2 + 17x - 20)$ ह्या बहुपदीला $(x - 2)$ ने नेहमीच्या

पद्धतीने भागल्यास :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^2 + 6x + 29 \\ \hline
(x-2) & 5x^3 - 4x^2 + 17x - 20 \\
 & 5x^3 - 10x^2 \\
 & - \qquad + \\ \hline
 & 0 \qquad 6x^2 + 17x \\
 & \qquad 6x^2 - 12x \\
 & \qquad - \qquad + \\ \hline
 & \qquad\qquad 29x - 20 \\
 & \qquad\qquad 29x - 58 \\
 & \qquad\qquad - \qquad + \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 38
\end{array}
$$

i) $\frac{5x^3}{x} = 5x^2$

ii) $\frac{6x^2}{x} = 6x$

iii) $\frac{29x}{x} = 29$

भागाकार = $5x^2 + 6x + 29$ व बाकी = 38

संश्लेषक भागाकार पद्धतीने :

$$(5x^3 - 4x^2 + 17x - 20) \div (x - 2)$$

2	5	-4	17	-20
		10	12	58
	5	6	29	38

$\therefore$ भागाकार सहगुणकरूपात : (5, 6, 29)

भागाकार घातरूपात : $5x^2 + 6x + 29$

बाकी = 38 ....(i)

या बहुपदीमध्ये $x = 2$ घालून तिची किंमत काढू व ती P(2) ने दाखवू.

बहुपदीची किंमत:

$\therefore P(2) = 5(2)^3 - 4(2)^2 + 17(2) - 20$

$= 5(8) - 4(4) + 34 - 20$

$= 40 - 16 + 34 - 20$

$= 74 - 36$

$= 38$ ....(ii)

वरील उदाहरणावरून P (x) ला (x – 2) ने भागून येणारी बाकी व x = 2 घालून त्याच

बहुपदीची मिळणारी किंमत P(2) यामधील संबंध पाहू.

बहुपदीची किंमत व शेष सिद्धांत:

विधान (i) व (ii) वरून,

P (x) ला (x – 2) ने भागून येणारी बाकी = 38

व

x = 2 घालून त्याच बहुपदीची मिळणारी किंमत P(2) = 38

यातून कोणता नियम कळला?

उत्तर:

बाकी = P(2)

आता P (x) = $4x^2 + 15x + 8$ या बहुपदीला (x + 3) ने भागून येणारी बाकी काढा.

नंतर x = -3 घालून P (-3) ही किंमत काढा

व त्यावरून मिळालेली बाकी व P (-3) मधील संबंध लिहा.

संश्लेषक भागाकार पद्धतीने भागू:

$(4x^2 + 15x + 8) \div (x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrr} -3 & 4 & 15 & 8 \\ & & -12 & -9 \\ \hline & 4 & 3 & -1 \end{array}$$

$\therefore$ भागाकार सहगुणकरूपात : (4, 3)

भागाकार घातरूपात : $4x + 3$

बाकी = -1 ....(i)

या बहुपदीमध्ये $x = -3$ घालून तिची किंमत काढू व ती P(-3) ने दाखवू.

$\therefore$ P(-3) = $4(-3)^2$ + 15(-3) + 8

= 4(9) + (-45) + 8

= 36 – 45 + 8

= 44 – 45

= -1

P (x) = $4x^2$ + 15x + 8 या बहुपदीला (x + 3) ने भागून येणारी बाकी = -1

x = -3 घालून P (-3) = -1

उत्तर:
बाकी = P (-3)

या उदाहरणांवरून असे दिसते की,

p (x) ही कोणतीही शून्येतर बहुपदी असेल.

व तिची कोटी ≥ 1 आहे

आणि ‘a’ ही कोणतीही वास्तव संख्या आहे.

जर p (x) ला (x – a) ने भागले तर मिळणारी

बाकी = p (a)

याला शेष सिद्धांत म्हणतात.

अवयव सिद्धांत:

दोन नैसर्गिक संख्यांच्या भागाकारात :

जर बाकी = 0 असेल

तर भाजक हा भाज्याचा एक अवयव असतो

जर बाकी ≠ 0 असेल

तर भाजक हा भाज्याचा एक अवयव नसतो.

हे तुम्हाला माहित आहे.

त्याचप्रमाणे बहुपदींच्या भागाकारातही

दोन बहुपदींच्या भागाकारात

जर बाकी = 0 असेल

तर भाजक हा भाज्याचा एक अवयव असतो

जर बाकी ≠ 0 असेल

तर भाजक हा भाज्याचा एक अवयव नसतो.

अवयव सिद्धांत:

$P(x) = 2x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 11x - 6$

$x = 1$ ही किंमत p(x) मध्ये ठेवून.

$\therefore p(1) = 2(1)^4 + 9(1)^3 + 6(1)^2 - 11(1) - 6$

$\therefore p(1) = 2 + 9 + 6 - 11 - 6$

$\therefore p(1) = 17 - 17$

$\therefore p(1) = 0$ म्हणून शेष सिद्धांतानुसार, P(x) ला (x-1) ने भागल्यास, बाकी= 0

$\therefore (x-1)$ हा $2x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 11x - 6$ चा अवयव आहे.

अशा उदाहरणांवरून 'अवयव सिद्धांत' मिळतो.

अवयव सिद्धांत:

a ही कोणतीही वास्तव संख्या असेल व p(x) या बहुपदीची कोटी एक

किंवा एकपेक्षा मोठी असेल आणि जर p(a) = 0 असेल तर (x-a) हा

p(x) चा अवयव असतो. याला अवयव सिद्धांत म्हणतात.

याउलट (x-a) हा बहुपदीचा अवयव असेल तर p(a)=0

बहुपदीचे शून्य:

p(x) ही x मधील शून्येतर बहुपदी असेल व α(अल्फा) ही अशी वास्तव संख्या असेल की, p(α) = 0 तर α या वास्तवसंख्येला बहुपदी p(x) चा शून्य असे म्हणतात.

रेषीय बहुपदीचे शून्य आणि सहगुणक यामधील संबंध:

$p(x) = 3x - 4$ कोटी = 1 सहगुणकरूप (3, -4)

$P(x) = 0$

$3x - 4 = 0$

$3x = 4$

$x = \frac{4}{3}$

वरील बहुपदी $p(x) = ax + b$ असेल तर तुलनेने $a = 3$, $b = -4$ व $x = \frac{4}{3}$

म्हणजे $x = \frac{-b}{a}$ हा $p(x)$ चा शून्य आहे.

वर्गीय बहुपदीचे शून्य आणि सहगुणक यांतील संबंध:

p(x) = $3x^2$- 5x – 2

= $3x^2$ - 6x + x – 2

= 3x(x- 2) + 1 (x – 2)

= (x – 2) (3x + 1)

जर p(x) = 0 असेल तर

(x -2) (3x + 1) = 0

∴ (x – 2) = 0 किंवा (3x + 1) = 0

∴ $x = 2$ किंवा 3x = -1

∴ $x = 2$ किंवा x = $\frac{-1}{3}$

∴ 2 व $\frac{-1}{3}$ यांना p(x) या वर्गीय बहुपदीचे शून्य म्हणतात.

p(x) = 3x^2- 5x – 2

समजा, p(x) = ax^2 + bx + c असेल तर तुलनेने

a = 3, b = -5, c = -2

$\therefore \alpha = 2$ व $\beta = \frac{-1}{3}$ यांना बहुपदीची शून्ये आहेत.

$\alpha + \beta = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-b}{a}$ ....(I)

$\alpha\beta = 2\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-2}{3} = \frac{c}{a}$ ....(II)

$\boxed{\alpha + \beta = \frac{-b}{a}}$ व $\boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$ हे संबंध लक्षात ठेवा.

घन बहुपदीचे शून्य आणि सहगुणक यांमधील संबंध:

P(x) = x^3 -3x^2 - 4x + 12

= x^2(x – 3) – 4 (x – 3)

= (x^2 - 4) (x – 3)

= [x^2- $(2)^2$] (x – 3)

= (x + 2)(x – 2) (x – 3)

जर $P(x) = 0$ असेल तर,

$$(x + 2) (x - 2) (x - 3) = 0$$

$\therefore (x + 2) = 0$ किंवा $(x - 2) = 0$ किंवा $(x - 3) = 0$

$\therefore$ $x = -2$ किंवा $x = 2$ किंवा $x = 3$

$\therefore$ -2 , 2 व 3 यांना $p(x)$ या वर्गीय बहुपदीचे 0 म्हणतात.

P(x) = x^3 -3x^2 - 4x + 12

समजा, P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d असेल तर तुलनेने,

a = 1, b = -3, c = -4, d = 12

$\therefore$ α = -2, β= 2, γ = 3 यांना बहुपदीची शून्ये म्हणतात.

$\therefore$ $\alpha + \beta + \gamma$ = -2 + 2 + 3

= 3

= $\frac{3}{1}$ = $\frac{-b}{a}$..........(i)

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha =$ (-2)(2) + (2)(3) + (3)(-2)

= -4 + 6 – 6

= -4

$= \frac{-4}{1}$

$= \frac{c}{a}$...............(ii)

$\alpha\beta\gamma =$ (-2)(2)(3)

= -12

$= \frac{-12}{1}$

$= \frac{-d}{a}$.............(iii)

खालील संबंध लक्षात ठेवा.

$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}}$

$\boxed{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}}$

$\boxed{\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}}$

Exercise:

T1_L12

1 गुणांचे प्रश्न:

1) सरळरूप द्या:

a) ($10x^2$ – 5x + 8) + ($5x^2$ – 8)

b) 3(y^3 – 2y – 4) + 5 (y^3 + 3y – 2)

2) पुढील बहुपदीचे सहगुणक रुप लिहा.

a) $10x^2$ – 40

b) $5y^2$ – 8y + 3

2 गुणांचे प्रश्न:

1) सूत्र लिहा व ते वापरून किंमत काढा.

a) m^2 - n^2= …… यावरून $(115)^2$ – $(95)^2$ = किती?

b) m^3 - n^3 = ……यावरून $(102)^3$ = किती? (m व n च्या योग्य किंमती निवडा.)

2) अवयव पाडा.

a) $14p^3q^2$ + $42p^2q^3$

b) $25x^2$ - $36y^2$

3 गुणांचे प्रश्न:

1) विस्तार करा.

a) (x + 1) (x + 2) (x – 3) + 6

b) $(x + 5y)^3$

2) a) एक x या चलातील वर्गीय राशी अशी तयार करा की तिचे अवयव (x – 20) (x + 5) आहेत.

b)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) ÷ (x + 1) संश्लेषक करून येणारा भागाकार व बाकी लिहा.

4 गुणांचे प्रश्न:

1) संश्लेषक पद्धतीने 5x^3 - 4x^2 + 7x – 35 ला (x – 2) ने भागा व बाकी काढा नंतर p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x – 35 या बहुपदीची x = 2 असताना किंमत काढा. तुम्हाला मिळालेली बाकी व p(2) ही किंमत यांमधील संबध काय ते लिहा.

2) ax^3 - 5x^2 + 8x – 6 या बहुपदीची x = 3 असताना p(3) ही किंमत 27 असल्यास a ची किंमत काढा.

T1_L13

Assessment:

1) पुढीलपैकी कोणती राशी बहुपदी नाही ते ओळखा.

a) $\sqrt[4]{x}$ - $\frac{2}{x^4}$

b) $3x^2$ - $\sqrt{5}$ x -7

c) $\frac{x^3}{5}$ + $6x^2$- 13

d) 10

2) x^2- 22x – 48 चे अवयव ....आहेत.

a) (x + 24) (x + 2)

b) (x – 24)(x+ 2)

c) (x + 24)(x – 2)

d) (x – 24)(x – 2)

3) पुढील पैकी ....या बहुपदीची कोटी 1 आहे.

a) 1

b) x

c) x^2

d) -1

4) (3, 0, -3, 0, 3) हे सहगुणक रूप असणा-या बहुपदीची कोटी = ...

a) 3

b) 5

c) 4

d) -3

5) P(x) *व* S(x) या दोन बहुपदींची कोटी *3* आहे म्हणून वजाबाकीची कोटी = ...

a) 6

b) 3

c) 2

d) 9