T6

Concept Map
गुणोत्तर व प्रमाण

पूर्वज्ञान:- गुणोत्तर, शतमान, प्रमाण यांची प्राथमिक ओळख

कोणत्या राशींचे गुणोत्तर लिहिता येते?

i) राशी एकाच प्रकारच्या असल्या पाहिजेत.

ii) त्यांची एकके समान पाहिजेत नसल्यास समान केली पाहिजेत.

i) गुणोत्तर लिहिण्याच्या पद्धती.

ii) दोन संख्यांचे/ राशींचे गुणोत्तर लिहिण्यासाठी अटी व लिहिण्याची पद्धत व अर्थ

$\frac{a}{b}$, a ÷ b, a:b

$\frac{3}{4}$= 3:4 असल्यास पहिले पद = 3x असेल तर दुसरे पद = 4x (x ≠ 0)

गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहितात. गुणोत्तराला एकक नसते.

i) सममूल्य गुणोत्तरे :- $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ (k≠0)

ii) शतमान / शेकडेवारी

गुणोत्तरांची तुलना किंवा

$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ यांच्यातील क्रमसंबंध

a × d > b × c असेल तर $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

a × d < b × c असेल तर $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

a × d = b × c असेल तर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

समान गुणोत्तरांचे गुणधर्म:-

$\frac{a}{b}$ व $\frac{c}{d}$ ही गुणोत्तरे समान असतील तर

i) व्यस्त क्रिया $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \therefore \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

ii) एकांतर क्रिया $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \therefore \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

iii) योग क्रिया $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

iv) वियोग क्रिया $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

v) योग – वियोग क्रिया $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \therefore \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

vi) योग- वियोग क्रिया व्यत्यास $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$

समान गुणोत्तरांचा सिद्धांत: जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **तर** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ या गुणधर्माला समान गुणोत्तरांचा सिद्धांत म्हणतात.

T6

प्रमाण

साधे प्रमाण

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ असल्यास a, b, c, d प्रमाणात असतात.

a व d: अंत्यपदे, b व c: मध्यपदे

c: तृतीय प्रमाणपद, d: चतुर्थ प्रमाणपद

गुणधर्म:

अंत्यपदांचा गुणाकार = मध्यपदांचा गुणाकार

$ad = bc$

परंपरित प्रमाण

परंपरित प्रमाण:

तीन संख्या

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ असल्यास a, b, c परंपरित प्रमाणात असतात.

b हे a व c चे मध्यम प्रमाणपद असते.

(किंवा भूमितीमध्य असतो.)

गुणधर्म : $b^2 = ac$

परंपरित प्रमाण:

पाच संख्या

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$

$d^2 = ce$

d हा c व e चा भूमितीमध्य

$c^2 = bd$

c हा b व d चा भूमितीमध्य.

$b^2 = ac$

b हा a व c चा भूमितीमध्य

तसेच $ae = bd$ व $ad = bc$

a व k शून्येतर असल्यास,

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=k$

$d = ek$

$c = dk = ek^2$

$b = ck = ek^3$

$a = bk = ek^4$

K पद्धत

i) प्रमाण : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ मानल्यास, $a = bk$ आणि $c = dk$

ii) परंपरित प्रमाण : तीन पदे

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ मानल्यास, $b = kc$ आणि $a = k^2c$

i) परंपरित प्रमाण : पाच पदे

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = k$ मानल्यास, $d = ke$

$c = k^2e$

$b = k^3e$

$d = k^4e$

T6_L1

प्रकरण 6
गुणोत्तर व प्रमाण

गुणोत्तर

Tailor Bird:12cm

House Crow: 42cm

Common Myna: 26cm

Bulbul: 21cm

Sparrow: 15cm

Kingfisher: 28cm

बीना म्हणाली,“कावळयाचा व बुलबुलचा आकार अनुक्रमे 42 सेमी आणि 21 सेमी आहे.

त्यांच्या आकाराचे गुणोत्तर,

42 सेमी ÷ 21 सेमी = (2 × 21 सेमी) ÷ 21 सेमी= 2

गुणोत्तराच्या स्वरूपात, ते 2:1 असे लिहितात.”

“त्याचा अर्थ काय?” मिनीने विचारले.

बीनाने तिला सांगितले की, “ म्हणजे कावळयाचा आकार बुलबुलच्या आकारापेक्षा दुप्पट आहे.”

मिनीला ही कल्पना थोडीशी समजली, तुम्हाला समजली आहे का?

T6_L1

चित्रात दिलेल्या माहितीचा उपयोग करून खालील तक्ता पूर्ण करा.

Tailor bird (शिंपी पक्षी) :12cm, House Crow (गावकावळा) : 42cm,

Common Myna(मैना): 26cm, Bulbul(बुलबुल): 21cm,

Sparrow (चिमणी): 15cm आणि Kingfisher (खंड्यापक्षी) : 28cm

पहिल्या पक्ष्याचा आकार व त्याचे नाव	दुस-या पक्ष्याचा आकार व त्याचे नाव	पहिल्या संख्येचे दुस-या संख्येशी असलेले गुणोत्तर	गुणोत्तराचे संक्षिप्त रूप.
शिंपी पक्षी : 12 cm	बुलबुल : 21 cm	12 सेमी÷ 21सेमी = $\frac{12}{21}$	3:7
कावळा :	चिमणी:.....	....	....
मैना :	खंड्यापक्षी :.......	....	......
....	....		3:4
सर्वात मोठ्या पक्ष्याचा आकार=	सर्वात लहान पक्ष्याचा आकार =	......	......

' सेंटींमीटर' या त्यांच्या सामाईक एककाचे काय झाले याबाबत तुम्ही सांगू शकाल?

व्याख्या: a आणि b (b ≠0) या दोन संख्या दिलेल्या असतील तर त्या दोन संख्यांमधील गुणोत्तर खाली दिल्याप्रमाणे वेगवेगळ्या पद्धतीने दर्शवू शकतो.

a ÷ b किंवा $\frac{a}{b}$ किंवा a : b .

यामध्ये 'a' ला पूर्वपद व 'b' ला उत्तरपद म्हणतात.

सर्वसाधारणपणे गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात मांडतात.

T6_L1

खालील मुद्द्यांवर विचार करा.

i) आपण दोन वेगवेगळया प्रकारच्या राशींची तुलना करू शकतो का?

उदाहरणार्थ: 25 सेमी चे 15 वर्षांशी असलेले गुणोत्तर घेता येते का?

ii) आपण 25 सेमी चे 5 मी शी गुणोत्तर घेऊ शकतो का?

त्या दोन राशींची तुलना करण्यासाठी वरील राशींमध्ये काय बदल करणे आवश्यक आहे?

iii) गुणोत्तरे काढतायेण्यासाठी पुढील कोष्टके तयार करणे आवश्यक आहे .

a)मिमी पासून किमी पर्यंत

b) मि.ग्रॅ पासून कि. ग्रॅ पर्यंत

c)सेकंद, मिनिट, तास

d)तास, दिवस, आठवडा, महिना, वर्षे

e) घन सेमी व लीटर.

गुणोत्तराचा अर्थ

समजा,तुमच्या शिक्षकांनी तुमच्या संपूर्ण वर्गाला वेगवेगळया संख्यांच्या अशा जोड्या लिहायला

सांगितल्या की ,त्या दोन संख्य़ांचे गुणोत्तर 3:5 पाहिजे.

अशा वेगवेगळया जोड्या मिळणॆ शक्य आहे का?असल्यास त्यांची संख्या किती असेल?

तुम्ही अशा किती जोड्या लिहू शकाल?

तुमच्या हे लक्षात आले असेल की,सुरूवातीला ही गुणोत्तरे एकमेकांपेक्षा अगदी भिन्न वाटतात.

पण त्यांची संक्षिप्त रूपे काढल्यानंतरच, ती समान आहेत हे समजते.

किंवा असेही म्हणता येते की, एकच गुणोत्तर दर्शविण्याच्या ह्या वेगवेगळ्या पद्धती आहेत.

आता तुम्हाला कळले असेल की,

गुणोत्तराची किंमत न बदलता तेच गुणोत्तर कितीही वेगवेगळ्या पद्धतीने मांडता येते.

गुणधर्म:

$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$(k ही शून्येतर संख्या आहे.) हा अत्यंत उपयुक्त गुणधर्म येथे वापरला आहे.

दोन गुणोत्तरांची तुलना:

i) $\frac{7}{8}$ व $\frac{4}{5}$ यांची तुलना करू.

35 > 32 हे तुम्हाला माहित आहे.

या असमानतेच्या दोन्ही बाजूंना 40 ने भागू.

40 ही धन संख्या असल्याने क्रमसंबंध बदलणार नाही.

$$\frac{35}{40} > \frac{32}{40}$$

$$\therefore \frac{7}{8} > \frac{4}{5}$$

ii) $\frac{5}{13}$ व $\frac{4}{9}$ यांची तुलना करू.

45 < 52 हे तुम्हाला माहित आहे.

या असमानतेच्या दोन्ही बाजूंना 117 ह्या धन संख्येने भागू.

$$\frac{45}{117} < \frac{52}{117}$$

$$\frac{5}{13} < \frac{4}{9}$$

वरील उदाहरण (i) मधील गुणोत्तरे पहा.

त्यातील संख्यांवरून 35, 32 व 40 या संख्या कशा मिळवल्या असतील

त्यावर विचार करा.

आता उदाहरण (ii) मध्ये कळलेल्या प्रकारेच 45, 52 व 117 संख्या येथे

कशा मिळविल्या असतील हे कळले का?

हे समजले की, गुणोत्तरांच्या तुलनेने पुढील तीन नियम तुम्हाला पटतील.

(तिसऱ्या नियमालाच आपण तिरकस गुणाकार म्हणत असतो.)

नियम: i) जर a × d > b × c तर $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

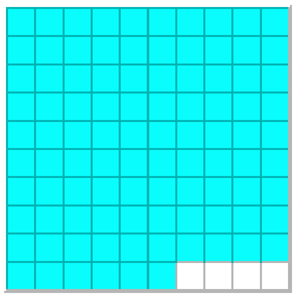
ii) जर a × d > b × c तर $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

iii) जर a × d = b × c तर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

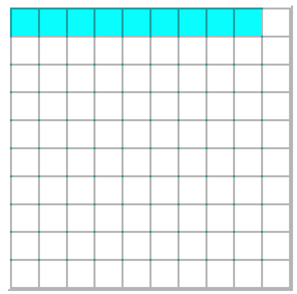
शेकडेवारी किंवा शतमान

खाली दिलेल्या प्रत्येक चौकटीत 100 चौरस आहेत. त्यातील रंगविलेल्या चौकटींची संख्या मोजा व त्या संख्येचे 100 शी असलेले गुणोत्तर लिहा

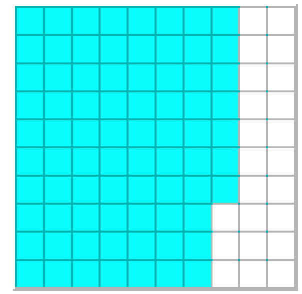
1



2



3



आता पुढील सारणी पूर्ण करा.

चौकट क्रमांक	रंगविलेल्या चौकटींची संख्या	एकूण चौकटींच्या संख्येशी गुणोत्तर	अपूर्णांकाच्या स्वरूपात गुणोत्तर	शेकडेवारी
1				
2				
3				

ज्या गुणोत्तरात दुसरे पद 100 असते,त्याला शतमान (शेकडेवारी) म्हणतात.

यावरून वर दिलेल्या सारणीचा शेवटाचा स्तंभ पूर्ण करा.

खालील उदाहरणे काळजीपूर्वक पहा.

i) $\frac{13}{20} = \frac{13\times5}{20\times5} = \frac{65}{100}$ = 65%

ii) $\frac{34}{50} = \frac{34\times2}{50\times2} = \frac{68}{100}$ = 68%

iii) 0.003 = $\frac{3}{1000} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1000}{10}} = \frac{0.3}{100}$ = 0.3%

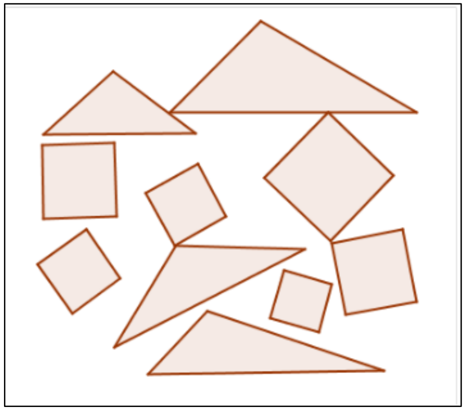
iv) $\frac{37}{200} = \frac{\frac{37}{2}}{\frac{200}{2}} = \frac{18.5}{100}$ = 18.5%

v) x% = $\frac{x}{100}$

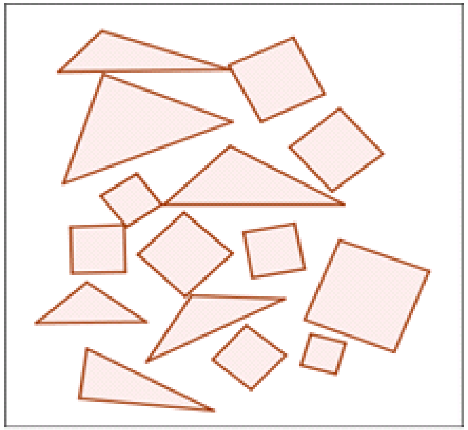
vi) x च्या y% = x × $\frac{y}{100}$

समान गुणोत्तरांचे गुणधर्म

आकृती 1



आकृती 2



खाली दिलेल्या सूचनांनुसार उत्तरे शोधा.

i) पहिल्या आकृतीवरून त्यामधील त्रिकोणांची संख्या व चौकोनांची संख्या मोजा.

आता $\frac{\text{चौकोनांचीसंख्या}}{\text{त्रिकोणांचीसंख्या}}$ हे गुणोत्तर **<u>संक्षिप्त रूपात लिहा.</u>**

या गुणोत्तराला $\frac{a}{b}$ हे नाव द्या.

आता याचप्रमाणे दुस-या आकृतीवरून त्यामधील त्रिकोणांची संख्या व चौकोनांची संख्या मोजा.

आता $\frac{\text{चौकोनांचीसंख्या}}{\text{त्रिकोणांचीसंख्या}}$ हे गुणोत्तर **संक्षिप्त रूपात लिहा.**

या गुणोत्तराला $\frac{c}{d}$ हे नाव द्या

यामध्ये, a ≠ पहिल्या आकृतीमधील चौकोनांची संख्या,

b≠ पहिल्या आकृतीमधील त्रिकोणांची संख्या

a≠ c व b ≠d असूनही

$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ **=**$\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$ **सत्य आहे किंवा नाही ते ठरवा.**

समान गुणोत्तरांचे गुणधर्म: व्यस्त क्रिया

T6_L5_A1

i) आता पुढील गुणोत्तरांची जोडी लिहा व त्यांधील समानता ठरवा.

पहिल्या आकृतीमधील $\frac{\text{त्रिकोणांची संख्या}}{\text{चौकोनांची संख्या}}$ या गुणोत्तराची किंमत **<u>संक्षिप्त रूपात</u>** लिहा.

ती $\frac{b}{a}$ ने दाखवा.

याचप्रमाणे दुस-या आकृतीमधील $\frac{\text{त्रिकोणांची संख्या}}{\text{चौकोनांची संख्या}}$ या गुणोत्तराची किंमत **<u>संक्षिप्त रूपात</u>**

लिहा. ती $\frac{d}{c}$ ने दाखवा. यातून मिळालेली समानता लिहा.

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ असेल तर $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ या क्रियेला 'व्यस्त क्रिया' म्हणतात.

समान गुणोत्तरांचे गुणधर्म: एकांतर क्रिया

T6_L5_A2

iii) पुढील दोन गुणोत्तरांच्या किंमती (**<u>संक्षिप्त रूपात</u>**) काढा.त्या रिकाम्या जागी भरा.

$$\frac{\text{पहिल्याआकृतीमधीलचौकोनांचीसंख्या}}{\text{दुस – याआकृतीमधीलचौकोनांचीसंख्या}} = \frac{a}{c} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{\text{पहिल्याआकृतीमधीलत्रिकोणांचीसंख्या}}{\text{दुस – याआकृतीमधीलत्रिकोणांचीसंख्या}} = \frac{b}{d} = \frac{\quad}{\quad}$$

या किंमतींवरून $\frac{a}{c}$ व $\frac{b}{d}$ यांमध्ये = , ≠ यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ असेल तर $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ या क्रियेला 'एकांतर क्रिया' म्हणतात.

समान गुणोत्तरांचे गुणधर्म: योग क्रिया

T6_L5_A3

iv) आता याचप्रमाणे पुढील दोन गुणोत्तरांच्या किंमती(**<u>संक्षिप्तरूपात)</u>** काढा. त्या रिकाम्या जागी भरा.

पहिल्या आकृतीमधील $\dfrac{\text{चौकोनांचीसंख्या}+\text{त्रिकोणांचीसंख्या}}{\text{त्रिकोणांचीसंख्या}} = \dfrac{a+b}{b} = \underline{\quad}.$

दुस-या आकृतीमधील $\dfrac{\text{चौकोनांचीसंख्या}+\text{त्रिकोणांचीसंख्या}}{\text{त्रिकोणांचीसंख्या}} = \dfrac{c+d}{d} = \underline{\quad}.$

या किंमतींवरून $\dfrac{a+b}{b}$ व $\dfrac{c+d}{d}$ यांमध्ये = , $\neq$ यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

जर $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ असेल तर $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$ या क्रियेला ;योग क्रिया’ म्हणतात.

समान गुणोत्तरांचे गुणधर्म: वियोग क्रिया

v) आता याचप्रमाणे पुढील दोन गुणोत्तरांच्या किंमती(**<u>संक्षिप्तरूपात)</u>** काढा.

त्या रिकाम्या जागी भरा.

पहिल्या आकृतीमधील $\frac{\text{चौकोनांचीसंख्या} - \text{त्रिकोणांचीसंख्या}}{\text{त्रिकोणांचीसंख्या}} = \frac{a-b}{b} = \frac{}{}.$

दुस-या आकृतीमधील $\frac{\text{चौकोनांचीसंख्या} - \text{त्रिकोणांचीसंख्या}}{\text{त्रिकोणांचीसंख्या}} = \frac{c-d}{d} = \frac{}{}.$

या किंमतींवरून $\frac{a-b}{b}$ व $\frac{c-d}{d}$ यांमध्ये = , ≠ यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ असेल तर $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ या क्रियेला 'वियोग क्रिया' म्हणतात.

समान गुणोत्तरांचे गुणधर्म: योग वियोग क्रिया

vi) याचप्रमाणे पुढील दोन गुणोत्तरांच्या किंमती (**<u>संक्षिप्तरूपात</u>**) काढा. त्या रिकाम्या जागी भरा.

पहिल्या आकृतीमधील $\dfrac{\text{चौकोनांचीसंख्या}+\text{त्रिकोणांचीसंख्या}}{\text{चौकोनांचीसंख्या}-\text{त्रिकोणांचीसंख्या}} = \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\quad}{\quad}$.

दुस-या आकृतीमधील $\dfrac{\text{चौकोनांचीसंख्या}+\text{त्रिकोणांचीसंख्या}}{\text{चौकोनांचीसंख्या}-\text{त्रिकोणांचीसंख्या}} = \dfrac{c+d}{c-d} = \dfrac{\quad}{\quad}$.

या किंमतींवरून $\dfrac{a+b}{a-b}$ व $\dfrac{c+d}{c-d}$ यांमध्ये = , ≠ यांपैकी योग्य चिन्ह लिहा.

जर $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ असेल तर $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$ या क्रियेला 'योग वियोग क्रिया' म्हणतात.

समान गुणोत्तरांचे गुणधर्म

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ असेल तर खालील सारणी पूर्ण करा.

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	.... क्रिया
$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	.... क्रिया
$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$	.... क्रिया
$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$	.... क्रिया
$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$	.... क्रिया

योग – वियोग क्रियेचा व्यत्यास

आपल्याला माहित आहे की, जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ दिले असेल तर त्यांवर योग- वियोग क्रिया करून,

$\frac{\mathrm{a+b}}{\mathrm{a-b}} = \frac{\mathrm{c+d}}{\mathrm{c-d}}$ ही समानता मिळते.

पण जर $\frac{\mathrm{a+b}}{\mathrm{a-b}} = \frac{\mathrm{c+d}}{\mathrm{c-d}}$ दिले असेल तर त्यावर पुन्हा तीच म्हणजे योग-वियोग क्रिया करून कोणती गुणोत्तरे मिळतात ते पाहू.

$$\frac{(a+b)+(a-b)}{(a+b)-(a-b)} = \frac{(c+d)+(c-d)}{(c+d)-(c-d)}$$

$$\frac{2a}{2b} = \frac{2c}{2d}$$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ही मूळची गुणोत्तरे परत मिळाली.

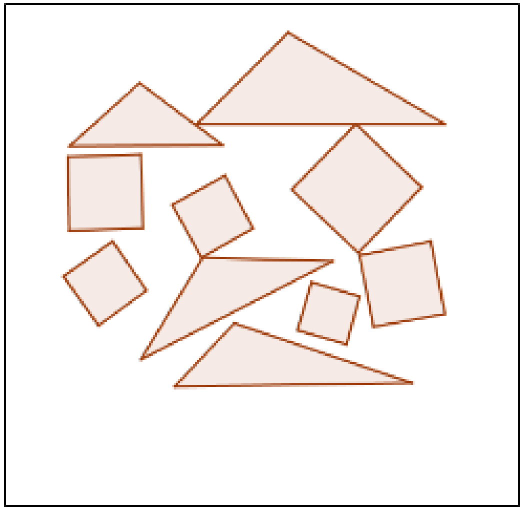
(टीप: उदाहरणे सोडविताना हा व्यत्यास लक्षात ठेवा.)

समान गुणोत्तरांचा सिद्धांत

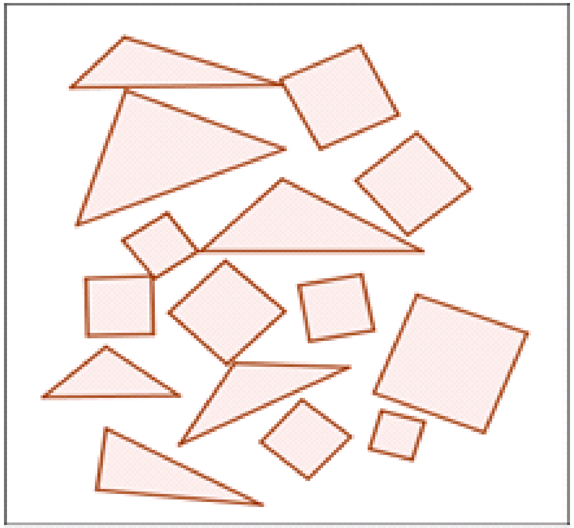
T6_L6

ह्या कृतीसाठीही आपण त्याच दोन आकृत्या घेणार आहोत.

आकृती: 1



आकृती: 2



आकृती 1 मध्ये, $\frac{a}{b} = \frac{\text{चौकोनांची संख्या}}{\text{त्रिकोणांची संख्या}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$......... (I)

आकृती 2 मध्ये, $\frac{c}{d} = \frac{\text{चौकोनांची संख्या}}{\text{त्रिकोणांची संख्या}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. .... (II)

समजा, **दोन्ही गटातील आकृत्यांचा एक गट** तयार केला.

या मिळालेल्या नवीन गटात चौकोनांच्या संख्येचे त्रिकोणांच्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर काढू.

$$\frac{\text{चौकोनांची संख्या}}{\text{त्रिकोणांची संख्या}} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{6+9}{4+6} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

(हे गुणोत्तर विधान (I) व विधान(II) मधील गुणोत्तरांशी समान आहे.)

खालील उत्तरांचे बारकाईने निरीक्षण करा.

i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

ii) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{6+9}{4+6} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

iii) $\frac{5a+2c}{5b+2d} = \frac{5(6)+2(9)}{5(4)+2(6)} = \frac{30+18}{20+12} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2}$

iv) $\frac{2a-7c}{2b-7d} = \frac{2(6)-7(9)}{2(4)-7(6)} = \frac{12-63}{8-42} = \frac{-51}{-34} = \frac{3}{2}$

i) वरील उत्तरांचे तुम्ही बारकाईने निरीक्षण केले का?

ii) दुस-या पायरी मध्ये आपण गुणोत्तरांची बेरीज केली आहे का?

नाही. कारण दोन समान व शून्येतर अपूर्णांकांची बेरीज त्यांच्या दुप्पट झाली असती.

iii) आलेल्या निष्कर्षाची तीन गुणोत्तरांसाठी सत्यता तपासून पाहू.

तीन समान गुणोत्तरे पाहू. $\frac{5}{8} = \frac{15}{24} = \frac{-35}{-56}$

पहिल्या गुणोत्तराच्या अंशाला व छेदाला 4 ने गुणले, दुस-या गुणोत्तराच्या अंशाला व छेदाला (-3) ने गुणले व तिस-या गुणोत्तराच्या अंशाला आणि छेदाला 2 ने गुणले तर आपल्याला खालील गुणोत्तर मिळते.

$$\frac{4(5)+(-3)(15)+2(-35)}{4(8)+(-3)(24)+2(-56)} = \frac{20+(-45)+(-70)}{32+(-72)+(-112)} = \frac{-95}{-152} = \frac{-19\times5}{-19\times8} = \frac{5}{8}$$

iv) आता, प्रत्येकाने 4, -3 आणि 2 या पेक्षा वेगळे शून्येतर स्थिरांक घ्या.

वरील प्रमाणेच नवीन गुणोत्तर तयार करा आणि त्याला सोपे रुप द्या.

v) या नवीन गुणोत्तराची किंमत काय?

निष्कर्ष: समजा ,$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ हे तीन समान गुणोत्तरे आपल्याला दिलेली आहेत.

l, m, n हे कोणतेही तीन शून्येतर स्थिरांक घेऊ

नवीन गुणोत्तर = $\frac{la+mc+ne}{lb+md+nf}$ हे गुणोत्तर देखील वरील तीन गुणोत्तरांशी समान

$(lb + md + nf \neq 0)$

या समानतेचे कारण जाणून घेण्यास तुम्ही उत्सुक आहात का? त्यासाठी आपण एक सोपी ‘k’

पद्धत शिकू या.

‘K’ पद्धत

समजा , $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ हे तीन समान गुणोत्तरे दिलेली आहेत.

l, m, n हे कोणतेही तीन शून्येतर स्थिरांक घ्या. प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत k मानू.

$\therefore \frac{a}{b} = k$ $\therefore$ तिरकस गुणाकार करून a = bk.

(तुम्ही मनात $\frac{6}{3}$ = 2 हे उदाहरण घेतले तर 6 = 3 × 2 असा अर्थ वरीलa = bk चा आहे.)

त्याचप्रमाणे $\frac{c}{d} = k$ $\therefore$तिरकस गुणाकार करून c= k d

त्याचप्रमाणे $\frac{e}{f} = k$ $\therefore$तिरकस गुणाकार करून e= k f.

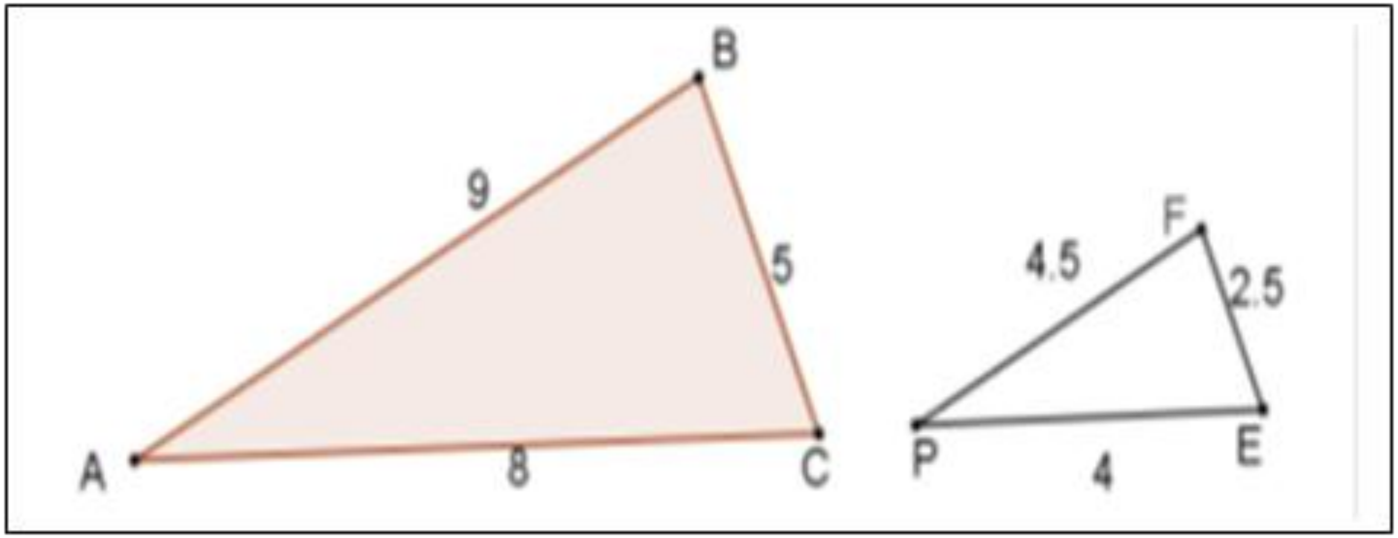
वरील किंमती गुणोत्तरामध्ये घालू.

$\therefore \frac{la+mc+ne}{lb+md+nf} = \frac{lkb+mkd+nkf}{lb+md+ne} = \frac{k(lb+md+ne)}{(lb+md+ne)}$ = k = प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत

अशा रीतीने आपण समान गुणोत्तराच्या सिद्धांताची सिद्धता मिळवली आहे.

समरूप त्रिकोणांच्या बाबतीत 'समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताचे' उपयोजन.

1)



वरील आकृतीत ΔABC ~ΔPEF

त्यांच्या संगत बाजूंचे गुणोत्तर काय असेल?

$\frac{9}{4.5} = \frac{5}{2.5} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$ = 2:1 आहे.

ΔABC च्या परिमितीचे ΔPEF च्या परिमितीशी असलेले गुणोत्तर काय?

$$\frac{\Delta ABC \text{ ची परिमिती}}{\Delta\ PEF \text{ ची परिमिती}} = \frac{AB+BC+CA}{PF+FE+EP} = \frac{9+5+8}{4.5+2.5+4} = \frac{22}{11} = \frac{2}{1} = 2:1$$

खालील विधान पूर्ण करा.

जेंव्हा दोन त्रिकोण समरूप असतात तेंव्हा त्यांच्या परिमितीचे गुणोत्तर = ...गुणोत्तर.

T6_L6_A2

2. समान गुणोत्तराच्या सिद्धांताचे इतर उपयोजन समीकरणे सोडविण्यासाठी केले जाते.

सोडवा: $\frac{4x^2 \ +8x+3}{6x^2+18x+5} = \frac{2x+4}{3x+9}$

x = 0 ही समीकरणाची उकल आहे किंवा नाही हे पाहू. (म्हणजे या किंमतीने समीकरण सत्य होते का ते पाहू.)

x =0 ही किंमत दिलेल्या समीकरणात घालू.

डावी बाजू. = $\frac{4x^2 \ +8x+3}{6x^2+18x+5} = \frac{4(0)^2 \ +8(0)+3}{6(0)^2+18(0)+5} = \frac{3}{5}$

उजवी बाजू = $\frac{2x+4}{3x+9} = \frac{2(0)+4}{3(0)+9} = \frac{4}{9}$

म्हणजेच, डावी बाजू $\neq$ उजवी बाजू.

$\therefore\ x \neq 0 \quad \therefore\ 2x \neq 0$

$$\frac{4x^2 + 8x + 3}{6x^2 + 18x + 5} = \frac{2x+4}{3x+9}$$

या प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत = k मानू.

समान गुणोत्तराच्या सिध्दांतानुसार, पहिल्या गुणोत्तराच्या अंशाला तसेच छेदाला 1 ने,

दुस-या गुणोत्तराच्या अंशाला तसेच छेदाला (-2x) ने गुणू.

$$k = \frac{(4x^2 + 8x + 3) - 2x(2x + 4)}{(6x^2 + 18x + 5) - 2x(3x + 9)} = \frac{4x^2 + 8x + 3 - 4x^2 - 8x}{6x^2 + 18x + 5 - 6x^2 - 18x}$$

$\therefore$ k = $\frac{3}{5}$

आता समीकरणातील प्रत्येक गुणोत्तर = $\frac{3}{5}$ याचा उपयोग करू.

$\therefore \frac{2x+4}{3x+9} = \frac{3}{5}$ हे आता सोपे झालेले समीकरण सोडवू.

तिरकस गुणाकाराने,

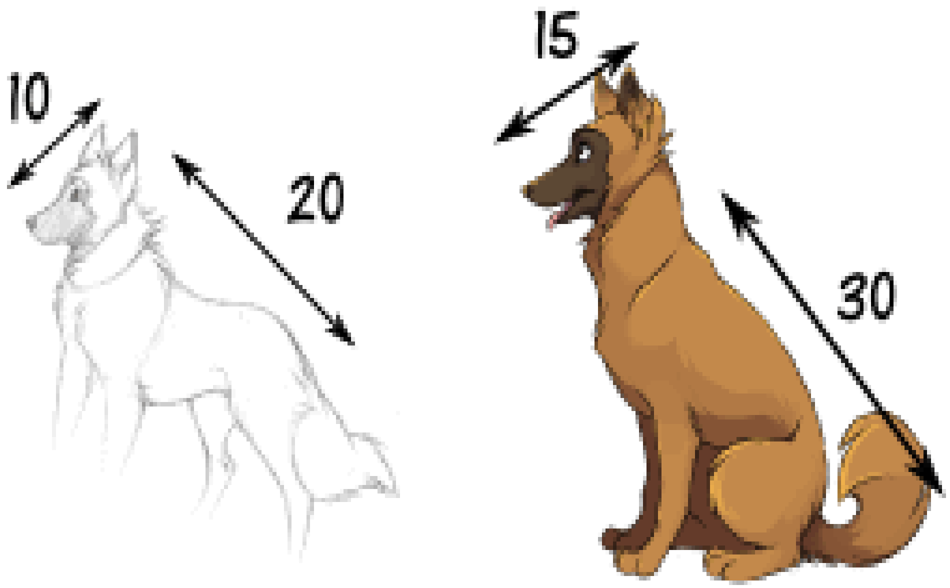
$5(2x+4) = 3(3x+9)$.

$\therefore 10x + 20 = 9x + 27$.

$\therefore 10x - 9x = 27 - 20$.

$\therefore x = 7$.

प्रमाण



$$\frac{10}{20} = \frac{15}{30}$$

'प्रमाण' म्हणजे थोडक्यात 'समान गुणोत्तरे'!

गुणधर्म

येथे, $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ $\therefore \frac{10}{20} = \frac{15}{30}$

10, 20,15, 30 या चार संख्या प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

30 ला चतुर्थ प्रमाण पद_तर 15 ला तृतीय प्रमाणपद_म्हणतात.

10 व 30 ला **प्रमाणाची अंत्यपदे** व 20,15ला प्रमाणाची **मध्यमपदे किंवा मध्यपदे** म्हणतात.

अंत्यपदांचा गुणाकार = 10 × 30 = 300 व मध्यमपदांचा गुणाकार = 20 × 15

हे दोन्ही गुणाकार समान असतात.

यावरून प्रमाणातील संख्यांचा गुणधर्म कळतो की,

अंत्यपदांचा गुणाकार = मध्यमपदांचा गुणाकार.

प्रमाणाची संकल्पना आपण भूमितीत कशी उपयोगात आणतो?

बरोबर, आपण 'त्रिकोणांची समरुपता' शिकताना त्यांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात असे म्हणतो ना ती हीच संकल्पना असते. याचा अर्थ समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजूंच्या लांबींची तीनही गुणोत्तरे समान असतात.

व्याख्या:

जर a, b, c, d या चार संख्या अशा असतील की, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर त्या संख्या प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

प्रमाण व ‘K’ पद्धत

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ असेल तर a, b, c व d प्रमाणात आहे असे म्हणतात.

‘d’: चतुर्थ प्रमाणपद, ’c’ तृतीयप्रमाणपद म्हणतात.

a व d : प्रमाणाची अंत्यपदे आणि b व d: प्रमाणाची मध्यमपदे आहेत असे म्हणतात.

गुणधर्म: $a \times d = b \times c$ म्हणजेच अंत्यपदांचा गुणाकार = मध्यमपदांचा गुणाकार

[याला तिरकस गुणाकार असेही म्हणतात.]

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ = k मानले तर a = kb…….(i) व c = kd ………….(ii)

ही समीकरणे मिळतात. या किंमती घालून अनेक समानता सिध्द करणे सोपे होते.

परंपरित प्रमाण

जर तुम्हाला सांगितले की, 4,6,9 या संख्या वापरून दोन समान गुणोत्तरे लिहा.

तुम्हाला जमेल का ? बहुतेक तुम्हाला हे कळले असेल की, आता आपल्याला एक संख्या दोनदा वापरावी लागेल बघा तुमचे उत्तर असे आहे का:

$\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$. 4 × 9 = 6× 6 म्हणजेच $6^2 = 4 \times 9$.

यामध्ये 4, 6, 9 या संख्या परंपरित प्रमाणत आहेत असे म्हणतात.

4 व 9 ला प्रमाणाची अंत्यपदे व 6 ला मध्यपद किंवा 4 व 9 चे **भूमिती-मध्य** म्हणतात.

व्याख्या: जर a, b, c या तीन धन संख्या अशा असतील की, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ तर a, b, c या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत असे म्हणतात. 'a'व '''ला अंत्यपदे आणि 'b' ला मध्यम प्रमाणपद किंवा 'a' व 'c' चा **भूमिती- मध्य** म्हणतात.

परंपरित प्रमाण व ‘k’ पद्धत

जर $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ = k मानले तर b = ck व a = bk = a k^2 ही समीकरणे मिळतात.या किंमती घालून अनेक समानता सिध्द करणे सोपे होते.

10 ही एक धन संख्या घेऊ.

ती ज्यांचा भूमिती –मध्य असते अशा अनेक जोड्या तुम्हाला शोधता येतील का?

त्या सर्व जोड्या मांडा. म्हणजेच ज्यांचा गुणाकार 10^2 = 100 असतो त्या जोड्या शोधा.

किती जोड्या मिळाल्या?

त्यांपैकी अशी जोडी सांगा की, त्यांची बेरीज = 25

त्यांपैकी अशी जोडी सांगा की, त्यांची बेरीज = 52

[टीप: भूमितीमध्य या संकल्पनेचा उपयोग भूमितीमध्ये कसा होतो ते तुम्हाला इयत्ता 10 वी त कळेल. जर तुम्हाला ते जाणून घावयाचे असेल तर दहावीच्या भूमितीचे पाठ्यपुस्तक पहा.]

Exercise:

गट I) 1 गुणांचे प्रश्न:

i) 48% या संख्येला व्यवहारी अपूर्णांकाचे रूप द्या.

ii) 32, 36, 96, x या संख्या प्रमाणात असतील तर x ची किंमत काढा.

iii) 2.5 मी. चे 25 सेमीशी गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

iv) $\frac{m}{n} = \frac{13}{5}$ यावर योग – वियोग क्रियेने मिळणारे गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

v) $\frac{a}{11} = \frac{b}{22}$ या समान गुणोत्तरांवर एकांतर क्रिया केल्यास मिळणारी समान गुणोत्तरे

लिहा.

गट II) 2 गुणांचे प्रश्न:

i) जर (30 + x) चे (23 + x) शी गुणोत्तर 5 : 4 असेल तर x ची किंमत काढा.

ii) जाई आणि जुई यांची वये अनुक्रमे 14 वर्षे व 10 वर्षे आहेत. आणखी किती वर्षांनंतर त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 5 : 4 होईल?

iii) जर $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ तर $\frac{a-b}{b}$ व $\frac{a+b}{b}$ या गुणोत्तरांच्या किंमती काढा.

iv) जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{3a-2c}{3b-2d} = \frac{a+c}{b+d}$ दाखवा. (k पद्धतही वापरू शकता.)

गट III) 3 गुणांचे प्रश्न:

i) जर $\frac{a}{b} = \frac{9}{5}$ तर $\frac{5a+3b}{5a-3b}$ या गुणोत्तराची किंमत काढा.

ii) जर (x + 4), (x + 12), (x – 1), (x + 5) या संख्या प्रमाणात असतील तर x ची किंमत काढा.

iii) bcx = cay = abz असेल व या सर्व संख्या शून्येतर असतील तर या प्रत्येकीस कोणत्या संख्येने भागल्यास $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ ही समानता मिळेल?

iv) जर $\frac{5a+2b}{5a-2b} = \frac{5}{1}$ तर पुढील गुणोत्तरांच्या किंमती काढा:

i) $\frac{a}{b}$

ii) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

गट IV) 4 गुणांचे प्रश्न:

i) जर (23 – x) हा (28 – x) व (19 – x) चा भूमितीमध्य असेल तर

x = किती?

ii) जर $\frac{x}{x-2y+3z}$ = $\frac{y}{y-2z-3x}$ = $\frac{z}{z-2x-3y}$ व x + y +z ≠ 0 तर प्रत्येक गुणोत्तर = $\frac{1}{2}$

दाखवा.

iii) पुढील समीकरण सोडवा. जर $\frac{4x^2+8x+3}{6x^2+18x+5}$ = $\frac{2x+4}{3x+9}$

iv) जर a, b, c परंपरित प्रमाणात असतील तर $\frac{b}{b+c}$ = $\frac{a-b}{a-c}$

Assessment:

खालील प्रत्येक उपप्रश्नासाठी **(a), (b), (c) , (d)** असे चार पर्याय दिले आहेत त्यातील अचूक पर्याय ओळखा.

1) दोन संख्यांचे गुणोत्तर **5:7** असून त्यांची बेरीज **60** आहे तर त्यांपैकी मोठी संख्या = ...

a) 7

b) 25

c) 35

d) $\frac{7}{5}$

2) ($\frac{7}{17}$: $\frac{21}{34}$) या गुणोत्तराचे संक्षिप्त रूप =.......

a) $\frac{147}{578}$

b) 3 : 2

c) $\frac{14+21}{34}$

d) 2 : 3

3) जर $\frac{a}{b} = \frac{9}{2}$ तर $\frac{4a+3b}{3b}$ चे संक्षिप्त रूप = ...

a) $\frac{7}{6}$

b) $\frac{7}{1}$

c) $\frac{6}{1}$

d) दिलेल्या माहितीवरून काढता येणार नाही.

4) 3.6, 4.8, x, 7.2 या संख्या प्रमाणात असतील तर x = ...

a) 6.0

b) 5.4

c) 9.6

d) 4.8

5) जर $\frac{x}{y} = \frac{6}{7}$ तर $\frac{7x-6y}{7x+6y}$ = ...

a) 0

b) $\frac{36}{49}$

c) $\frac{49}{36}$

d) $\frac{7}{6}$

T6_L10

6) जर 8, x, 18 परंपरित प्रमाणात असतील तर x = ...

a) 13

b) 144

c) 10

d) 12