

संकल्पना चित्र:
प्रकरण 7 : सांख्यिकी

पूर्वज्ञान: कच्ची संख्यात्मक माहिती, त्यावरून ताळ्याच्या खुणा, अवर्गीकृत सारणी तयार करणे, अवर्गीकृत सामग्रीचे मध्यमान काढणे.

संख्याशास्त्र :समूहाविषयी असलेल्या संख्येच्या स्वरूपातील माहितीचे संकलन, विश्लेषण, वर्गीकरण

प्राथमिक सामग्री:
ठराविक उद्देशाने योजना आखून सामग्रीचे संकलन.

दुय्यम सामग्री:
उपलब्ध साधन सामग्री वरून सामग्रीचे संकलन.

कच्ची सामग्री

सामग्रीचे वर्गीकरण:

- i) सामग्रीतील संख्यांचा चढता किंवा उतरता क्रम:
- ii) अवर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी:
- iii) वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी:
 - a) समावेशक पद्धती (असलग वर्ग) :
 - b) असमावेशक पद्धती (सलग वर्ग) :

सामग्रीचे चित्ररूप व आलेखरूप प्रतिरूपण :

- i) विभाजित स्तंभाकृती :
- ii) जोडस्तंभाकृती:
- iii) शतमान स्तंभाकृती:

केंद्रीय प्रवृत्ति व तिचे मापन:

केंद्रीय प्रवृत्ति: जेव्हा एखाद्या विशिष्ट गटाची सांख्यिक सामग्री आपण गोळा करतो, तेव्हा असे आढळते की, तेथे अशी एक संख्या नेहमी असते जिच्या भोवती त्या सामग्रीतील इतर संख्यांची दाटी झालेली असते. गटाच्या अशा प्रवृत्तीला तिची **केंद्रीय प्रवृत्ति** म्हणतात.

मापनाचे प्रकार

मध्यक :

प्राप्तांकांची मांडणी चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने केल्यास केंद्रस्थानी येणारा प्राप्तांक.

जेव्हा प्राप्तांकांची संख्या (n),

- विषम असेल तेव्हा, मध्यक = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$
- सम असेल तेव्हा, मध्यक = $\left(\frac{n}{2}\right)$ व $\left(\frac{n+2}{2}\right)$ व्या क्रमांकावर येणाऱ्या संख्यांची सरासरी

मध्य :

दिलेल्या प्राप्तांकांची सरासरी काढून येणारी संख्या.

प्राप्तांकांची संख्या (n),

$$\text{मध्य} = \frac{\sum xi}{n} \text{ (अवर्गीकृत)}$$

$$= \frac{\sum fixi}{n} \text{ (वर्गीकृत)}$$

बहुलक :

सर्वात जास्त वारंवारता असणारा प्राप्तांक.

संचित वारंवारता

.....पेक्षा कमी

संचित वारंवारता

.....पेक्षा जास्त

प्रकरण : 7 सांख्यिकी

सांख्यिकीची ओळख:

संपूर्ण देशभरातून ही माहिती
गोळा केली तर कोट्यावधी
संख्या जमतील. इतक्या संख्या
जमवून त्याचा पुढे कसा काय
उपयोग होणार ?

हे काम संगणकावर
केले तरी इतके मोठे
काम
कसे करणार ?



माहितीचे संकलन: नमुना

त्या म्हणाल्या, “ त्यासाठी आपण तुमच्या घरातील गाईंची संख्या गोळा करू.”
 यावर वर्गातील दोन विद्यार्थी उभे राहिले आणि त्यांनी सांगितले की,
 आमच्याकडे गाई नाहीत. यावर शिक्षिका म्हणाल्या, “मग तुम्ही 0 असे उत्तर
 द्या. तुमच्या वर्गातील मुलांची संख्या आहे 50 म्हणजे आपल्याकडे 50 नोंदी
 जमतील. मुलांनी सांगितलेल्या संख्या पुढील प्रमाणे:-

7, 6, 4, 3, 5, 1, 2, 5, 4, 3, 3, 2, 1, 4, 3,
 2, 5, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 0, 2, 1, 4, 3, 3, 1,
 1, 5, 6, 7, 3, 2, 4, 6, 5, 1, 0, 2, 1, 3, 4,
 5, 2, 1, 2, 3.

विद्यार्थ्यांच्या नोंदी बघून शिक्षिका विद्यार्थ्यांना म्हणाल्या की, ह्या नोंदी म्हणजे

तुमची कच्ची सामग्री होय. इयत्ता 8 वी मध्ये तुम्ही ताळ्याच्या खुणांचा उपयोग

करून वारंवारता सारणी कशी तयार करायची याबाबत शिकला आहात.

आता त्याचा उपयोग करून दिलेल्या माहितीची सारणी तयार करा.

म्हणजे या नोंदींबद्दल आपल्याला अधिक माहिती कळेल.

यामध्ये सर्वांत लहान संख्या 0 आहे व सर्वांत मोठी संख्या 7 आहे.

यावरून सारणी बनवू.

कच्च्या सामग्रीचे वर्गीकरण: अवर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी:

T7_L4

गाईची संख्या	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
		$N =$ सर्व वारंवारंतेची बेरीज $=$

वरील सारणी पूर्ण झाल्यानंतर वर्गातील एका विद्यार्थ्याला प्रश्न पडला, आपल्या वर्गातील मुलांची संख्या 50 आहे. पण जर प्राप्तांकांची संख्या खूप मोठी असेल तर अशा सर्व नोंदींची सारणी तयार करणे किचकट होईल. अशा वेळेस काय करायचे?

जर कच्च्या सामग्रीतील प्राप्तांकांची संख्या खूप जास्त असेल किंवा प्राप्तांक दशांश अपूर्णांकांच्या स्वरूपातील असतील तर त्यांचे सोईस्कर गट पाडतात.

या उदाहरणात 50 च नोंदी असल्याने खालील पद्धतीने पाडता येतील.

0 - 1, 1 - 2, 2 - 3, 3 - 4, 4 - 5, 5 - 6, 6 - 7

सलग वर्ग किंवा असमावेशक पद्धती:

एका विद्यार्थ्याने विचारले, “माझ्याकडे दोन गाई आहेत तर त्याची नोंद कोणत्या गटात करावी ते कळत नाही.”

त्यावर शिक्षिका म्हणाल्या, “ती नोंद 2 – 3 या गटात करतात. आता यावरून 5 गाईंची नोंद कोणत्या वर्गात करावी हे सांग.” त्याने सांगितले, “5 – 6 या गटात करणे बरोबर होईल.”

वर्ग	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता
0-1		
1-2		
2-3		
3-4		
5-6		
6-7		

हे काम झाल्यावर एक मुलगी म्हणाली, “याहून सोपे म्हणजे 0 – 7 असा एकच गट करावा.”

तिला एका मुलाने सांगितले की, असे केल्याने काम सोपे होईल पण त्यातून काहीच नवीन माहिती कळणार नाही.

वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी : संबंधित व्याख्या व माहिती

- 1) याच गटांना संख्याशास्त्रात 'वर्ग' म्हणतात.
- 2) त्यातील सर्वात लहान संख्येला खालची वर्गमर्यादा व सर्वात मोठ्या संख्येला वरची वर्गमर्यादा म्हणतात.
- 3) दोन लगतच्या वर्गांच्या खालच्या वर्गमर्यादातील किंवा त्यांच्या वरच्या वर्गमर्यादातील फरकाला 'वर्ग अवकाश' किंवा 'वर्गांतर' म्हणतात.
- 4) वर्गांची निवड अशी करतात.
 - i) वर्गांची संख्या साधारणपणे 5 आणि 10 च्या दरम्यान असावी.
 - ii) शक्यतो वर्ग अवकाश (वर्गांतर) सारखे असावे.

समावेशक पद्धती (असलग वर्ग)	असमावेशक पद्धती (सलग वर्ग)
0 - 4	0 - 5
5 - 9	5 - 10

$$\begin{aligned} \text{वरील दोन्ही उदाहरणात वर्गांतर} &= 5 - 0 = 9 - 4 = 5 \\ &= 5 - 0 = 10 - 5 = 5 \end{aligned}$$

0 - 4, 5 - 9,..... असे असलग वर्ग असल्यास ते सलग करून घेणे अनेकदा आवश्यक असते.

(विशेषतः आलेख काढण्यासाठी) ते पुढीलप्रमाणे सलग करून घेतात. 0.5 - 4.5, 4.5 - 9.5,

पहिल्या गटातील 0.5 ला खरी खालची वर्गमर्यादा व 4.5 ला खरी वरची वर्गमर्यादा म्हणतात.

केंद्रीय प्रवृत्ती:

इयत्ता 9 वी तील 40 मुलांच्या वयांच्या (पूर्ण वर्षातील) नोंदी दिलेल्या आहेत.

14, 15, 16, 14, 14, 15, 15, 16, 14, 15, 14, 15, 15, 14, 14,
 14, 16, 14, 15, 17, 15, 14, 14, 15, 14, 13, 17, 14, 15, 14,
 14, 16, 15, 14, 15, 15, 13, 14, 16, 14

वरील प्राप्तांकांचे निरीक्षण केल्यास त्या-त्या वयोगटातील मुलांची संख्या पटकन लक्षात येत नाही. त्यासाठी आपण वरील प्राप्तांकांचे सोईस्कर आकाराचे गट पाडू.

वर्ग	वारंवारता
13-14	2
14-15	18
15-16	13
16-17	05

आता वरील सारणीचे निरीक्षण करा. (14-15) गटावरून काय दिसून येते?

(14-15) वयोगटातील मुलांची संख्या सर्वात जास्त दिसून येते. म्हणजेच काय

तर, (14-15) वर्षे वयोगटामध्ये संख्यांची दाटी झालेली दिसून येते. सर्व

साधारणपणे माहितीचे वर्गीकरण केल्यावर अशा संख्या केंद्रस्थानी एकवटलेल्या

दिसून येतात. त्यालाच त्या सामग्रीची **केंद्रीय प्रवृत्ती** म्हणतात.

सामग्रीतील ज्या संख्येभोवती नोंदींची गर्दी असते त्या संख्येला त्या सामग्रीची

केंद्रीय प्रवृत्तीदर्शक संख्या म्हणतात.

मध्य (अवर्गीकृत सामग्री):-

जर x_1, x_2, \dots, x_n या n नोंदी संख्या असतील तर त्यांचा 'मध्य' खालील सूत्राने काढतात व तो ' \bar{x} ' ने दाखवतात.

$$\therefore \text{मध्य} = \bar{x} = \frac{\text{सर्व प्राप्तांकांची बेरीज}}{\text{सर्व प्राप्तांकांची संख्या}}$$

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)}{n}$$

$$= \frac{\sum xi}{n}$$

(यामध्ये $x_1 + x_2 + \dots + x_n =$ सर्व प्राप्तांकांची बेरीज), व $n =$ सर्व प्राप्तांकांची संख्या म्हणजेच दिलेल्या प्राप्तांकांची सरासरी म्हणजे त्या प्राप्तांकांचा 'मध्य' होय. सरासरी, मध्यमान हे मध्य साठी पर्यायी शब्द आहेत.¹⁵

अवर्गीकृत सामग्रीचा मध्य कसा काढतात हे खालील उदाहरणावरून पाहू.

रामने फळाच्या दुकानातून दहा डाळींबे आणली व त्यांचे वजन (ग्रॅम मध्ये)

खालील प्रमाणे असेल तर त्यांच्या वजनाचा 'मध्य' काढू.

200, 225, 250, 220, 285, 280, 275, 300, 295, 270

वरील उदाहरणात, सर्व प्राप्तांक खालील प्रमाणे आहेत.

$x_1 = 200$, $x_2 = 225$, $x_3 = 250$, $x_4 = 220$, $x_5 = 285$, $x_6 = 280$,

$x_7 = 275$, $x_8 = 300$, $x_9 = 295$, $x_{10} = 270$

सर्व प्राप्तांकांची संख्या $n = 10$ आहे.

म्हणून अवर्गीकृत सामग्रीचा मध्य काढण्याच्या सूत्राचा उपयोग करू.

$$\therefore \text{मध्य} = \bar{x} = \frac{\text{सर्व प्राप्तांकांची बेरीज}}{\text{प्राप्तांकांची संख्या}}$$

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{10})}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{(200 + 225 + 250 + 220 + 285 + 280 + 275 + 300 + 295 + 270)}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{2600}{10}$$

$$\bar{x} = 260$$

म्हणून वरील अवर्गीकृत सामग्रीचा 'मध्य' 260 आहे.

अवर्गीकृत सामग्रीत प्राप्तांकांची वारंवारता काढून 'मध्य' शोधणे:

T7_L7_A1

पुढील कच्च्या सामग्रीचे अवर्गीकृत वारंवारता सारणीत रूपांतर केल्यास 'मध्य' काढण्याची रीत तयार करू.

14, 15, 16, 14, 14, 15, 15, 16, 14, 15, 14, 15, 15, 14,

14, 14, 6, 14, 15, 17, 15, 14, 14, 15, 14, 13, 17, 14,

15, 14, 14, 16, 15, 14, 15, 15, 13, 14, 16, 14

वरील सामग्रीचे निरीक्षण केल्यास आपल्याला असे दिसून येते की,

13, 14, 15, 16 व 17 हे प्राप्तांक पुन्हा पुन्हा आलेले आहेत.

या सामग्रीचा मध्य काढण्यासाठी प्रथम सर्व प्राप्तांकांची बेरीज पुढील प्रमाणे मांडू.

$$\begin{aligned}
 \sum x_i &= (13 + 13) + (14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + \\
 &\quad 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14) + (15 + 15 + \\
 &\quad 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15) + \\
 &\quad (16 + 16 + 16 + 16 + 16) + (17 + 17) \\
 &= 13(2 \text{ वेळा}) + 14(18 \text{ वेळा}) + 15(13 \text{ वेळा}) + 16(5 \text{ वेळा}) + 17(2 \text{ वेळा}) \\
 &= 26 + 252 + 195 + 80 + 34 \\
 &= 587 = (\text{प्रत्येक संख्या} \times \text{तिची वारंवारता}) \text{ या गुणाकारांची बेरीज} \\
 &= \sum f_i x_i
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum f_i x_i = 587$$

हीच माहिती सारणी केल्यास खाली दाखविल्याप्रमाणे अधिक सोपी दिसेल व त्यावरून सूत्रही मिळेल.

प्राप्तांक (x_i)	वारंवारता (f_i)	प्राप्तांक \times वारंवारता ($f_i \times x_i$)
$x_1 = 13$	$f_1 = 02$	$(f_1 \times x_1) = 13 \times 2 = 26$
$x_2 = 14$	$f_2 = 18$	$(f_2 \times x_2) = 14 \times 18 = 272$
$x_3 = 15$	$f_3 = 13$	$(f_3 \times x_3) = 15 \times 13 = 195$
$x_4 = 16$	$f_4 = 05$	$(f_4 \times x_4) = 16 \times 5 = 80$
$x_5 = 17$	$f_5 = 02$	$(f_5 \times x_5) = 17 \times 2 = 34$
	$n = \sum f_i =$ सर्व प्राप्तांकांच्या वारंवारतांची बेरीज $= (02 + 18 + 13 + 05 + 02)$ $= 40$	$\sum (f_i \times x_i) =$ $(26 + 272 + 195 + 80 + 34)$ $= 587$

वरील सारणीचे निरीक्षण केल्यास असे दिसून, येथे x_1, x_2, \dots, x_5 ह्या

असून त्यांच्या वारंवारता f_1, f_2, \dots, f_5 आहेत.

वरील सामग्रीचा मध्य =

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5} \\ &= \frac{\sum(fi \times xi)}{\sum fi} \\ &= \frac{(13 \times 2) + (14 \times 18) + (15 \times 13) + (16 \times 5) + (17 \times 2)}{(02 + 18 + 13 + 05 + 02)} \\ &= \frac{(26 + 252 + 195 + 80 + 34)}{40} \\ &= \frac{587}{40} = 14.675\end{aligned}$$

म्हणून दिलेल्या सामग्रीचा 'मध्य' 14.675 आहे.

मध्यक

व्याख्या:

दिलेले प्राप्तांक चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडले तर सामग्रीच्या मध्यभागी येणाऱ्या संख्येला त्या सामग्रीचा 'मध्यक' (median) म्हणतात.

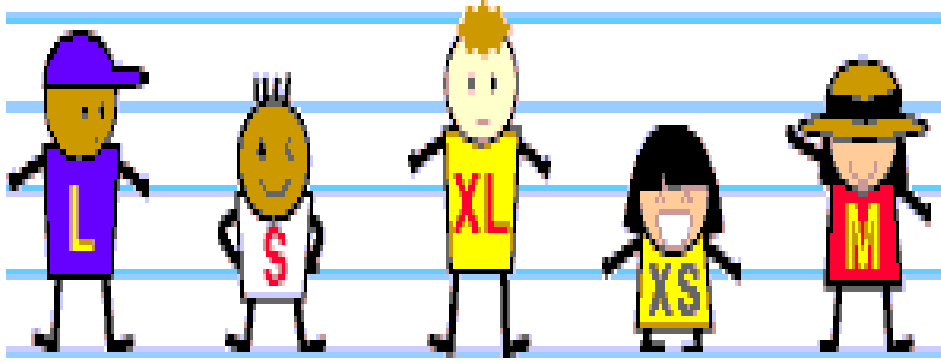
अवर्गीकृत सामग्रीचा 'मध्यक' खालीलप्रमाणे काढतात.

1) दिलेले प्राप्तांक चढत्या क्रमाने मांडा.

2) a) जेव्हा प्राप्तांकांची संख्या (n), विषम असेल तेव्हा मध्यक $= \left(\frac{n+1}{2} \right)$ व्या जागी आलेली नोंद.

b) जर n ही सम संख्या असेल तर मध्यक $= \left(\frac{n}{2} \right)$ व $\left(\frac{n+2}{2} \right)$ व्या जागी आलेल्या नोंदींची सरासरी

N ही विषम संख्या असताना :



शेजारील चित्रात मुलांची उंचीप्रमाणे जागा ठरवून त्यांना उभे केल्यावर कोणत्या मुलीची उंची 'मध्यक' आहे?

दुसऱ्या आकृतीवरून तुम्हाला कळले असेलच.

येथे $N = 5$ ही विषम संख्या आहे.

त्यामुळे कितव्या क्रमांकावर 'मध्यक' मिळतो?



N ही सम संख्या असताना :

मॅरेथॉन स्पर्धेमध्ये चार स्पर्धकांनी भाग घेतला.
प्रत्येक स्पर्धकाला स्पर्धा पूर्ण करण्यासाठी लागलेला वेळ
अनुक्रमे खाली दिल्या प्रमाणे आहे.
2.7 तास, 5.3 तास, 3.5 तास, 5.1 तास
दिलेल्या वेळेचा 'मध्यक' काढा.



→ दिलेल्या ताशी वेगाच्या संख्या चढत्या क्रमाने लावू.

2.7, 3.5, 5.1, 5.3

दिलेल्या सामग्रीत प्राप्तांकांची संख्या सम आहे.

∴ दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक = $(\frac{n}{2})$ व $(\frac{n+2}{2})$ व्या जागी आलेल्या नोंदींची सरासरी

दिलेल्या सामग्रीत $(\frac{n}{2})$ व्या जागी आलेली नोंद = 3.5

दिलेल्या सामग्रीत $(\frac{n+2}{2})$ व्या जागी आलेली नोंद = 5.1

$$\therefore \text{दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक} = \frac{3.5+5.1}{2}$$

$$= \frac{8.6}{2}$$

$$= 4.3$$

$$\therefore \text{दिलेल्या प्राप्तांकांचा 'मध्यक'} = 4.3$$

सामग्रीचा 'मध्यक' काढणे :

खाली 40 मुलांची पूर्ण वर्षातील वये दिलेली आहेत त्यावरून या सामग्रीचा 'मध्यक' कसा काढतात ते पाहू.

14, 15, 16, 14, 14, 15, 15, 16, 14, 15, 14, 15,
 15, 14, 14, 14, 16, 14, 15, 17, 15, 14, 14, 15,
 14, 13, 17, 14, 15, 14, 14, 16, 15, 14, 15, 15,
 13, 14, 16, 14.

त्यासाठी दिलेल्या सामग्रीतील प्राप्तांकांच्या नोंदी चढत्या क्रमाने लावू.

2

संचित वारंवारता = 2

18

(13, **13**), (14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14,

संचित वारंवारता = 20

14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14.)

13

(15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15,

5

15, **15**.) संचित वारंवारता = 33 (16, 16, 16, 16, **16**), संचित वारंवारता = 38

2

(17, **17**) संचित वारंवारता = N = 40

$n = 40 =$ सम संख्या असल्याने $\frac{n}{2} = 20$ व $\frac{(n+2)}{2} = 21$
 \therefore 20 व्या व 21 व्या जागी आलेल्या नोंदी शोधू.

चढत्या क्रमाने केलेल्या मांडणीत, प्रत्येक संख्येची वारंवारता \square अशा चौकटीत दाखविली आहे व त्या संख्येच्या शेवटच्या नोंदीपाशी एकूण किती संख्यांची नोंद झाली ती 'संचित वारंवारता' म्हणून लिहिली आहे.

त्यावरून 20 व्या व 21 व्या जागी आलेल्या नोंदी अनुक्रमे 14 व 15 आहेत हे कळते.

20 वी नोंद = 14 व 21 वी नोंद = 15*

\therefore मध्यक = $\frac{14+15}{2} = \frac{29}{2} = 14.5$

म्हणजेच दिलेल्या प्राप्तांकांचा 'मध्यक' 14.5 आहे.

दिलेल्या सामग्रीतील संख्यांचे वर्गीकरण केले असल्यास 'मध्यक' काढण्यासाठीपेक्षा कमी किंवापेक्षा जास्त अशी सारणी कशी तयार करतात ते पहा.

संख्या	वारंवारता	संचित वारंवारतापेक्षा कमी	संचित वारंवारतापेक्षा जास्त
13	02	2	$38 + 2 = 40$
14	18	$2 + 18 = 20$	$20 + 18 = 38$
15	13	$20 + 13 = 33$	$7 + 13 = 20$
16	05	$33 + 5 = 38$	$2 + 5 = 7$
17	02	$38 + 2 = 40$	2
	N = 40		

Slide no. 27 पाहिल्यास संचित वारंवारतापेक्षा कमी स्तंभावरून 'मध्यक' काढण्याची रीत कळते.

बहुलक:

एखादी नोंद (किंवा नोंदी) जिची वारंवारता जास्तीत जास्त (एक पेक्षा जास्त) असेल तर तिला त्या सामग्रीचा 'बहुलक' म्हणतात.

व्यापार धंदा आणि कारखानदारी या क्षेत्रात बहुलक फार उपयोगी आहे. बहुलक एक किंवा अनेक असू शकतो किंवा नसूही शकतो.

'बहुलक' समजून घेण्यासाठी खालील उदाहरण पाहू.

एका वर्गाच्या 20 विद्यार्थ्यांची वजने पुढीलप्रमाणे आहेत.

त्यावरून दिलेल्या सामग्रीचा बहुलक काढा.

39, 42, 47, 38, 42, 40, 41, 42, 38, 43,

42, 38, 44, 46, 39, 42, 40, 43, 42, 41.

दिलेली सामग्री चढत्या क्रमाने वारंवारता सारणी मध्ये मांडू.

विद्यार्थ्यांची वजने	वारंवारता
38	3
39	2
40	2
41	2
42	6
43	3
44	1
46	1
47	1

येथे 42 हा प्राप्तांक सर्वात अधिक वेळा आला आहे.

∴ बहुलक = 42

वर्गातील एका चाचणीत 15 विद्यार्थ्यांना 20 पैकी मिळालेले गुण खालील प्रमाणे आहेत त्यावरून दिलेल्या सामग्रीचा 'बहुलक' काढा.

15, 14, 19, 15, 14, 15, 16, 14,
15, 18, 14, 19, 15, 17, 14

चढत्या क्रमाने लावलेली सामग्री वारंवारता सारणीत मांडू.

विद्यार्थ्यांचे गुण (20 पैकी)	वारंवारता
14	5
15	5
16	1
17	1
18	2
19	1

येथे 14 आणि 15 या नोंदींची वारंवारता सर्वात जास्त (5) आहे.

∴ 14 आणि 15 हे दोन बहुलक आहेत.

खालील सामग्रीचे निरीक्षण करा.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

वरील सामग्रीचे निरीक्षण केल्यास असे दिसून येते की, येथे कोणत्याही नोंदीस एकपेक्षा जास्त वारंवारता नाही.

∴ दिलेल्या सामग्रीला बहुलक नाही.

दिलेल्या सामग्रीत बहुलक नसूही शकतो हे वरील उदाहरणातून कळेल.

खाली मराठीतील 'अनुप्रास' या अलंकाराचे उदाहरण दिले आहे.

यात एकाच अक्षराची पुनरावृत्ती झालेली दिसून येते.

संख्याशास्त्राच्या दृष्टीकोनातून तुम्ही याकडे पाहिले तर केंद्रीय प्रवृत्तीचे कोणते परिमाण तुम्हाला दिसून येते.

गडद निळे गडद निळे जलद भरूनि आले,

शीतलतनु चपलचरण अनिलगण निघाले.

रजतनील, ताम्रनील

स्थिर पल जल पल सलील

हिरव्या तटि नावांचा कृष्ण मेळ खेळे.

सामग्रीचे चित्ररूप व आलेखरूप प्रतिरूपणः

खालील उदाहरणाद्वारे यांचा आपण अभ्यास करू.

उदाहरण:- खालील सारणी मध्ये एका शाळेतील नववीच्या वर्गातील एकूण चार तुकड्यांतील विद्यार्थ्यांची संख्या आणि बीजगणितात उत्तीर्ण व अनुत्तीर्ण झालेल्या विद्यार्थ्यांची माहिती आहे.

1) जोडस्तंभाकृती:-

वरील सारणीचे निरीक्षण केल्यास त्यावरून आपण अनुत्तीर्ण विद्यार्थ्यांची संख्या काढली आहे. त्यासाठीचा रकाना त्यात समाविष्ट केल्यास आपल्याला खालील सारणी मिळते. त्याचा उपयोग जोडस्तंभाकृती काढण्यास करू.

तुकडी	A	B	C	D
बीजगणितात उत्तीर्ण झालेले विद्यार्थी	54	44	39	30
बीजगणितात अनुत्तीर्ण झालेले विद्यार्थी	06	11	13	20
वर्गातील एकूण विद्यार्थी	60	55	52	50

परंतू ह्या स्तंभाकृती एकमेकांना जोडून काढतात.

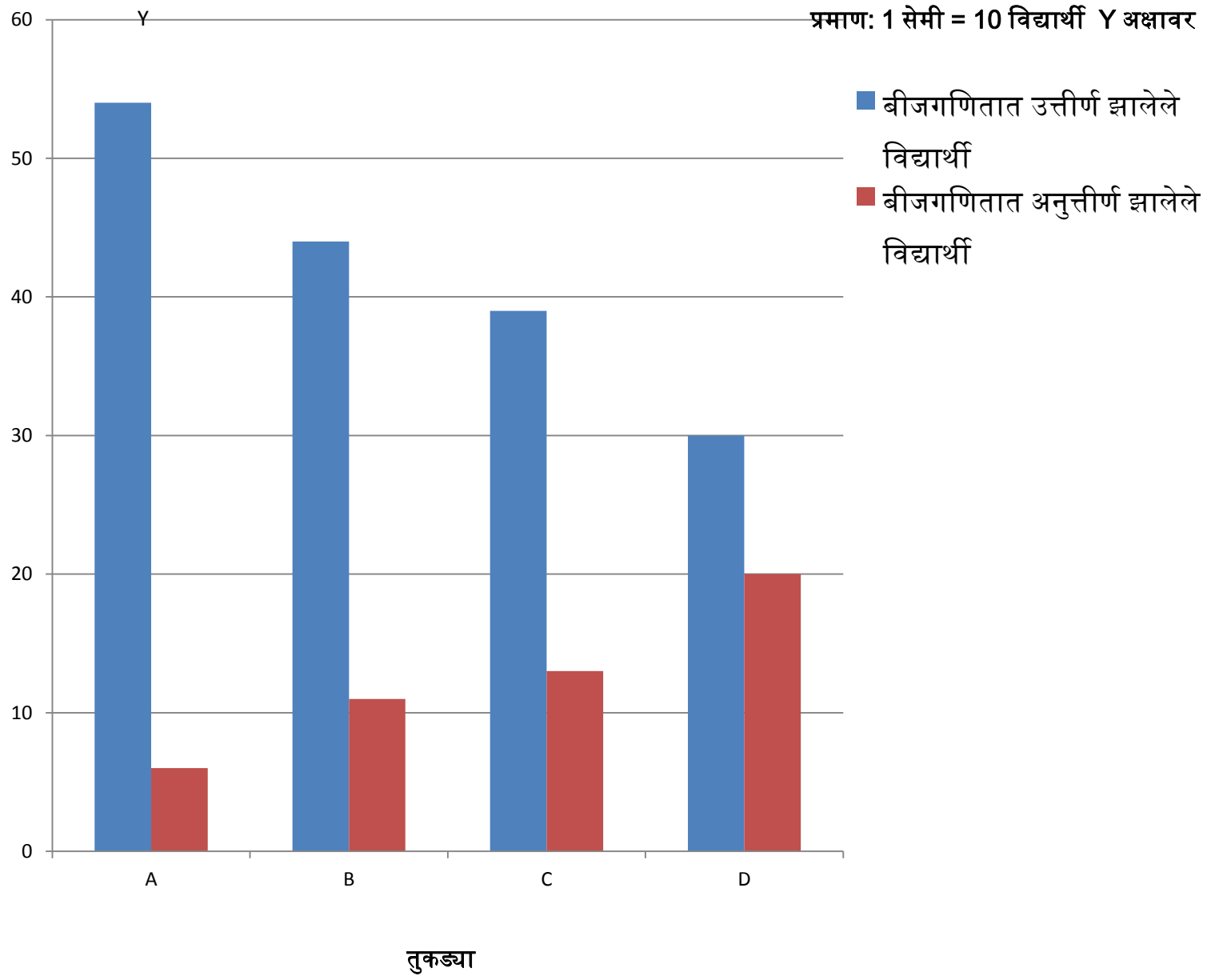
पुढील जोडस्तंभाकृतीत प्रत्येक तुकडीतील उत्तीर्ण आणि अनुत्तीर्ण विद्यार्थ्यांची संख्या स्वतंत्र स्तंभाकृतींनी दाखविली आहे.

अशा स्तंभाकृतींना 'जोडस्तंभाकृती' म्हणतात.

काही वेळेस तेथे तीन किंवा त्यापेक्षा जास्त जोडस्तंभ जोडस्तंभाकृतीत असू शकतात.

दिलेल्या माहितीवरून काढलेली 'जोडस्तंभाकृती' तुम्ही काढण्याचा प्रयत्न करा.

जोडस्तंभाकृती:



विभाजित स्तंभाकृती:

आधीचीच माहिती विभाजित स्तंभाकृतीत कशी दाखवितात ते पाहू.

तुकडीतील एकूण विद्यार्थी संख्या एका स्तंभात प्रथम दाखवितात.

नंतर तोच स्तंभ, उत्तीर्ण विद्यार्थी संख्या आणि अनुत्तीर्ण विद्यार्थी संख्या यांच्या प्रमाणात आडवी रेघ काढून विभागतात.

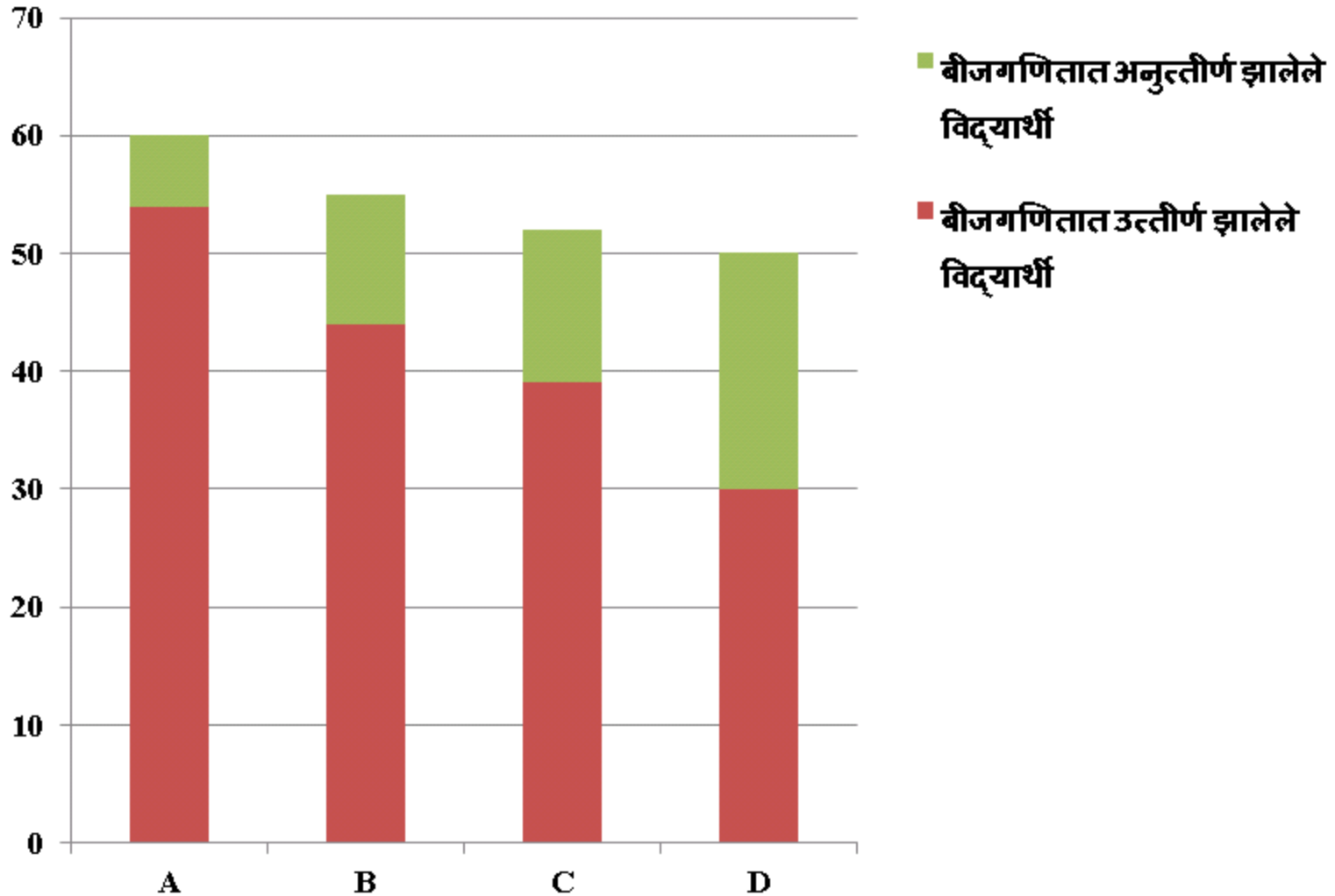
असे भाग केल्यामुळे –

- i) प्रत्येक तुकडीतील उत्तीर्ण आणि अनुत्तीर्ण विद्यार्थ्यांच्या संख्येचे प्रमाण चटकन लक्षात येते.
- ii) निरनिराळ्या तुकड्यांमधील फक्त अनुत्तीर्ण विद्यार्थ्यांचे आणि फक्त उत्तीर्ण विद्यार्थ्यांचे प्रमाणही लक्षात येते.

अशा प्रकारे काढलेल्या स्तंभाकृतींना **विभाजित स्तंभाकृती** म्हणतात.

विभाजित स्तंभाकृती:

उत्तीर्ण व अनुत्तीर्ण विद्यार्थ्यांची संख्या दर्शविणारा विभाजित स्तंभाकृती काढू.



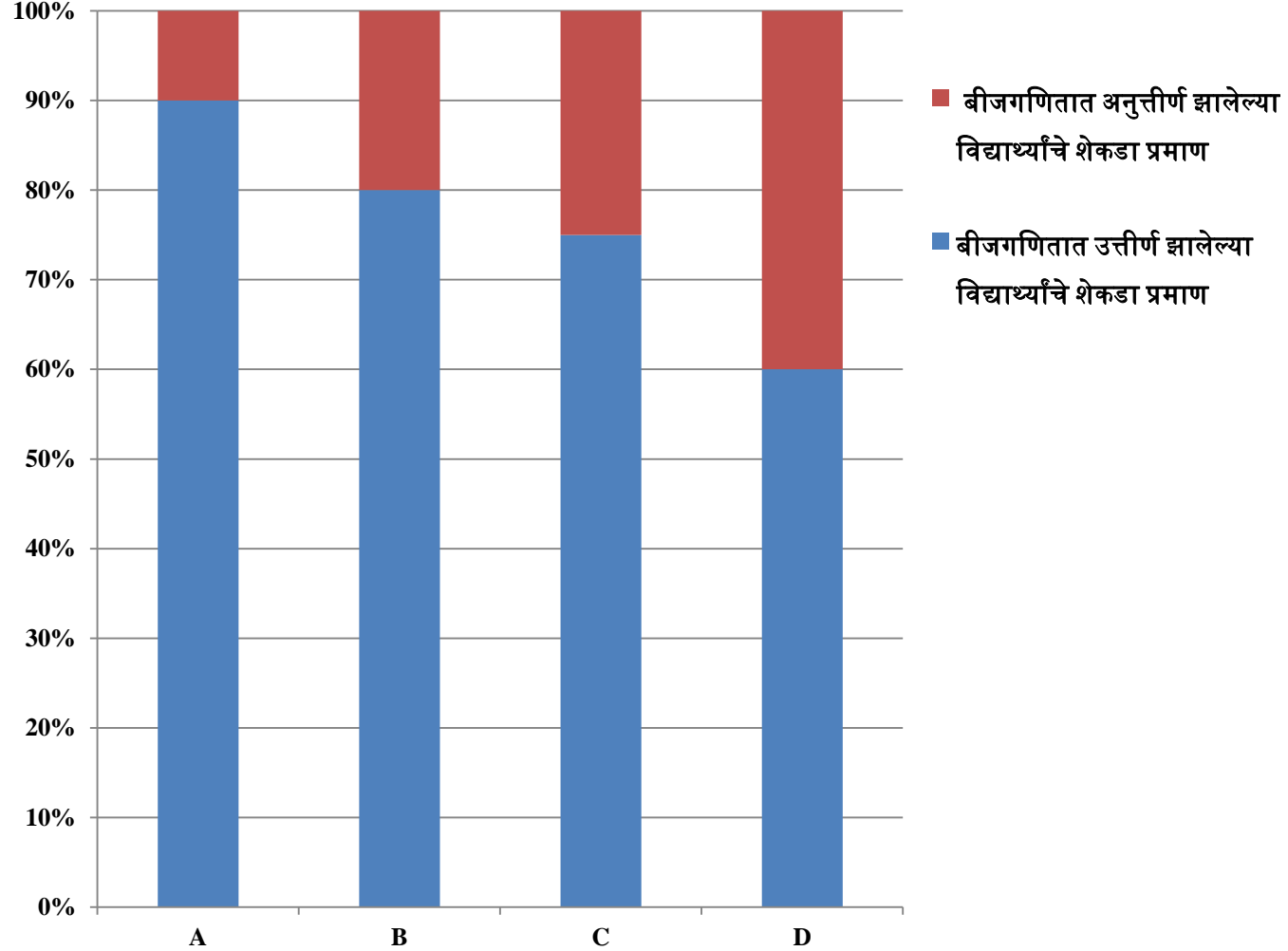
शतमान स्तंभाकृती:

जोडस्तंभाकृती व विभाजितस्तंभाकृतींवरून निरनिराळ्या तुकड्यांमधील उत्तीर्ण तसेच अनुत्तीर्ण विद्यार्थ्यांच्या प्रमाणाची तुलना नेमकेपणाने करता येते नाही.

प्रत्येक तुकडीतील उत्तीर्ण आणि अनुत्तीर्ण विद्यार्थ्यांचे शेकडा प्रमाण काढले तर नेमकी तुलना शक्य होते.

म्हणून वरील सारणीत दिलेल्या उत्तीर्ण व अनुत्तीर्ण विद्यार्थ्यांचे शेकडा प्रमाण काढू.

तुकडी	A	B	C	D
विद्यार्थी संख्या	60	55	52	50
बीजगणितात उत्तीर्ण झालेले विद्यार्थी	54	44	39	30
बीजगणितात उत्तीर्ण झालेल्या विद्यार्थ्यांचे शेकडा प्रमाण	$\frac{54 \times 100}{60} = 90$	$\frac{44 \times 100}{55} = 80$	$\frac{39 \times 100}{52} = 75$	$\frac{30 \times 100}{50} = 60$
∴ बीजगणितात अनुत्तीर्ण झालेल्या विद्यार्थ्यांचे शेकडा प्रमाण	10	20	25	40



- शतमान स्तंभाकृती हे विभाजित स्तंभाकृतीचेच विशेष रूप आहे.
- शतमान स्तंभाकृतीमध्ये सर्व स्तंभ समान उंचीचे असतात.

Exercise:

1 गुणांचे प्रश्न:

1) एका वर्गीकृत वारंवारता सारणीमध्ये असलग वर्ग

0 – 9, 10- 19, 20 – 29, 30 – 39 असे आहेत हे वर्ग सलग करून लिहा.

2) वरील प्रश्नातील जे वर्ग आहेत तेच वर्ग असताना वर्गांतर किती आहे?

हे वर्ग सलग करून घेतल्यावर वर्गांतर किती आहे? वर्गांतरात काही बदल झाला आहे का?

2 गुणांचे प्रश्न:

1) वर्गीकृत सारणीमध्ये 0 – 20, 20 – 40, 40- 60,असे वर्ग आहेत. प्रत्येक वर्गाचा वर्ग-मध्य काढा. दोन लगतच्या वर्गमध्यांमधील फरक किती आहे?

दोन लगतच्या वर्गमध्यांमधील फरक व वर्गांतर यांमध्ये काय संबंध आढळतो?

2) या सारणीवरून सामग्रीचा बहुलक 22 आहे की 147 आहे?

मुलांची उंची	140	145	147	148
वारंवारता	11	17	22	20

3 गुणांचे प्रश्न:

- 1) पुढील सारणीत शाळेच्या तीन तुकड्यांमध्ये विद्यार्थ्यांची एकूण संख्या व त्यांच्यापैकी क्रिकेट हा खेळ आवडणाऱ्यांची प्रत्येक वर्गातील शेकडेवारी काढा.

वर्ग	A	B	C
क्रिकेट आवडणाऱ्यांची संख्या	44	42	27
एकूण विद्यार्थी	55	56	50

- 2) 101, 105, 91, 95, 98, 104, 100, 103, 92 यांचा मध्यक काढा. जर या सामग्रीत 90 व 110 अशा आणखी दोन प्राप्तांकांची नोंद केली तर त्या सामग्रीचा मध्यक काढा. या दोन मध्यकांबाबतचे तुमचे निरीक्षण लिहा. त्याचे कारणही लिहा.

4 गुणांचे प्रश्न:

1) 15, 20, 30, 35, 40, 45, 50, 55 यांचा मध्य (\bar{x}) काढा

i) आता या प्रत्येक संख्येत 5 मिळवा व मिळणाऱ्या संख्यांचा मध्य (\bar{y}) काढा.

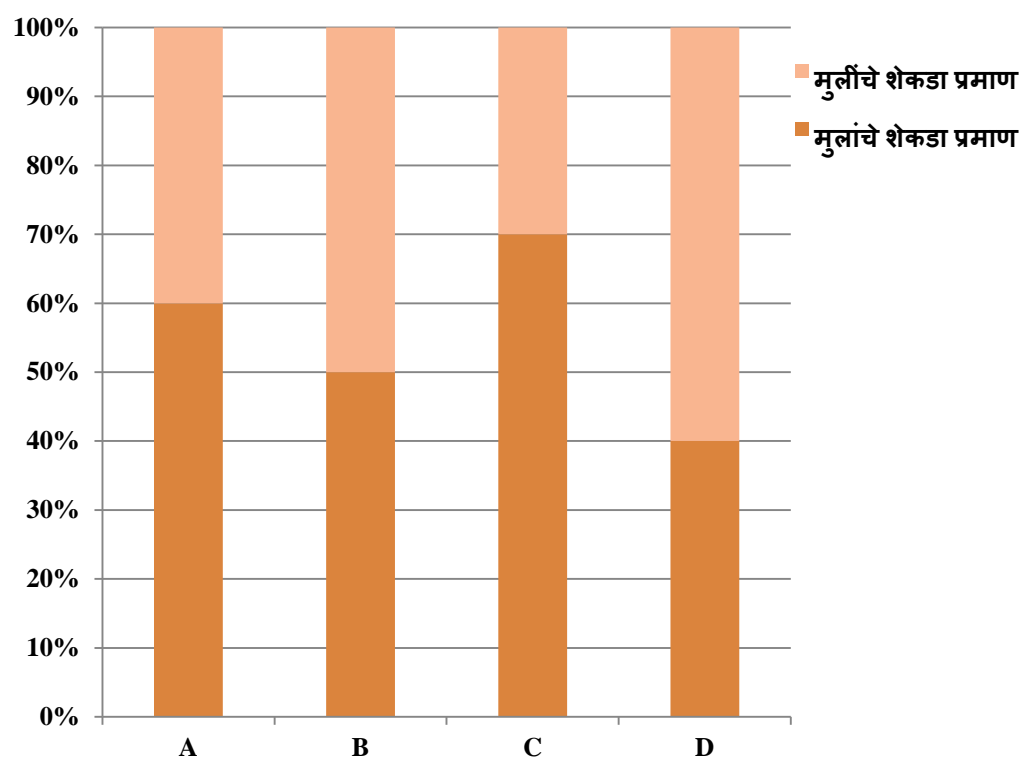
ii) आता सुरुवातीला दिलेल्या संख्या 15, 20,55 या प्रत्येक संख्येला 2 ने गुणा व मिळणाऱ्या संख्यांचा मध्य (\bar{z}) काढा.

\bar{x} व \bar{z} बद्दलचे निरीक्षण नोंदवा.

वरील दोन विधांनावरून सर्वसामान्य नियम काय तयार होतील?

2) खाली दिलेल्या वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणीवरून स्तंभ 3 व स्तंभ 4 पूर्ण करा.

वर्ग	वारंवारता	वरच्या वर्गमर्यादपेक्षा कमी संचित वारंवारता	खालच्या वर्गमर्यादपेक्षा जास्त संचित वारंवारता
25 - 30	2		
30 - 35	5		
35 - 40	7		
40 - 50	11		
50 - 60	9		
60 - 70	6		



- i) वरील आलेख कोणत्या प्रकारचा आहे?
- ii) कोणत्या वर्गात मुलींचे प्रमाण सर्वात जास्त आहे?
- iii) कोणत्या वर्गात मुलगे आणि मुलींची संख्या समान आहे?
- iv) जर A या वर्गातील एकूण संख्या 50 असेल तर त्या वर्गातील मुलगांची संख्या व मुलींची संख्या काढा.

Assessment:

1) 6 – 10 या वर्गातील 6 लावर्गमर्यादा म्हणतात.

a) वरची

b) खालची

c) मध्यम

d) यापैकी काही नाही

2) मध्य = $\frac{\text{.....}}{n}$

a) प्राप्तांकांची वजाबाकी

b) प्राप्तांकांची बेरीज

c) प्राप्तांकांचा गुणाकार

d) प्राप्तांकांची एकूण संख्या

3) जेंव्हा सामग्रीतील प्राप्तांकांची संख्या (n) विषम असेल तेंव्हा मध्यक = पद

a) $\frac{n+1}{2}$

b) $\frac{n-1}{2}$

c) $\frac{n}{2} + 1$

d) $\frac{n}{2} - 1$

4) सरासरीलाच सांख्यिकीमध्ये म्हणतात.

a) मध्यक

b) बहुलक

c) प्राप्तांक

d) मध्य

5) 7, 3, 5, 4, 9, 6, 8, दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक =.....

a) 7

b) 6

c) 4

d) 8

6) 13, 20, 7, 15, 10 यांचा मध्य =

a) 7

b) 13

c) 10

d) 15

7) सामग्रीतील प्राप्तांक पुढील प्रमाणे असल्यास त्यांचा बहुलक =

15, 16, 14, 12, 12, 11, 12, 14, 15

a) 15

b) 14

c) 12

d) 11

8) 15, 14, 19, 15, 14, 15, 16, 14, 15, 18, 14, 19, 15, 17, 14 या सामग्रीलाबहुलक आहेत.

a) एक

b) दोन

c) एकही नाही

d) तीन

9) 21 ते 25 या वर्गाचा वर्गमध्य =

a) 46

b) 23

c) 4

d) 2

10) जर 20, 18, 13, 12, k आणि 10 यांचा मध्य 15 आहे , तर k ची किंमत =...

a) 163

b) 17

c) 27

d) 7