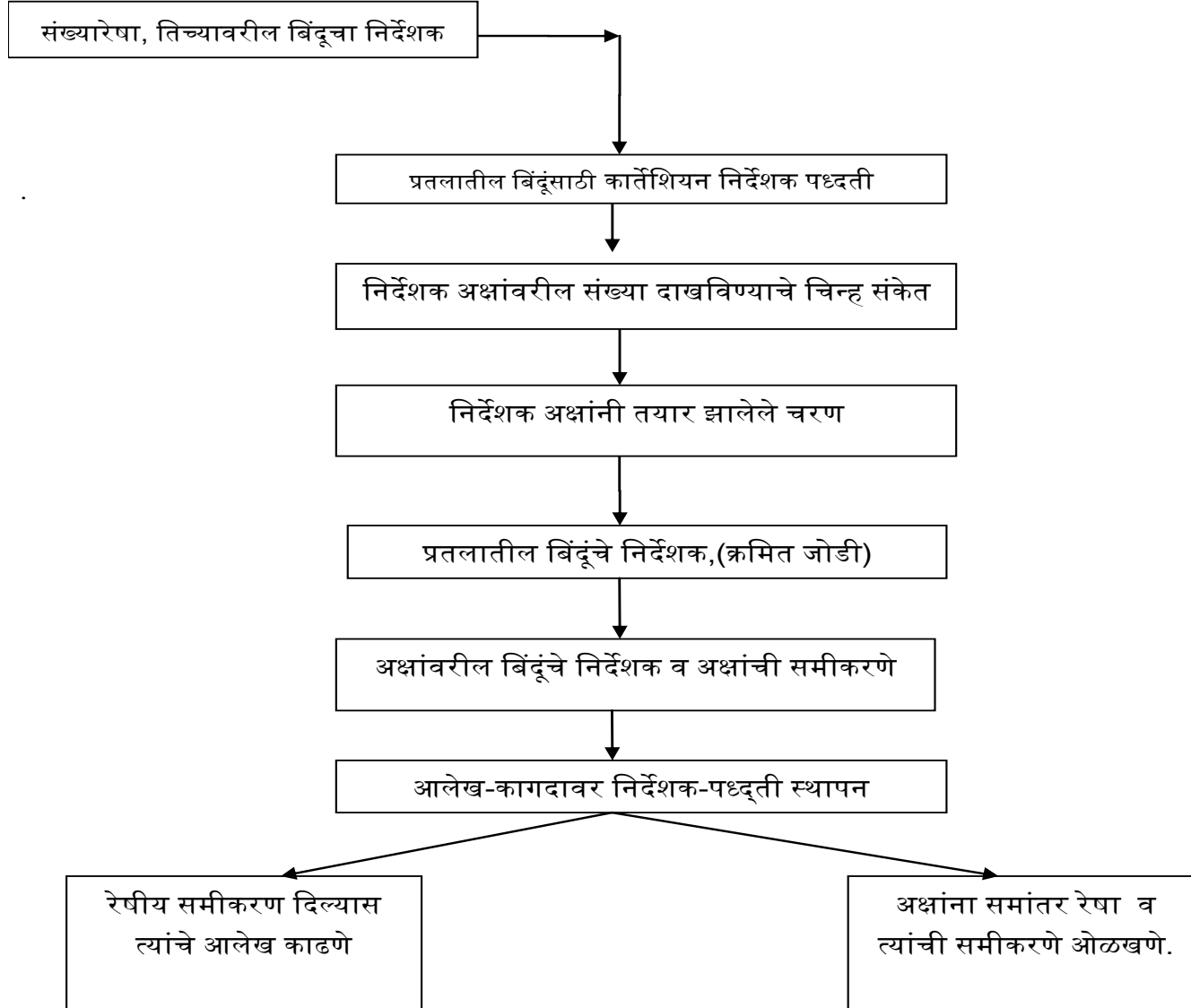


संकल्पना चित्र :



प्रकरण 5

आलेख

एकदा वर्गात शिक्षकांनी मुलांना सांगितले की, पुढची 15 मिनिटे मुलांनी त्यांच्या त्यांच्या आवडीचे कोणतेही काम करावे, एकट्याने किंवा शेजारच्या मित्राबरोबरीने पण एकमेकांशी न बोलता! शिवाय नंतर सर्वांना काय काय केले ते सांगायचे. मुले आपले आवडीचे काम करू लागली. कोणी गोष्टीचे पुस्तक वाचू लागली, कोणी चित्रे काढून रंगविण्यात गढून गेली.

जय आणि त्यांच्या बाकावर बसणारा त्याचा मित्र यश त्यांचा आवडीचा 'गोळा आणि फुली' हा खेळायचा विचार करीत होती. न बोलता कसे खेळावे यावर विचार करीत असताना यशला सुचली एक छान नवीन कल्पना !

15 मिनिटे संपली आणि शिक्षकांनी यशलाच पुढे येऊन त्यांनी काय केले ते सर्वांना सांगण्यासाठी बोलावले.

तेंव्हा यशने मुलांना पुढील कागद दाखविला आणि कोडेच घातले की,
ओळखा × व 0 पैकी यशचे चिन्ह कोणते आणि जयचे कोणते? तोच कागद
खाली दाखविला आहे.

5	×		×		
4		o			
3	×		o		
2				×	
1			o		o
	1	2	3	4	5

जय

यश

(1, 5)

(5, 1)

(4, 2)

(2, 4)

(1, 3)

(3, 1)

(3, 5)

(3, 3)

नीट पाहून तुम्हाला ओळखता येते का बघा. अशीच संकल्पना आपण आता पाहणार आहोत. ती संकल्पना प्रथम कोणी मांडली? त्यातून विकसित झालेल्या गणिताच्या या शाखेला काय म्हणतात? यासाठी पुढे काय दिले आहे ते बघा.

रेने देकार्त



रेने देकार्त(1596-1650) ह्या फ्रेंच गणितज्ञाने प्रथम निर्देशक पध्दती विकसित केली.तो मोठा तत्वज्ञसुद्धा होता. 'La Geometric' हे पुस्तक 1637 मध्ये प्रकाशित झाले. त्यामध्ये भूमितीच्या अभ्यासासाठी बीजगणिताचा वापर कसा करता येतो हे त्याने मांडले होते.

प्रतलातील बिंदूची जागा निश्चित करण्यासाठी वास्तव संख्यांच्या क्रमित जोडीचा उपयोग करता येतो, हा मोलाचा विचार त्याने मांडला.

त्याच्या सन्मानार्थ या शाखेला 'कार्तेशियन निर्देशक पध्दती' म्हटले जाते.

ही संकल्पना गणिताच्या अभ्यासाला महत्वपूर्ण कलटणी देणारी ठरली.

तुम्हाला हे शिकताना फार मजा येईल.

कार्तेशियन निर्देशक पध्दती

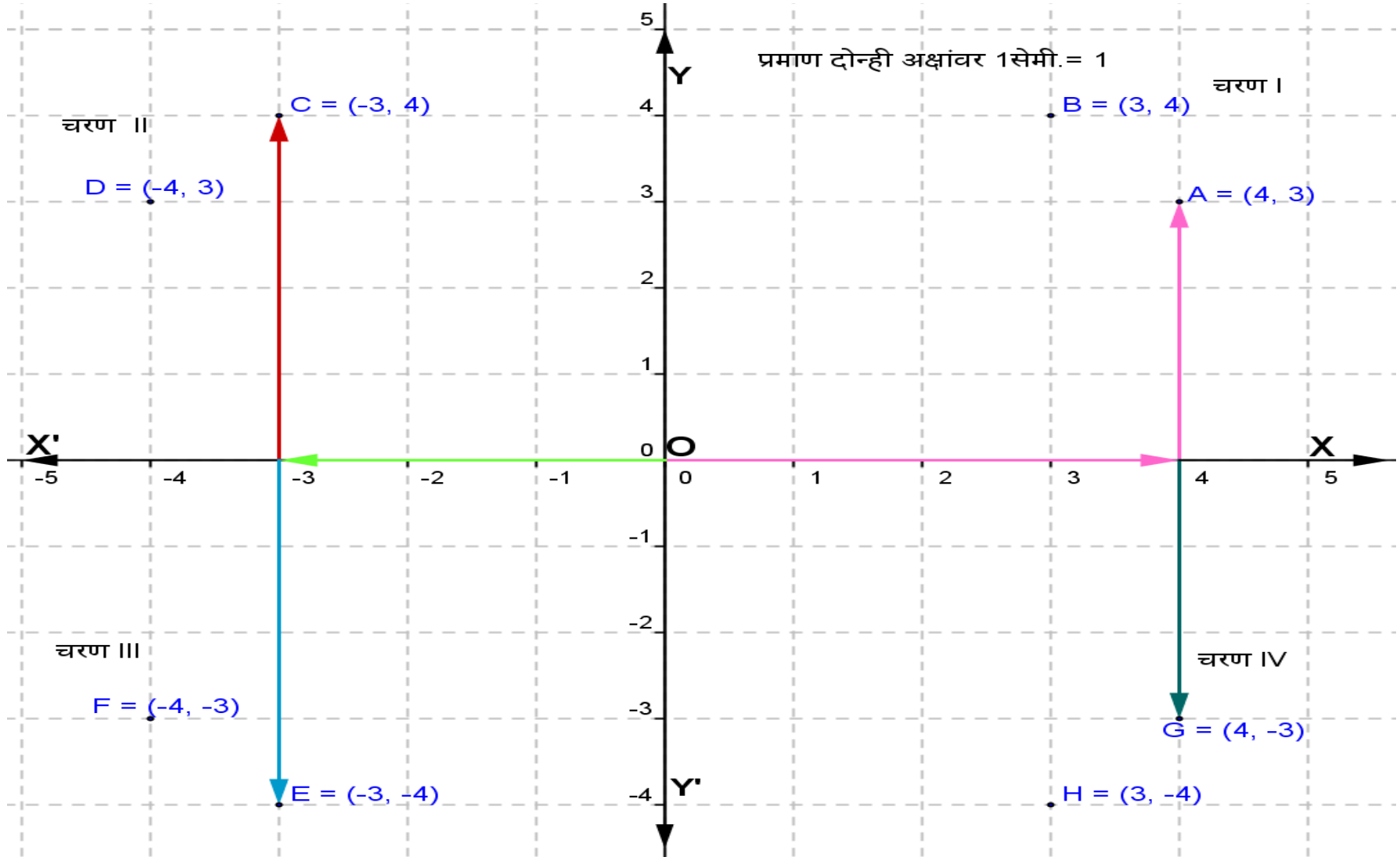
प्रतलातील बिंदूचे स्थान त्या प्रतलातील दोन लंबरेषांच्या सहाय्याने निश्चित करता येते.

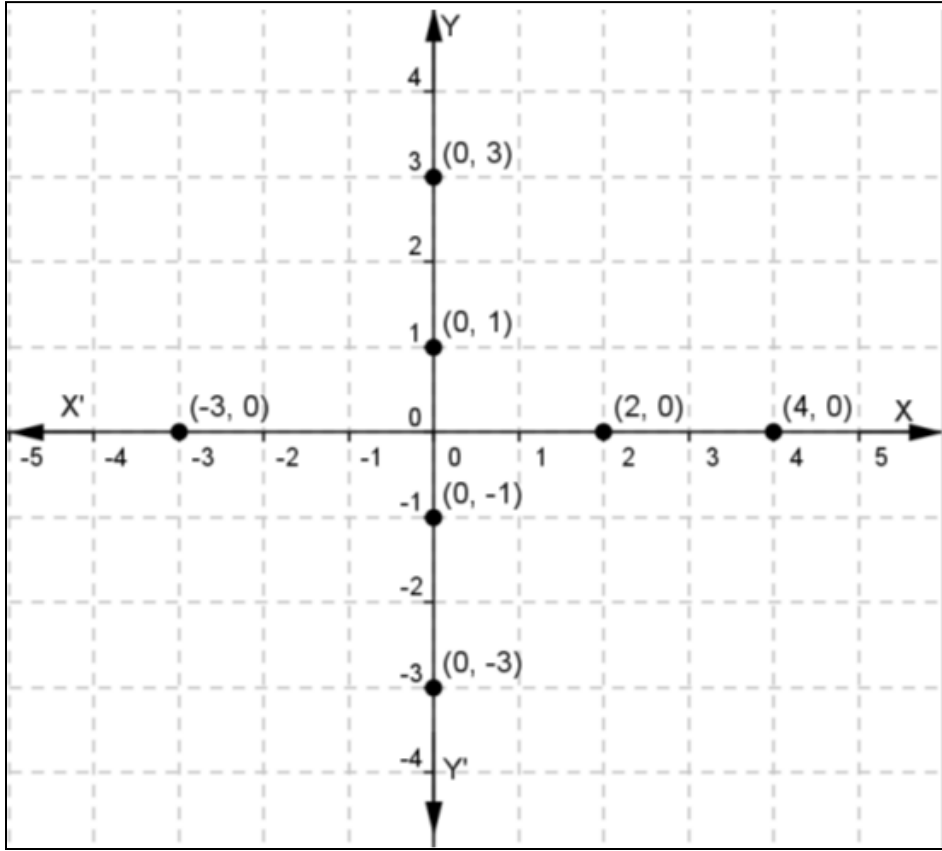
त्यांना निर्देशक अक्ष म्हणतात.. त्यांना X व Y अक्ष अशी नावे देतात.

त्यांच्या छेदनबिंदूला आरंभबिंदू O म्हणतात. संख्यारेषा तुम्हाला माहित आहे, येथे या दोन संख्यारेषा वापरल्या जातात.

- 1) X अक्षावर नेहेमीप्रमाणे आरंभबिंदूच्या उजवीकडे धन व डावीकडे ऋण संख्या दाखवितात.
- 2) Y अक्षावर आरंभबिंदूच्या वरच्या बाजूला धन व विरुध्द बाजूला ऋण संख्या दाखवितात.
- 3) दोन्ही अक्षांवर दोन क्रमवार पूर्णांकामध्ये जे स्थिर अंतर ठेवलेले असते त्याला प्रमाण म्हणतात. हे आलेख- कागदावर नोंदविणे आवश्यक असते.
(दोन्ही अक्षांवरील प्रमाण समान किंवा भिन्न असू शकते.)
आता पुढील आलेखात यांचा उपयोग कसा करतात ते पाहू.

यश आणि जय यांना सुचलेली युक्ति तुम्हाला कळली असेलच. त्यांनी संख्यांच्या क्रमित जोडीची जी कल्पना वापरली तीच वापरून आपल्याला आलेख काढायचे आहेत. त्यासाठी खालील आलेखात बिंदूंची जागा क्रमित जोडीने कशी निश्चित केली आहे याचे निरीक्षण करा.

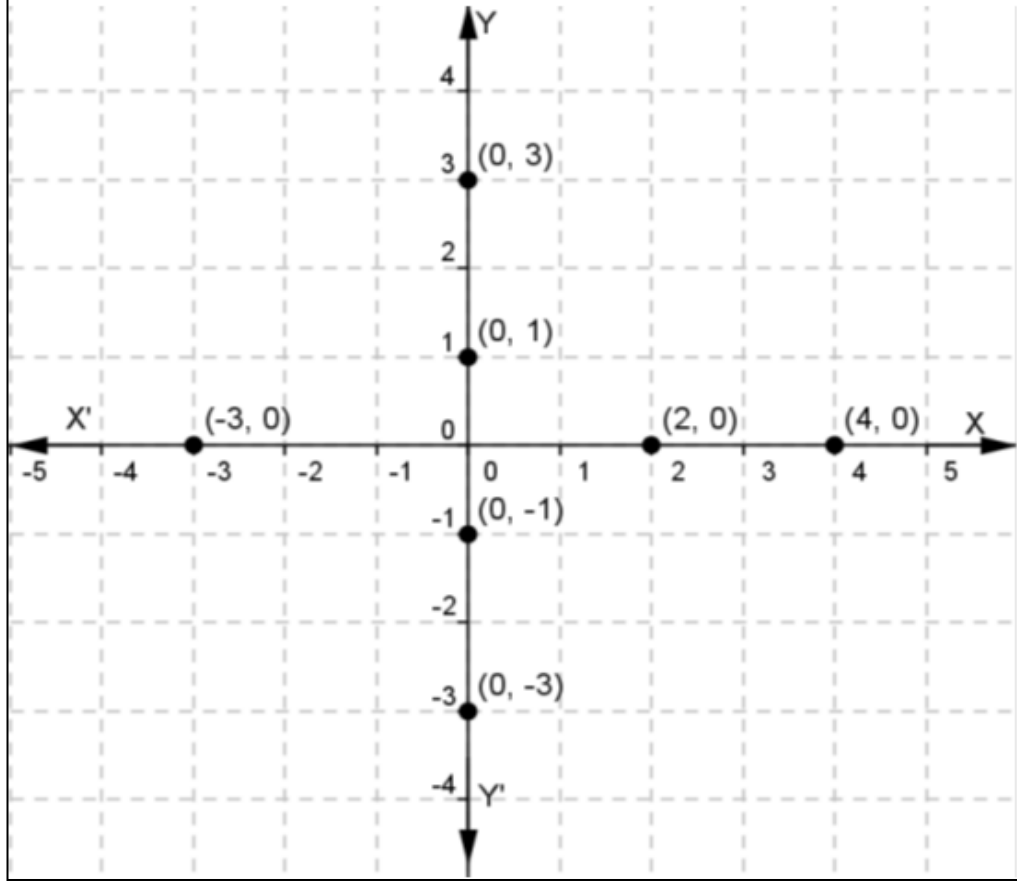




कोणत्याही रेषेचे समीकरण म्हणजे त्या रेषेवरील सर्व बिंदूंच्या निर्देशकांनी पूर्ण केलेली अट असते.

निर्देशकांचे प्रतिनिधित्व x व y या चलांनी केले जाते व ती अट चिन्हे, अक्षरे वापरून मांडली की त्या रेषेचे समीकरण मिळते.

या आलेखात दाखविलेले X अक्षावरील काही बिंदूंचे निर्देशक पहा. त्या निर्देशकांमधील साम्य शोधा. ते समीकरणाच्या स्वरूपात लिहा. त्याला X अक्षाचे समीकरण म्हणतात. त्याच अक्षावरील आणखी काही बिंदूंचे निर्देशक तीच अट पूर्ण करतात काय, याचा पडताळा घ्या.



आता त्याच आलेखात दाखविलेले Y अक्षावरील बिंदूंचे निर्देशक पहा.

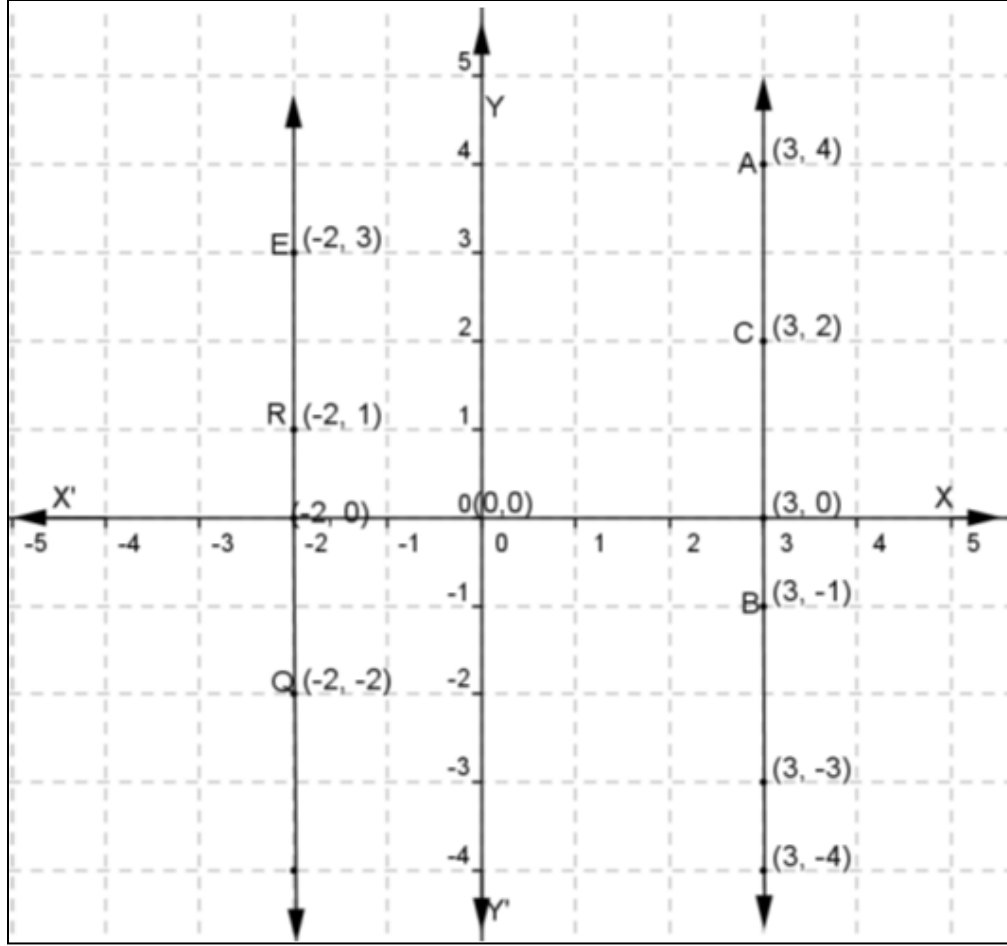
त्या निर्देशकांमधील साम्य शोधा. ते समीकरणाच्या स्वरूपात लिहा

त्याला Y अक्षाचे समीकरण तयार करा.

त्याच अक्षावरील आणखी काही बिंदूंचे निर्देशक तीच अट पूर्ण करतात काय, याचा पडताळा घ्या.

अक्षांना समांतर रेषा

अक्षांना समांतर रेषा: नमुना 1



आलेखातील रेषा AC चे वैशिष्ट्य काय आहे?

या रेषेवरील A व C बिंदूंच्या निर्देशकांमध्ये काय साम्य शोधा.

तेच वैशिष्ट्य रेषा AC वरील इतर बिंदूंच्या निर्देशकांमध्ये आढळते काय? असल्यास ते थोडक्यात कसे सांगाल? ते रेषा AC चे समीकरण म्हणून लिहा.

रेषा AC चे समीकरण:

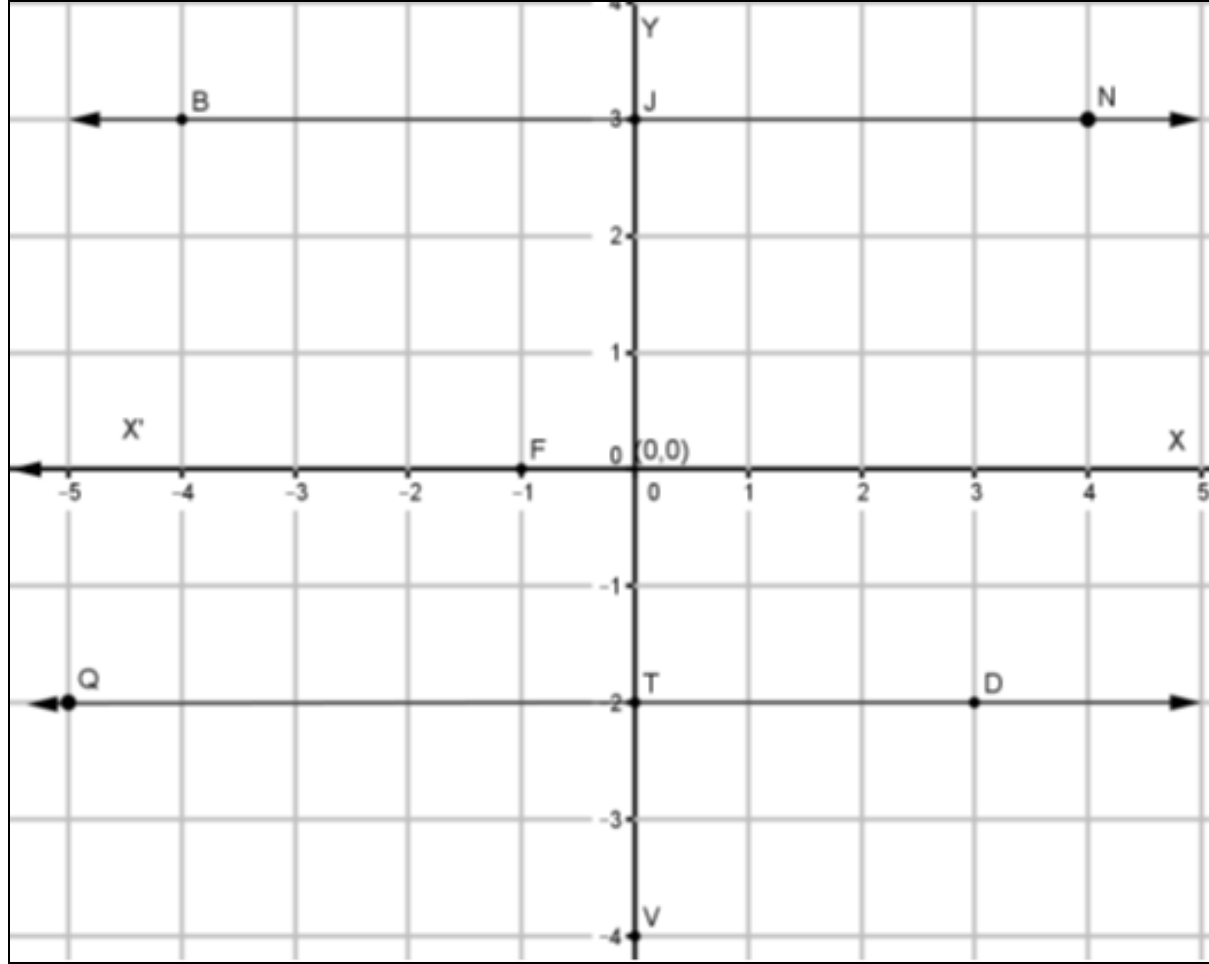
(रिकाम्या जागी योग्य उत्तर लिहा.)

याच प्रकारे रेषा QR चे समीकरण शोधा.

यातून Y अक्षाला समांतर असलेल्या रेषेचे समीकरण कोणत्या प्रकारचे असते असा निष्कर्ष काढाल?

अक्षांना समांतर रेषा: नमुना 2

T5_L3_A2



आलेखातील रेषा BN चे वैशिष्ट्य काय आहे?

या रेषेवरील B व N बिंदूंच्या निर्देशकांमध्ये काय साम्य शोधा. तेच वैशिष्ट्य रेषा BN वरील इतर बिंदूंच्या निर्देशकांमध्ये आढळते काय?

असल्यास ते थोडक्यात कसे सांगाल?

ते रेषा BN चे समीकरण म्हणून लिहा.

वरील प्रकारे रेषा QD यांची समीकरण लिहा.

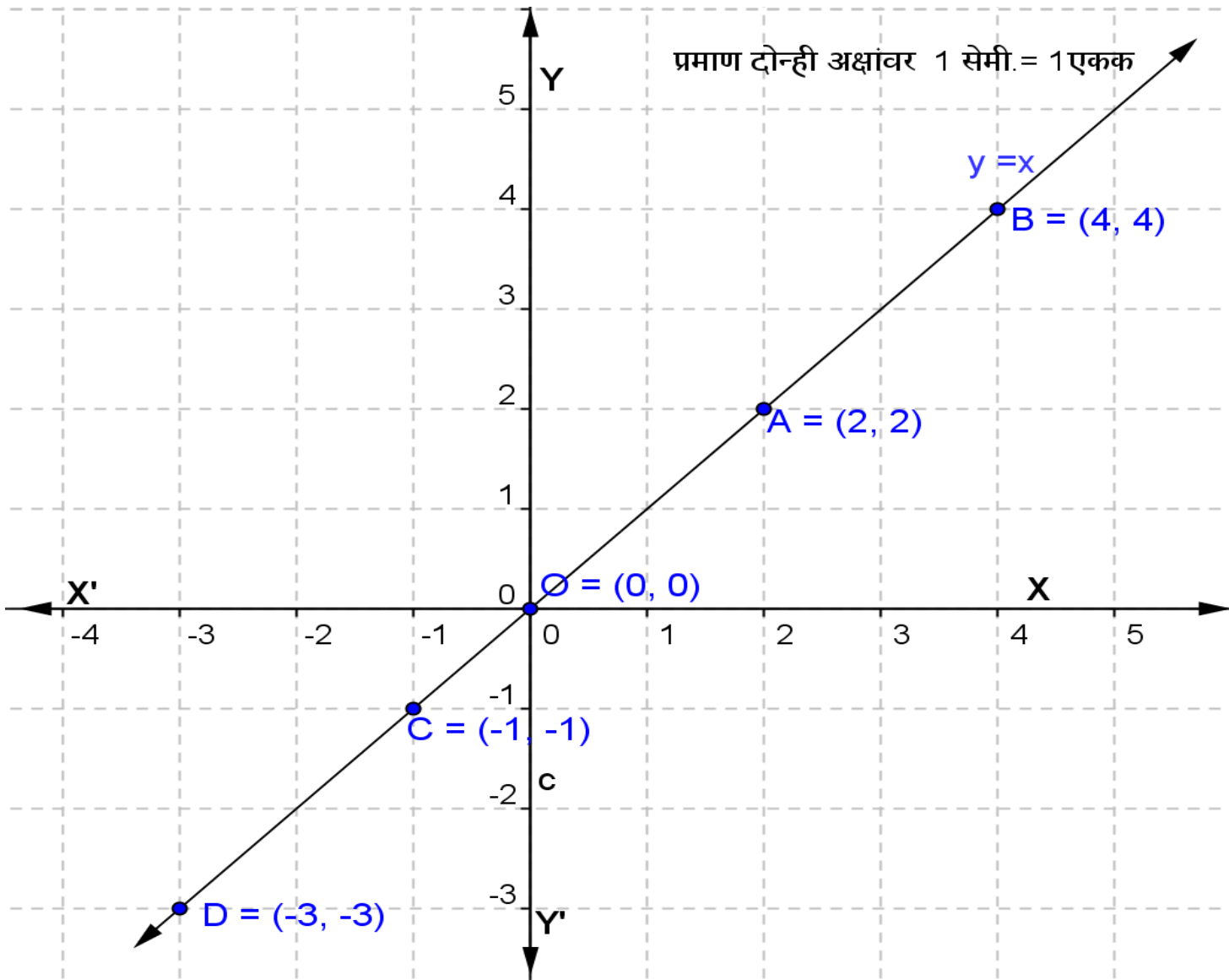
त्या समीकरणांवरून X अक्षाला समांतर रेषेचे समीकरण कोणत्या नमुन्याचे असते?

तुमचा निष्कर्ष लिहा.

रेषीय समीकरणांचे आलेख

- 1) कोणत्याही रेषेचे समीकरण म्हणजे त्या रेषेवरील सर्व बिंदूंच्या निर्देशकांनी पूर्ण केलेली अट असते. रेषेवरील बिंदूंच्या निर्देशकांचे प्रतिनिधित्व x व y या चलांनी केले जाते व ती अट चिन्हे वापरून मांडली की त्या रेषेचे समीकरण मिळते. हे आता तुम्हाला कळले आहे.
- 2) आता $O(0,0)$, $A(2,2)$, $B(4,4)$, $C(-1,-1)$, $D(-3,-3)$ हे बिंदू तुम्ही तयार केलेल्या आलेख कागदावर स्थापन करा.
ते एकरेषीय आहेत काय?
असल्यास या निर्देशकांमधील संबंध शोधा म्हणजे तुम्हाला त्या रेषेचे समीकरण मिळविता येईल.

रेषीय आलेख 1



आता, $x + y = 5$ या समीकरणाचा आलेख तुम्हाला काढावयाचा आहे.

म्हणजे ही अट पूर्ण करणा-या बिंदूंचा संच मिळवायचा आहे.

$x + y = 5$ म्हणजेच x निर्देशक + y त्याच बिंदूचा y निर्देशक = 5

आलेख काढण्यासाठी x ला सोयीस्कर किंमत घ्या व ती समीकरणात घालून ते सोडविल्यास y ची किंमत मिळते. अशा आणखी काही जोड्या मिळवून ते बिंदू आलेख-कागदावर स्थापन करा. मिळणारी रेषा म्हणजेच दिलेल्या समीकरणाचा आलेख म्हणतात. खालील सारणी पूर्ण करा.

x	0	-1
$y = 5-x$...	0	...
(x,y)	(0, ..)	(.., 0)	(-1, ...)

आता या रेषेवरील इतर कोणतेही दोन बिंदू घ्या. त्यांचे निर्देशक $x + y = 5$ ही अट पूर्ण करतात का ते पहा.

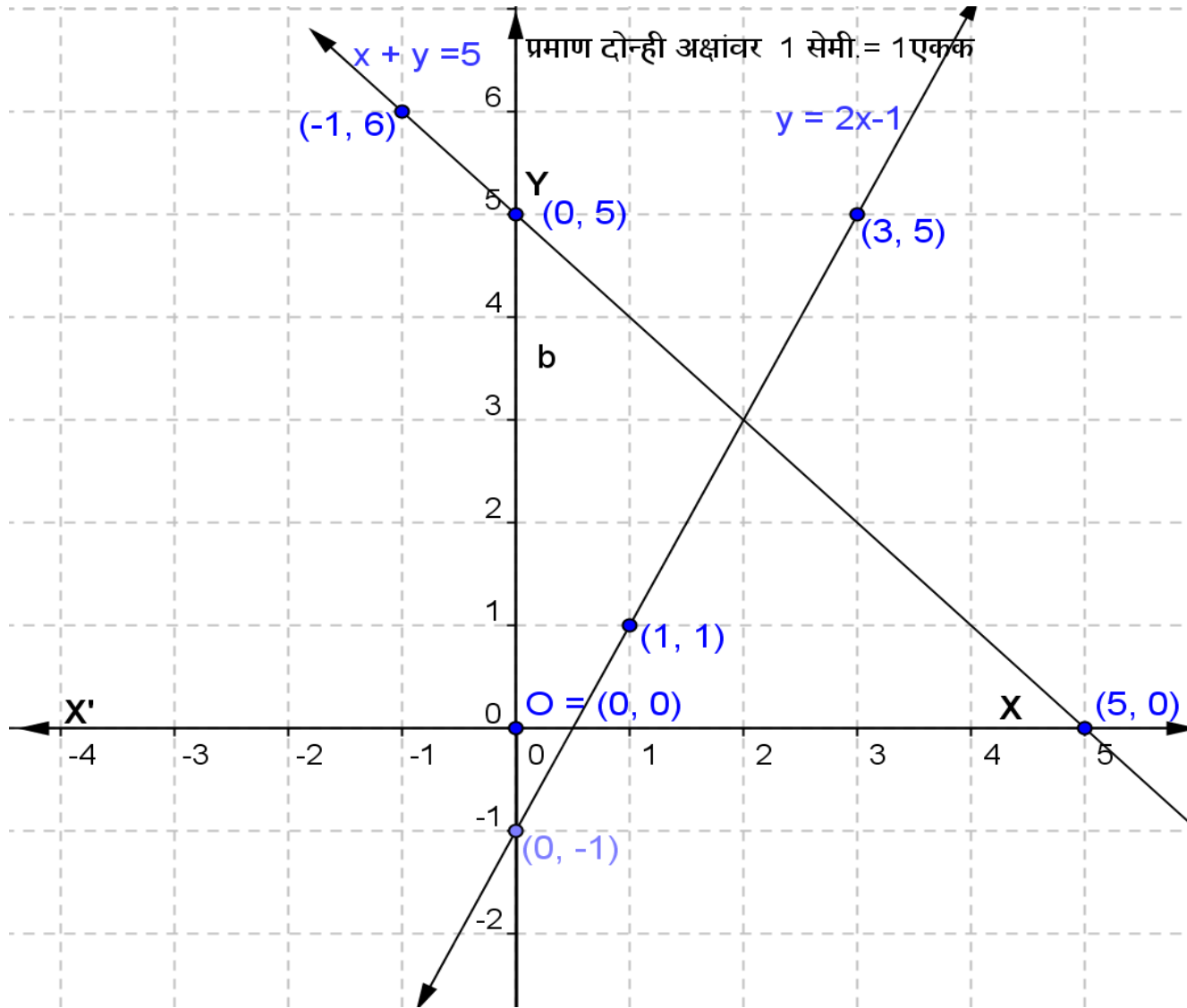
आता, त्याच आलेख-कागदावर $y = 2x - 1$ चा आलेख काढण्यासाठी खालील

सारणी पूर्ण करा.

x	0	1
$y = 2x - 1$...	5	...
(x, y)	(0, ...)	(.., 5)	(1, ...)

या दोन रेषा एकप्रतलीय आहेत. मग त्या कोणत्या दोन प्रकारच्या आहेत? त्या छेदत असतील तर त्यांच्या छेदनबिंदूचे निर्देशक काढा.

तुम्ही दोन चलातील रेषीय समीकरणे कशी सोडवतात हे शिकला आहात. त्यानुसार $x + y = 5$ व $y = 2x - 1$ ही समीकरणे सोडवून त्यांची उकल काढा. ही उकल आणि तुम्ही काढलेल्या या दोन रेषांच्या छेदनबिंदूचे निर्देशक यांबद्दलचे तुमचे निरीक्षण लिहा.



आलेख वाचन

पुढे तुम्हाला एका आलेखात काही बिंदू दाखविलेले दिसतील. तुम्ही आलेखाचे निरीक्षण करून सारणी पूर्ण करा. त्यातून तुम्हाला एक छान वाक्य मिळणार आहे. काय मिळते आहे बघा.

ही गंमत वापरून तुम्ही सुध्दा असाच एखादा छान गुप्त संदेश तुमच्या पालकांना पाठवू शकाल.

निर्देशक	$(-3,-1)$	$(4,0)$	$(2,0)$	$(1,2)$	$(0,-4)$	$(4,0)$	$(3,-2)$	$(0,0)$	$(4,3)$
बिंदूचे नाव	W	E	H	A	V	E	D	O	N

$(4,0)$	$(1,2)$	$(-2,4)$	$(4,-3)$	$(4,0)$	$(1,2)$	$(0,-2)$	$(0,3)$	$(0,0)$	$(-4,3)$
E	A	G	R	E	A	T	J	O	B

1 गुणांचे प्रश्न:

- 1) जो बिंदू दोन्ही अक्षांवर असतो त्याचे निर्देशक लिहा.
- 2) X अक्षाचे समीकरण लिहा.
- 3) P (-5, -2) मधून X अक्षाला समांतर काढलेल्या रेषेचे समीकरण लिहा.

2 गुणांचे प्रश्न:

- 1) जर A (m, -3) हा बिंदू $5x + y = 7$ या समीकरणाच्या रेषेवर असेल तर $m =$ किती?
- 2) एका रेषेचे समीकरण $ax + 3y - 6 = 0$ आहे. जर बिंदू C (3, -2) हा बिंदू त्या रेषेवर असेल तर $a =$ किती?
- 3) $3x - y + 4 = 0$ या समीकरणासाठी पुढील सारणी पूर्ण करा.

x	0
y	7
(x, y)	(0, ...)	(....., 7)

3 गुणांचे प्रश्न:

1) दोन्ही अक्षांवर 1 सेमी = 1 एकक हे प्रमाण घेऊन आलेखपत्रावर $A (2, -3)$,

$B (-4, 3)$ व $C (0, -1)$ हे तीन बिंदू एकरेषीय की नैकरेषीय आहेत ते ठरवा.

2) दोन्ही अक्षांवर 1 सेमी = 1 एकक हे प्रमाण घेऊन आलेखपत्रावर $y = 2x - 3$

या समीकरणाचा आलेख काढा. त्यासाठी कमीत कमी तीन बिंदू स्थापन करा.

4 गुणांचे प्रश्न:

1) दोन्ही अक्षांवर 1 सेमी = 1 एकक हे प्रमाण घेऊन आलेखपत्रावर $x + 4y = 6$

या समीकरणाचा आलेख काढा. बिंदू A (0, 6) हा बिंदू त्या रेषेवर आहे

किंवा नाही ते ठरवा.

2) दोन्ही अक्षांवर 1 सेमी = 1 एकक हे प्रमाण घेऊन आलेखपत्रावर $y = 2x$,

$2y = x$, $x = 3y$ या समीकरणांचे आलेख काढा. त्या तीन रेषा एकसंपाती

आहेत काय? असल्यास त्यांच्या संपात बिंदूचे निर्देशक लिहा.

1) जर $p(a, b)$ हा बिंदू तिसऱ्या चरणात असेल तर पुढीलपैकी सत्य विधान

a) a धन व b धन

b) a धन व b ऋण

c) a ऋण व b धन

d) a ऋण व b धन

2) पुढीलपैकीहा बिंदू X अक्षावर असतो.

a) $(0, 3)$

b) $(-3, 3)$

c) $(3, 0)$

d) $(3, 3)$

3) जर N हा $y = 2x$ च्या आलेखावर असेल तर पुढीलपैकीहे विधान सत्य.

a) $N \equiv (0, 2)$

b) $N \equiv (2, 4)$

c) $N \equiv (4, 2)$

d) $N \equiv (2, 0)$

4) एका रेषेचे समीकरण $2x + y - 4 = 0$ आहे. त्या रेषेवर पुढीलपैकीहा बिंदू नाही.

a) $(1, 2)$

b) $(0, 4)$

c) $(2, 0)$

d) $(2, 1)$

5) पुढील समीकरणांपैकीसमीकरणाची रेषा Y अक्षाला समांतर असते.

a) $y - 2 = 0$

b) $2x + 5 = 0$

c) $y = 0$

d) $x + y = 0$