प्रकरण 8
त्रिकोणमिती

संकल्पना चित्र

T8

पूर्वज्ञान :

काटकोन त्रिकोण, त्याच्या लघुकोनांच्या मापांची बेरीज, पायथागोरसचा सिद्धांत, गुणोत्तर काढणे, गुणोत्तराचा अर्थ, समरूप त्रिकोणाचे संगत कोन, संगत बाजू यांची संकल्पना व 30^0, 60^0, 90^0 त्रिकोण व 45^0, 45^0, 90^0 प्रकारचा त्रिकोण, त्यांच्या बाजूंमधील संबंध

त्रिकोणमितीच्या संकल्पनेचा इतिहास, त्याचे व्यवहारातील व विज्ञानातील उपयोजन

काटकोन त्रिकोणातील दिलेल्या लघुकोनाच्या संमुख बाजू, लगतची बाजू व कर्ण ओळखता येणे.

काटकोन त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची लांबी किंवा त्यांचे गुणोत्तर दिल्यास उरलेल्या (तिस-या) बाजूची लांबी ठरविणे.

काटकोन त्रिकोणातील प्रत्येक लघुकोनासाठी sine, cosine, tangent, cosecant, secant, cotangent गुणोत्तरांच्या व्याख्या व त्यांचा उपयोग करून या सहा गुणोत्तरांच्या किंमती काढणे

समरूपतेच्या संकल्पनेचे उपयोजन करून गुणोत्तरांची संकल्पना.

i) Sine व cosecant
ii) Cosine व secant
iii) Tangent व cotangent

गुणोत्तरांमधील संबंध

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ व $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ही मूलभूत सूत्रे सिद्ध करणे व त्यांचे उपयोजन.

T8

θ व (90- θ) मापाच्या म्हणजेच कोटिकोनांच्या गुणोत्तरांमधील संबंध दाखविणारी सहा सूत्रे सिद्द करणे व त्यांचे उपयोजन.

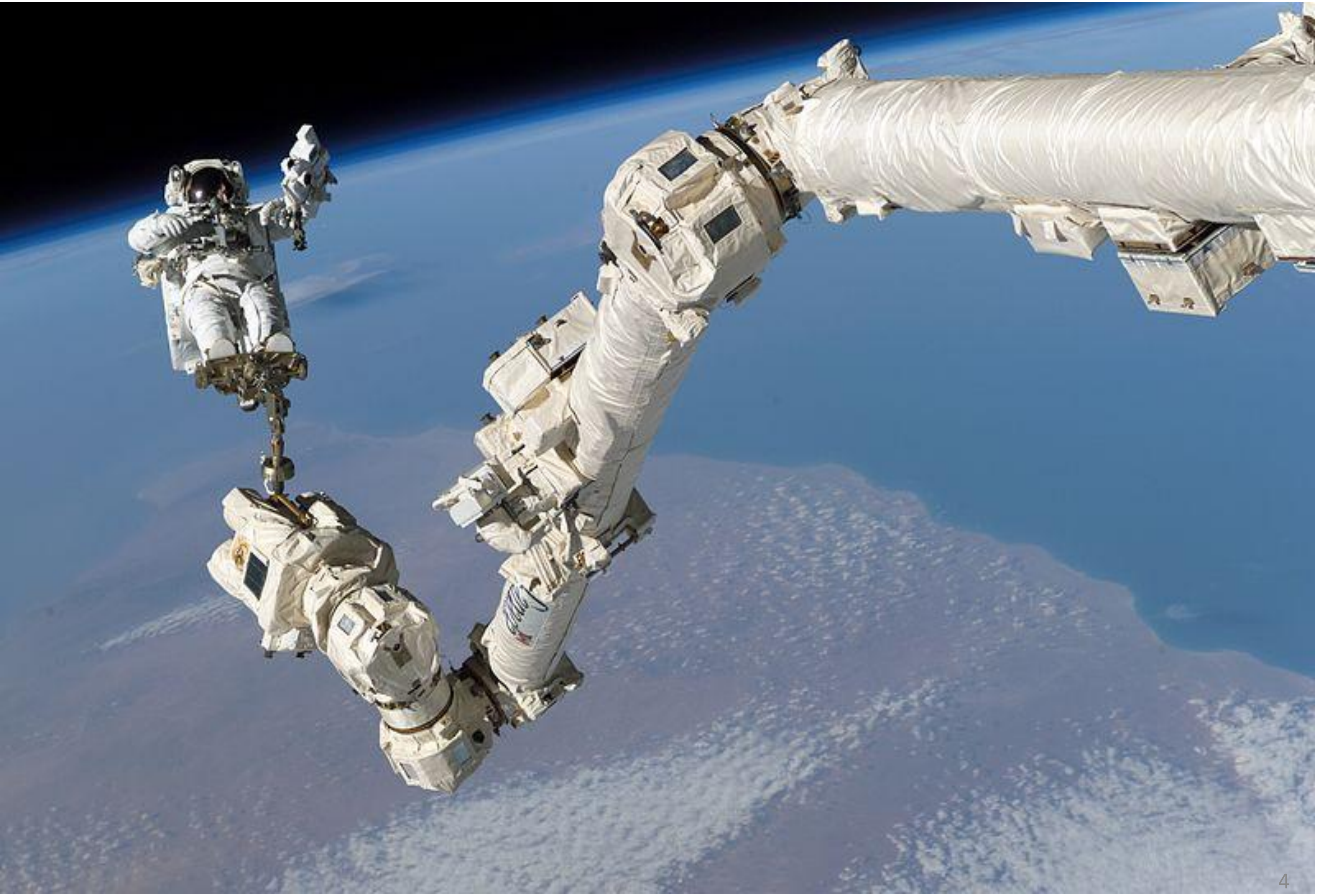
30^0 , 60^0, 45^0, 0^0, 90^0 मापांच्या कोनांच्या प्रत्येकी सहा त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किंमती शोधणे व त्यांवरील राशींच्या किंमती काढणे.

काटकोन त्रिकोणातील एका लघुकोनाचे सहांपैकी कोणतेही एक त्रिकोणमितीय गुणोत्तर दिल्यास त्यावरून पायथागोरसच्या सिद्धांतावरून उरलेल्या पाच गुणोत्तरांच्या किंमती काढणे, त्यासाठी गुणोत्तर या संकल्पनेचा अर्थ वापरता येणे.

त्रिकोणमिती

उदाहरण 1:

T8_L1_A1



उदाहरण 2:

उदाहरण 3:

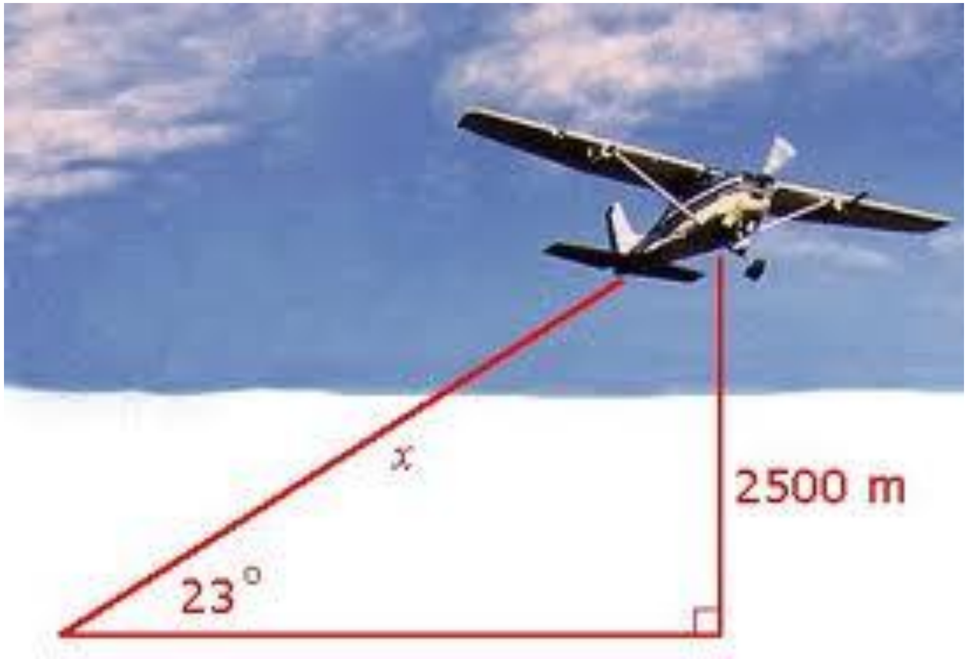
T8_L1_A3

उदाहरण 4:

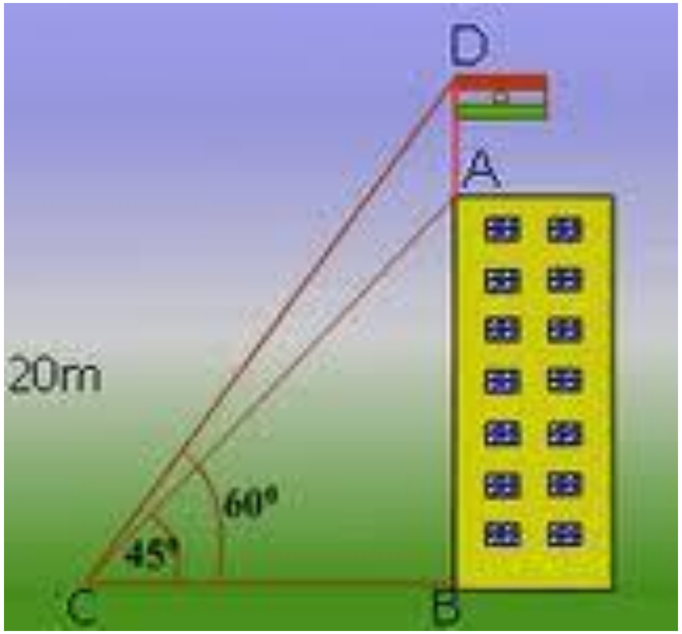
T8_L1_A4

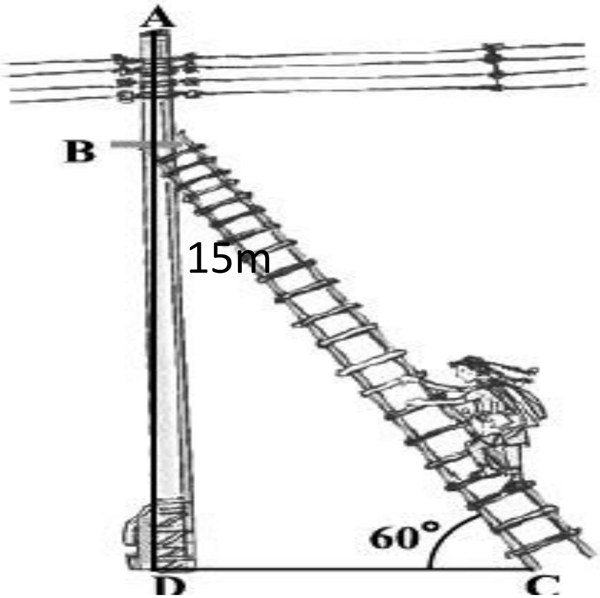
उदाहरण 5:

T8_L1_A5



जमिनीशी 23^0 अंश मापाचा कोन करून आकाशात झेप घेणा-या या विमानाने दिलेल्या वेळात 2500 मी. ऊंची गाठण्यासाठी त्याचा वेग काय असला पाहिजे ते त्रिकोणमितीच्या अभ्यासातून समजेल.





पहिल्या चित्रात रेख AB ने दाखविलेल्या 20 मी. उंचीच्या इमारतीवर रेख AD हा आपला तिरंगा झेंडा दाखविला असून रेख AC व रेख DC यांनी जमिनीशी केलेले कोन अनुक्रमे 45 व 60 मापांचे आहेत. या माहितीवरून तुम्ही झेंड्याची उंची काढू शकाल.

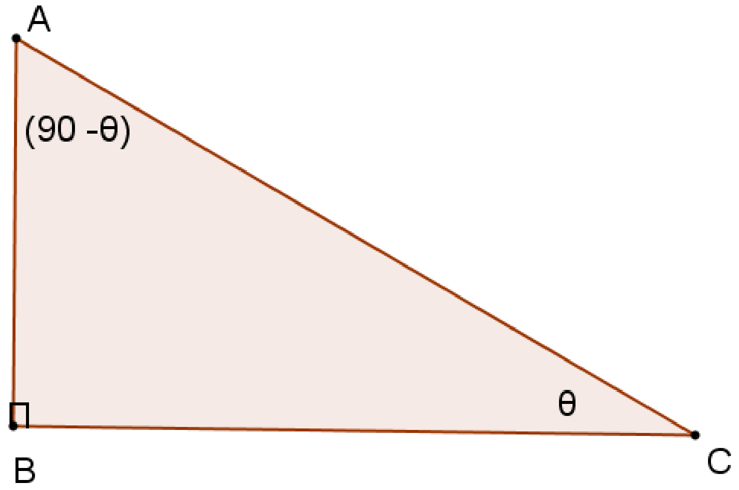
दुस-या चित्रातील या मुलीप्रमाणे खांबावर 15m उंचीवरील B पर्यंत जाण्यासाठी जमिनीशी 60^0 चा कोन करून शिडी ठेवायची असेल तर शिडीची लांबी किमानकितीअसलीपाहिजे ते त्रिकोणामितीच्या अभ्यासातून तुम्हाला कळेल.

मग करू या सुरूवात?

त्रिकोणमितीसाठी काटकोन त्रिकोणाची उजळणी:

काटकोन त्रिकोण : आवश्यक उजळणी

सध्या आपण फक्त काटकोन त्रिकोणाशी संबंधित त्रिकोणामितीचा अभ्यास करणार आहोत म्हणून आपण काटकोन त्रिकोणासंबंधी थोडी उजळणी करू या.



सोबतच्या आकृतीत ΔABC काटकोन त्रिकोण आहे. m∠ABC =90, m∠ACB = θ

रेख AC बद्दल तुम्हाला काय काय माहित आहे?

उत्तर :रेख AC हा कर्ण आहे. ती काटकोन त्रिकोणाची सर्वात मोठी बाजू असते.

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार कोणते समीकरण मिळते?

उत्तर: $\mathbf{AC^2 = AB^2 + BC^2}$

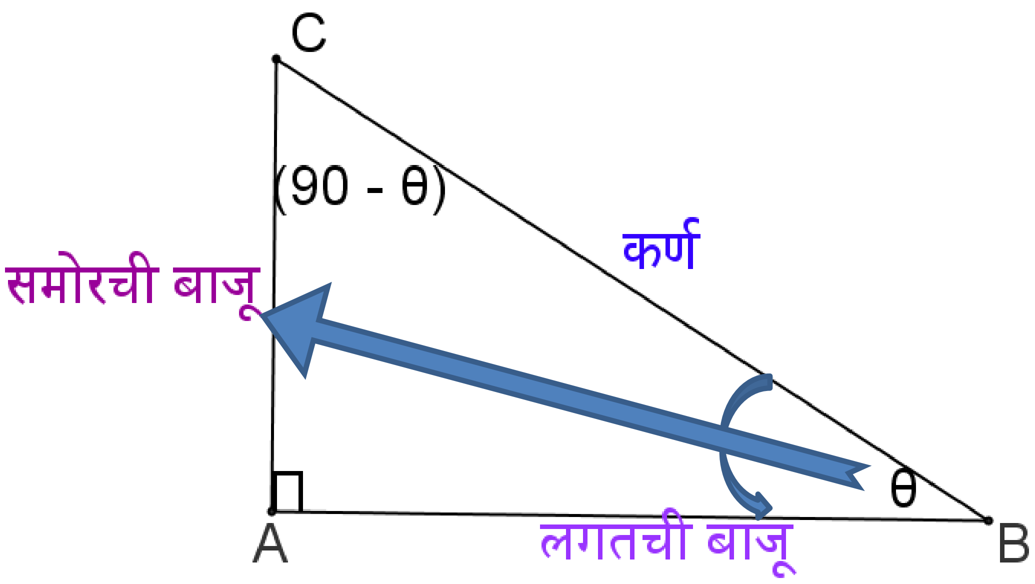
काटकोन त्रिकोणाच्या दोन लघुकोनांबद्दल काय माहित आहे?

उत्तर: ते परस्परांचे कोटीकोन असतात.त्यांच्या मापांची बेरीज = 90 असते.
जर m∠ACB = θ असेल तर m∠ BAC = (90 – θ)

I) त्रिकोणाच्या बाजू व कोनातील सबंध

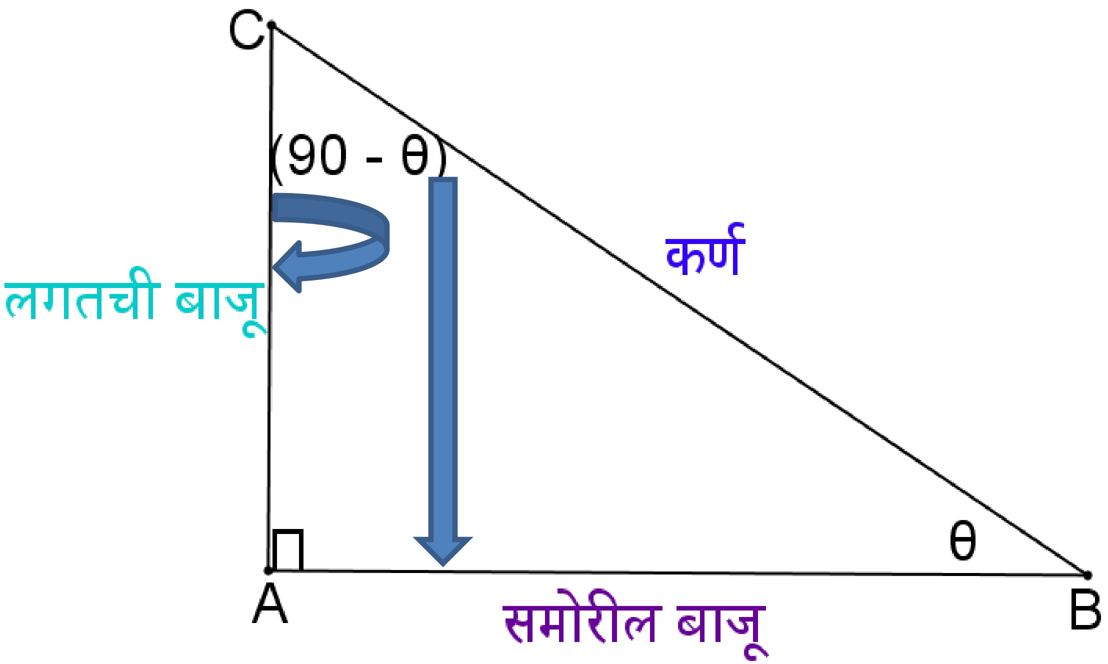
'त्रिकोणामिती' मध्ये आपल्याला दिलेल्या लघुकोनाच्या संदर्भात बाजूंची निवड करावी लागते

म्हणून पुढील दोन्ही आकृत्या नीट बघा.



वरील काटकोन त्रिकोणातील θ मापाच्या कोनाच्या समोरील बाजू रेख AC असून लगतची बाजू रेख AB आहे. रेख BC हा कर्ण आहे.

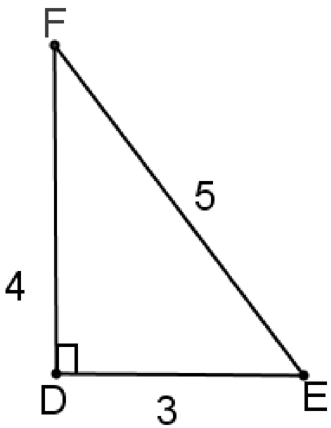
II) त्रिकोणाच्या बाजू व कोनातील सबंध

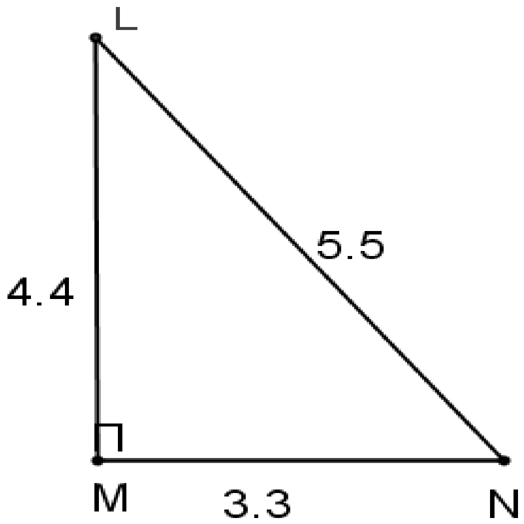


वरील काटकोन त्रिकोणातील (90 - θ) मापाच्या कोनाच्या समोरील बाजू रेख AB असून लगतची बाजू रेख AC आहे. रेख BC हा कर्ण आहे.

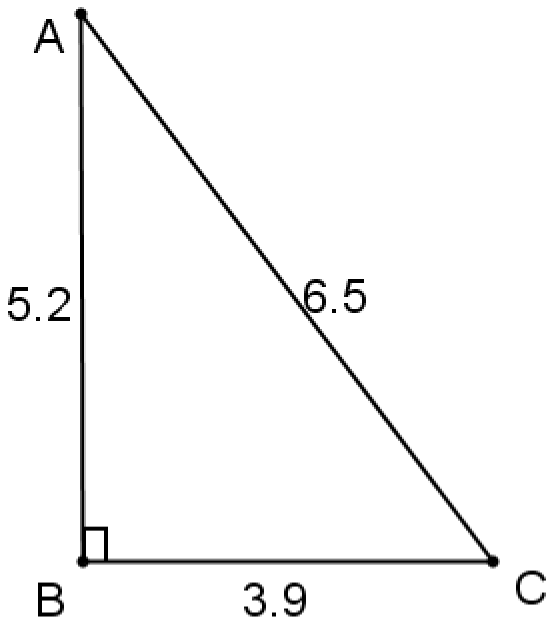
त्रिकोणमिती आणि काटकोन त्रिकोणांची समरूपता:

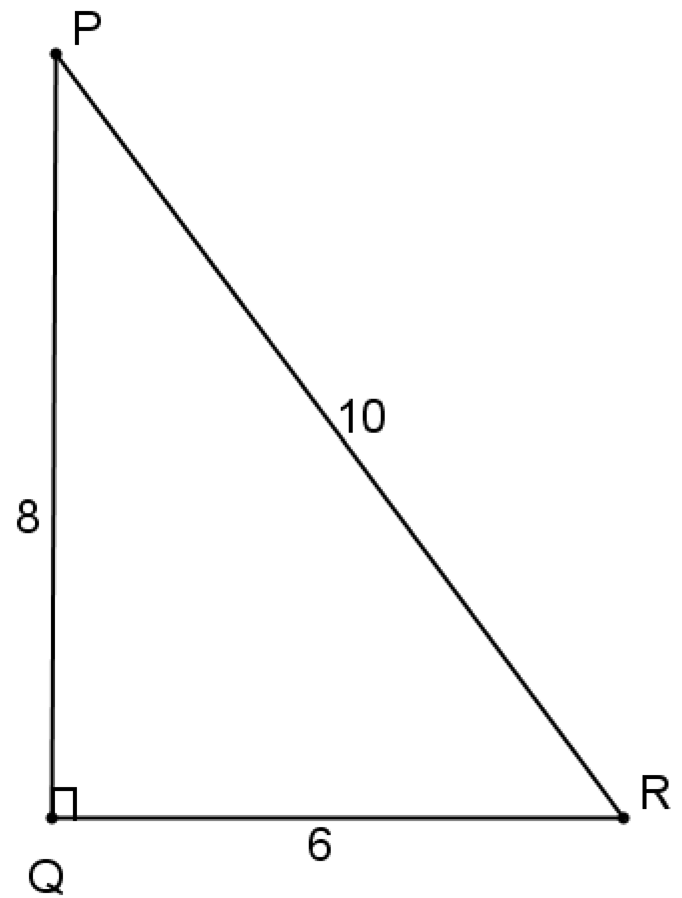
भिन्न काटकोन त्रिकोण व त्यांच्या बाजूंचे गुणोत्तर:





आता आपल्या वहीत प्रत्येक आकृती काढून घ्या.त्यांच्या बाजूंची लांबीही व्यवस्थित लिहून घ्या.





तुम्ही जास्तीत जास्त किती भिन्न गुणोत्तरे लिहू शकलात?

उत्तर: 6

त्या किंमती काय काय आहेत?

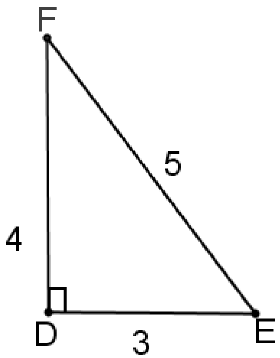
उत्तरे: $\frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}$

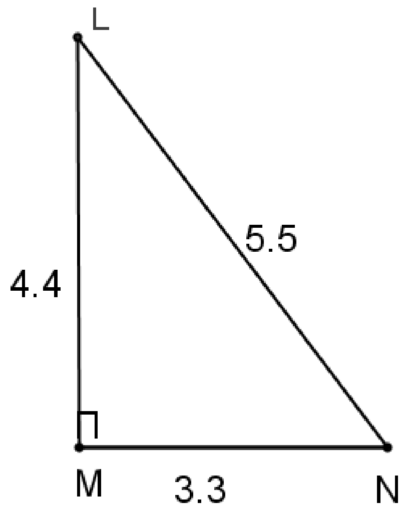
यांखेरीज इतर किंमती मिळाल्या आहेत का?

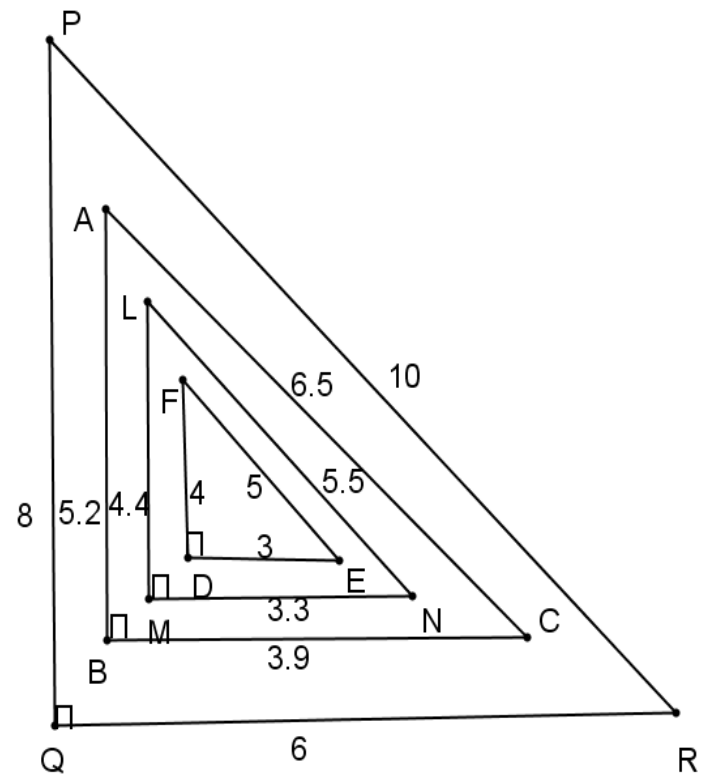
उत्तर : नाही.

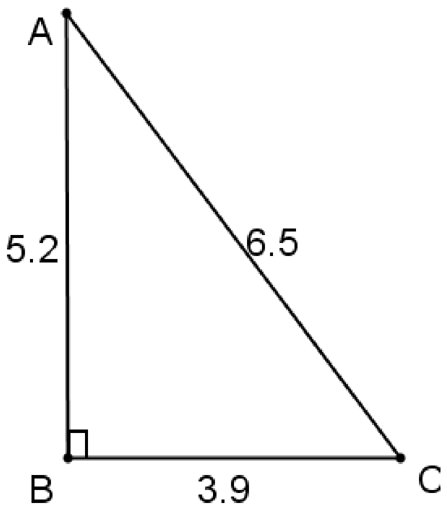
चार वेगवेगळे त्रिकोण असूनही तुम्हाला मिळालेल्या सर्व गुणोत्तरांच्या किंमती मात्र समान आहेत.

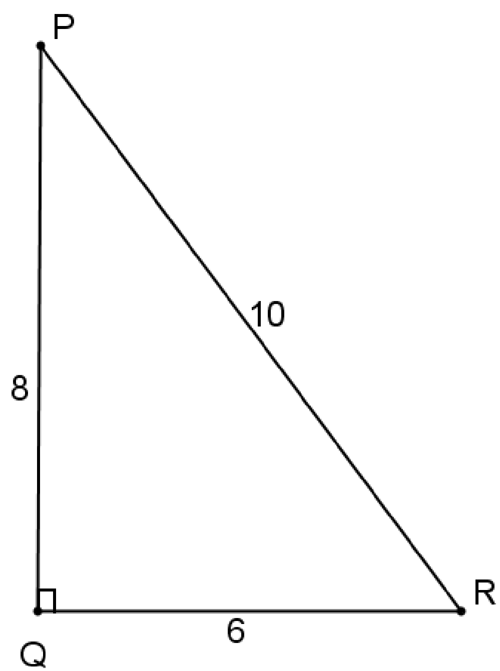
याचे कारण काय? ते जाणून घेऊ या. कारण गणित म्हणजे 'का?'





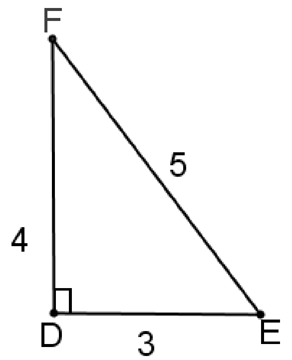






तुम्हाला दिलेले त्रिकोण जरा एकदा एकत्र नीट पाहू या. त्यावरून तुम्हाला आपण शोधत असलेले कारण सापडण्यास मदत मिळेल.

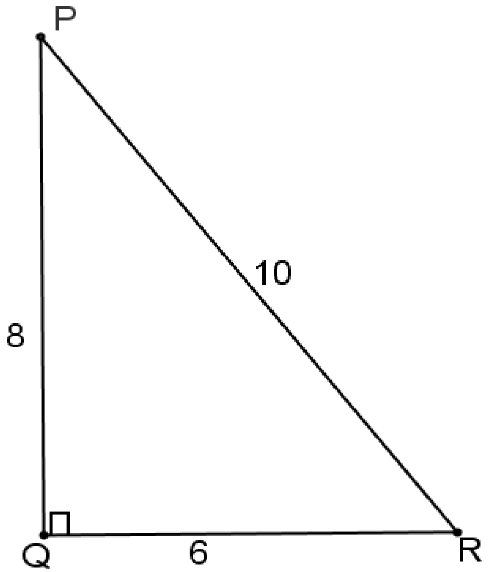
आता आपण पुन्हा एकदा तुम्हाला दिलेल्यांपैकी दोन त्रिकोण बघू या म्हणजे तुम्हाला आधी जे कळले ते सिध्द करता येईल.



$$\frac{ED}{RQ} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \;,\; \frac{DF}{QP} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \;,\; \frac{EF}{RP} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

म्हणजे $\frac{ED}{RQ} = \frac{DF}{QP} = \frac{EF}{RP}$

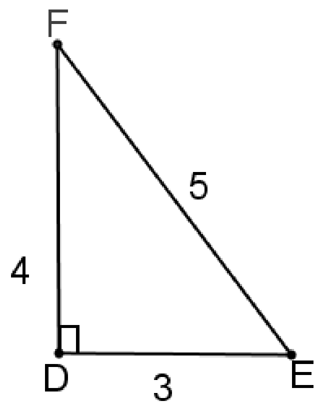
त्यांच्या संगत बाजूंच्या जोड्या प्रमाणात आहेत.



हे त्रिकोण कोणत्या प्रकारचे आहेत? का?

उत्तर : बा बा बा समरूपता कसोटीनुसार,
$\Delta EDF \sim \Delta\ RQP$

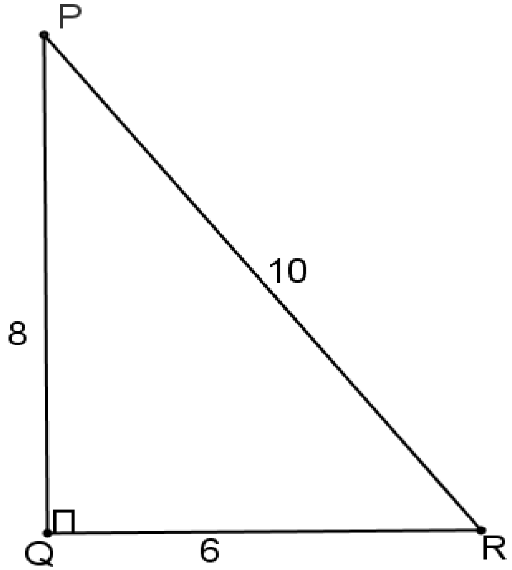
या पध्दतीने तुम्हाला दिलेले चारही त्रिकोण समरूप दाखविता येतील.



समरूप त्रिकोणांच्या संगत कोनांबद्दल आपल्याला काय माहिती आहे?

समरूप त्रिकोणांचे संगत कोन एकरूप असतात. म्हणजे त्यांची मापे समान असतात.

यावरून आपल्याला असे कळले की, तुम्ही काढलेले चारही काटकोन त्रिकोण समरूप असल्याने त्यांच्या संगत कोनांच्या जोड्या एकरूप आहेत.



त्यांच्या संगत बाजूंची गुणोत्तरे समान आहेत. त्यामुळे तीच सहा गुणोत्तरे चारही त्रिकोणांत मिळाली.

त्रिकोणामितीच्या संकल्पनेविषयी माहिती:

काटकोन त्रिकोणांतील एका लघुकोनाचे माप स्थिर (बदलले नाही) ठेवले तर अशी गुणोत्तरेसुध्दा स्थिर राहतात असे आपल्याला आढळले.

काटकोन त्रिकोणांच्या याच गुणधर्मावरून त्रिकोणांच्या कोनांची मापे व बाजूंच्या लांबीची गुणोत्तरे यांचा अभ्यास प्राचीन काळापासून देशोदेशींच्या गणितज्ञांनी केला आणि त्यातून गणिताच्या 'त्रिकोणमिती' या एका महत्वाच्याशाखेचा उदय झाला.

भारतातही इ.स.वी.सन पूर्व काळापासून त्रिकोणमितीबद्दलचा अभ्यास खूप पुढारलेला होता असे पुरावे मिळतात.

त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्या:

T8_L4_A1

तुम्ही मिळविलेल्या 6 गुणोत्तरांना त्रिकोणमितीत 6 नावे दिली जातात.

त्यांच्या व्याख्या पुढीलप्रमाणे करतात. गुणोत्तरांची नावे , त्यांचे वाचन, त्यांचे लघुरूप हे सर्व आपल्यासाठी खूप वेगळे , नवीन आहे. सरावाने ते तुम्ही नक्की आत्मसात करू शकाल.

i)Sin गुणोत्तर= $\frac{\text{त्या कोनासमोरील बाजू}}{\text{कर्ण}}$

i)Sin हे SINE चे लघुरूप आहे व Sinθचा उच्चार साईन थीटा असा करतात

ii) Cos गुणोत्तर = $\frac{\text{त्या कोनालगतची बाजू}}{\text{कर्ण}}$

ii)Cos हे COSINE चे लघुरूप आहे व Cosθ चा उच्चार कॉस थीटा असा करतात.

iii) Tan गुणोत्तर = $\dfrac{\text{त्या कोनासमोरील बाजू}}{\text{त्या कोनालगतची बाजू}}$

Tan हे Tangent चे लघुरूप आहे व Tan θचा उच्चार टॅन **थीटा** असा करतात.

iv)Cosec गुणोत्तर=$\dfrac{\text{कर्ण}}{\text{त्या कोनासमोरील बाजूची लांबी}}$

Cosec हे Cosecant चे लघुरूप आहे. **Cosec**θ चा उच्चारकोसेक थीटा असा करतात.

v) Sec गुणोत्तर = $\dfrac{\text{कर्ण}}{\text{त्या कोनालगतची बाजू}}$

Sec हे secant चे लघुरूप आहे. *Sec*θ उच्चार सेक थिटा असा करतात.

vi) Cot गुणोत्तर = $\dfrac{\text{त्या कोनालगतची बाजू}}{\text{त्या कोनासमोरील बाजू}}$

Cot हे Cotangent चे लघुरूप आहे. Cot θ चा उच्चार कॉट थीटा असा करतात.

आता यातील पहिल्या तीन गुणोत्तरांची नावे थोडक्यात व बिनचूक लक्षात ठेवण्यासाठी पुढील गमतीशीर युक्ति लक्षात ठेवा.

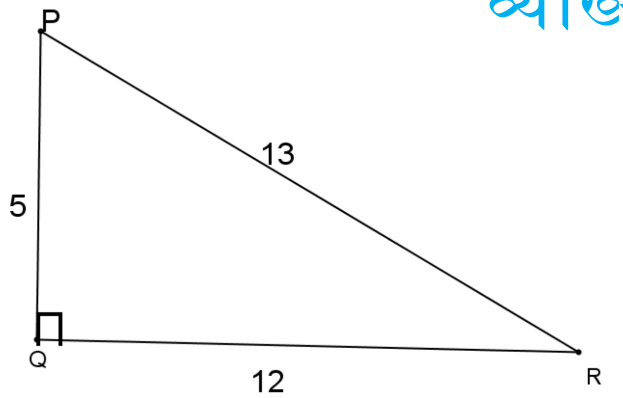
दिलेल्या कोनाचे सा ईन गुणोत्तर=समोरीलबाजू / कर्ण — सा सक

दिलेल्या कोनाचे कोसाईन गुणोत्तर = लगतची बाजू / क र्ण — कॉ लक

दिलेल्या कोनाचे टॅंजंट गुणोत्तर = समोरीलबाजू / लगतची बाजू — टॅ सल

व्याख्यांचे उपयोजन:

T8_L4_A1_F1



दिलेल्या आकृतीत, ∠PQR = 90°.

PQ = 5,QR = 12, PR =13

आता, ∠QPR ची व∠ PRQ त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे लिहा.

1.Sin P = $\frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$

2.Cos P = $\frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$

3.TanP = $\frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$

4.CosecP = $\frac{PR}{QR} = \frac{13}{12}$

5.SecP = $\frac{PR}{PQ} = \frac{13}{5}$

6.CotP = $\frac{PQ}{QR} = \frac{5}{12}$

1.SinR = $\frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$

2. CosR = $\frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$

3.TanR = $\frac{PQ}{QR} = \frac{5}{12}$

4.CosecR = $\frac{PR}{PQ} = \frac{13}{5}$

5. SecR = $\frac{PR}{QR} = \frac{13}{12}$

6.CotR = $\frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$

प्रथम एकाच लघुकोनाच्या गुणोत्तरांच्या किंमतींचे निरीक्षण करा.
नंतर

$\angle QPR$व$\angle PRQ$यांच्या गुणोत्तरांच्या किंमतींचे निरीक्षण करा.

त्यावरून मिळणारे निष्कर्ष मनात तयारकरा.
तुमचे निष्कर्ष चिन्हात लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

काटकोन त्रिकोणाच्या लघुकोनाच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांबद्द्ल अधिक विचार:

आतापर्यंत तुम्ही त्रिकोणमितीबद्दल जी माहिती घेतलीत त्याचा विचार करून पुढील प्रश्नांची उत्तरे तयार करा.

1. काटकोन त्रिकोणाची कोणती बाजू सर्वात मोठी असते?

उत्तर:काटकोन त्रिकोणाची कर्ण ही बाजू सर्वात मोठी असते.

2 त्यामुळे त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्यांचा विचार केल्यास कोणत्या गुणोत्तरांचा छेद हा अंशापेक्षा मोठा असणार? का?

उत्तर: एकाच लघुकोनाच्या sin व cos गुणोत्तरांच्या छेदामध्ये कर्णाची लांबी असल्याने त्यांच्या किंमतीमध्ये अंश हा छेदापेक्षा मोठा असतो.

3. त्या गुणोत्तरांच्या किंमतींची 1शी तुलना करा.

उत्तर: काटकोन त्रिकोणातील लघुकोनाच्या Sin व Cos गुणोत्तरांच्या किंमती 1पेक्षा लहान असतात.

4. एकाच कोनाच्या कोणत्या गुणोत्तरांच्या किंमती परस्परांच्या व्यस्त असतात? त्या जोड्या लिहा.त्यांचा गुणाकार किती असतो?

उत्तर:

(I) $\sin\theta$ व $\operatorname{cosec}\theta$ (ii) $\cos\theta$ व $\sec\theta$ (iii) $\tan\theta$ व $\cot\theta$

या गुणोत्तरांच्या जोड्या परस्परांच्या व्यस्त असतात.

: $\sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = 1$

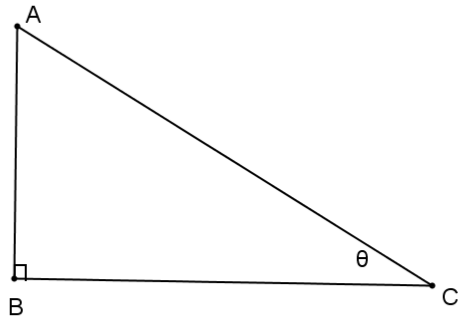
$\cos\theta \times \sec\theta = 1$

$\tan\theta \times \cot\theta = 1$

वरील तिन्ही समीकरणे त्रिकोणमितीची नित्य समीकरणे म्हणून लक्षात ठेवा.

त्रिकोणमितीची नित्यसमीकरणे :

नित्यसमीकरण (I) ची सिद्धता:



पक्ष: ΔABC मध्ये $m\angle ABC = 90$
$m\angle ACB = \theta$

साध्य: $\text{Tan}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

सिद्धता:

व्याख्यांनुसार,

1. $\sin\theta = \frac{AB}{AC}$ **2.** $\cos\theta = \frac{BC}{AC}$

3. $\text{Tan}\theta = \frac{AB}{BC}$

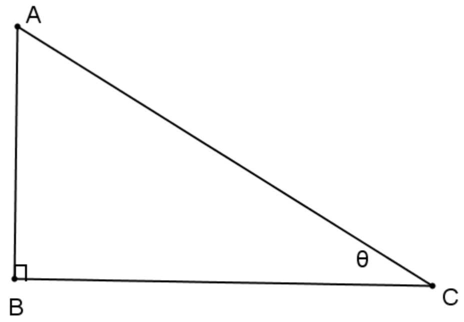
4. $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}}$ ....(1व2 वरून)

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{AB}{AC} \times \frac{AC}{BC}$

$= \frac{AB}{BC}$

$= \tan\theta$

नित्यसमीकरण (II) ची सिद्धता:



पक्ष: ΔABC मध्ये m∠ABC = 90

m∠ ACB = θ

साध्य: cotθ = $\frac{cos\theta}{sin\theta}$

व्याख्यांनुसार,

1.cosθ = $\frac{BC}{AC}$ **2.**sinθ = $\frac{AB}{AC}$

3. cotθ = $\frac{BC}{AB}$

विधान 1 व 2 वरून,

4. $\frac{cos\theta}{sin\theta} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{BC}{AC} \times \frac{AC}{AB}$

$= \frac{BC}{AB}$

$\frac{cos\theta}{sin\theta}$ = cotθ........(विधान 3 वरून)

एकाच कोनाच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांमधील संबंध:

T8_L6_A3

1) $\sin\theta \times \mathrm{cosec}\,\theta = 1$

2) $\cos\theta \times \sec\theta = 1$

3) $\tan\theta \times \cot\theta = 1$

4) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

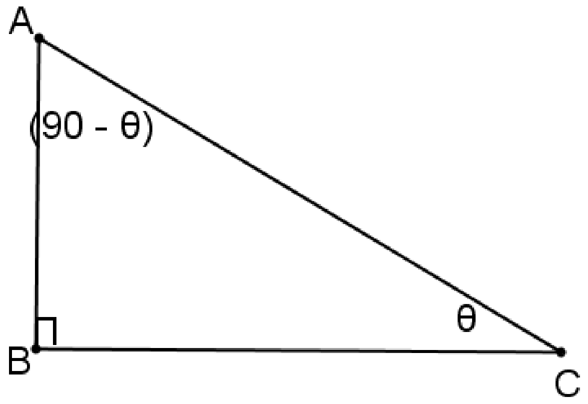
5) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

कोटीकोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांमधील संबंध:

कोटीकोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांमधील संबंध:

सारा मामला 'को' चा:

सिद्धता(I)



व्याख्यांनुसार,

1) $\sin\theta = \dfrac{\text{कोनासमोरील बाजू}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC}$

2) $\cos(90-\theta) = \dfrac{\text{कोनालगतची बाजू}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC}$

Δ ABC मध्ये, $\angle ABC = 90$,
$\angle ACB = \theta$ व
$\angle BAC = (90-\theta)$

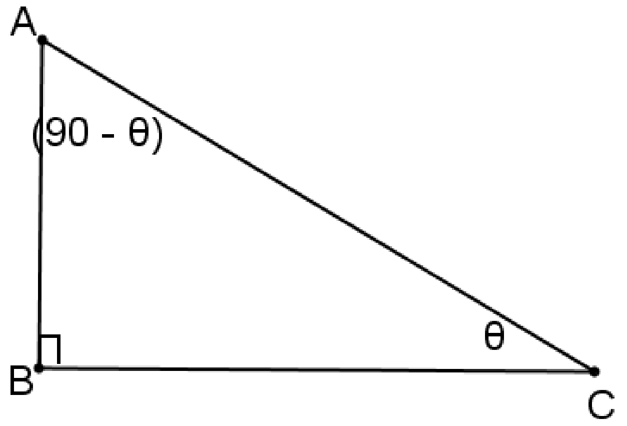
3) विधान (1) व (2) वरून,

$\therefore \sin\theta = \cos(90-\theta)$

सारा मामला 'को'चा:

सिद्धता (II)

व्याख्यांनुसार,



1.$\text{Cos}\theta = \dfrac{\text{कोनालगतची बाजू}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC}$

2.$\text{Sin}(90-\theta) = \dfrac{\text{कोनासमोरील बाजू}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC}$

3) विधान (1) व (2) वरून,

$\therefore \text{Cos}\theta = \text{Sin}(90-\theta)$

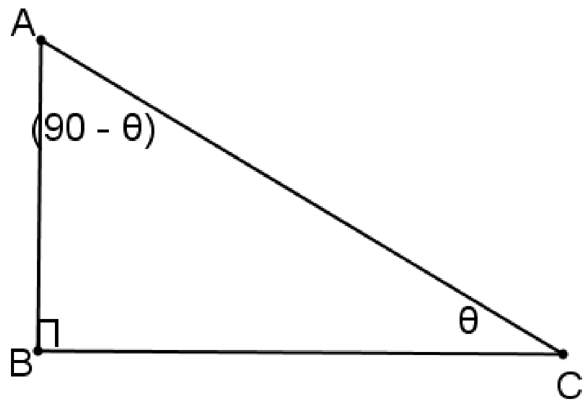
Δ ABC मध्ये, $\angle ABC = 90$,

$\angle ACB = \theta$ व

$\angle BAC = (90-\theta)$

सिद्धता (III)

सारा मामला 'को'चा



Δ ABC मध्ये, $\angle ABC = 90$,

$\angle ACB = \theta$ व

$\angle BAC =$ (90- θ)

व्याख्यांनुसार,

1) Cosec θ = $\frac{\text{कर्ण}}{\text{कोनासमोरील बाजू}} = \frac{AC}{AB}$

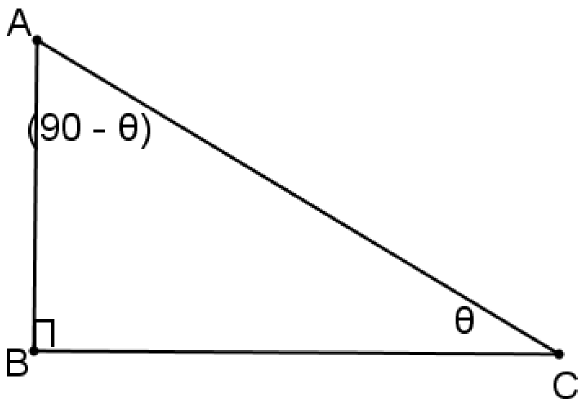
2) Sec (90- θ) = $\frac{\text{कर्ण}}{\text{कोनालगतची बाजू}} = \frac{AC}{AB}$

3) विधान (1) व (2) वरून,

Cosec θ = Sec(90 – θ)

सिद्धता IV)

सारा मामला 'को'चा



व्याख्यांनुसार,

1) Sec θ = $\frac{\text{कर्ण}}{\text{कोनालगतची बाजू}} = \frac{AC}{BC}$

2) Cosec (90- θ) = $\frac{\text{कर्ण}}{\text{कोनासमोरील बाजू}} = \frac{AC}{BC}$

3) विधान (1) व (2) वरून,

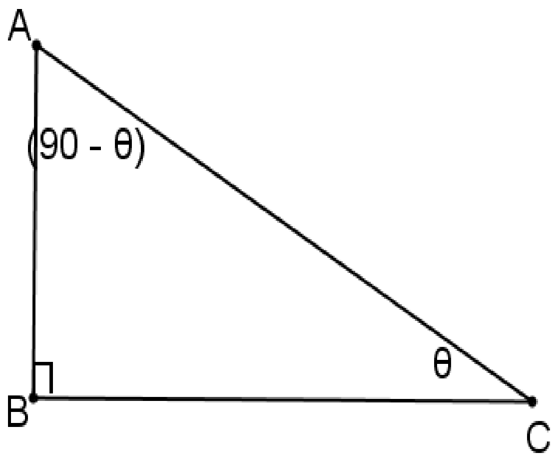
Sec θ = Cosec(90 – θ)

Δ ABC मध्ये, $\angle ABC = 90$,

$\angle ACB = \theta$ व

$\angle BAC =$ (90- θ)

सिद्धता (V)
सारा मामला 'को'चा



Δ ABC मध्ये, $\angle ABC = 90$,
$\angle ACB = \theta$ व
$\angle BAC = (90 - \theta)$

व्याख्यांनुसार,

1) Tanθ = $\dfrac{\text{कोनासमोरील बाजू}}{\text{कोनालगतची बाजू}} = \dfrac{\mathbf{AB}}{\mathbf{CB}}$

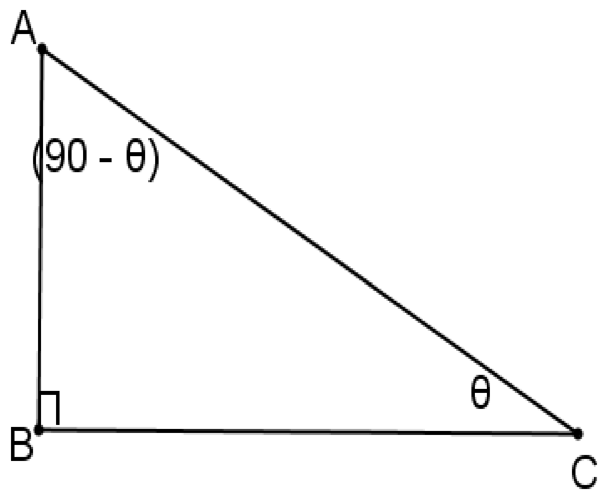
2) Cot(90 - θ) = $\dfrac{\text{कोनालगतची बाजू}}{\text{कोनासमोरील बाजू}} = \dfrac{AB}{CB}$

3) विधान (1) व (2) वरून,
Tanθ = Cot(90 - θ)

सिद्धता (VI)
सारा मामला ’को’चा

T8_L7_A6

व्याख्यांनुसार,



1.Cotθ = $\frac{\text{कोनालगतची बाजू}}{\text{कोनासमोरील बाजू}}$ = $\frac{CB}{AB}$

2. Tan (90 - θ = $\frac{\text{कोनासमोरील बाजू}}{\text{कोनालगतची बाजू}}$ = $\frac{CB}{AB}$

3.∴विधान(1) व (2) वरून ,

Cotϴ = Tan(90-ϴ)......

Δ ABC मध्ये, $\angle ABC = 90,$
$\angle ACB = \theta$ व
$\angle BAC$= (90- θ)

सारांश

T8_L7_A7

कोटीकोनाच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांमधील संबध

भाग I) sineθ= Cosine(90-θ) व sine(90-θ)= Cosineθ

म्हणजेच **एका लघुकोनाचे SINE गुणोत्तर = त्याच्या कोटीकोनाचे COSINEगुणोत्तर**

भाग II) SECANT θ = COSECANTθ(90-θ) व
SECANT(90-θ)= COSECANTθ म्हणजेच
एका लघुकोनाचे SECANT गुणोत्तर = त्याच्या कोटीकोनाचे COSECANT गुणोत्तर

भाग III) TANGENTθ = COTANGENT(90-θ) व
TANGENT(90-θ) = COTANGENTθ म्हणजेच
एका लघुकोनाचे TANGENT गुणोत्तर=त्याच्या कोटीकोनाचे COTANGENTगुणोत्तर

एका लघुकोनाचे त्रिकोणमितीय गुणोत्तर त्याच्या लघुकोनाच्या कोणत्या गुणोत्तराशी समान असते? याचे सोपे उत्तर म्हणजे **जर दिलेल्या कोनाच्या गुणोत्तराच्या नावात 'CO' असेल तर काढा व नसेल तर जोडा म्हणजे कोटिकोनाचे गुणोत्तर मिळेल.**

कोटीकोनाच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांमधील संबध

1) Sine 20 = त्याच्या कोटिकोनाचे कोणते गुणोत्तर?

उत्तर: Sine या गुणोत्तराच्या नावात **'CO' नाही, मग तो Sine ला जोडा.**

Sine20 = Cos 70

याचप्रमाणे पुढील समानता मिळतात.

2) **Sec 50 = Cosec 40**

3) **Tan 30 = Cot 60**

4) **Cosine 80 =** त्याच्या कोटिकोनाचे कोणते गुणोत्तर?

उत्तर: **Cosine** या गुणोत्तराच्या नावात **'CO' आहे, मग तो काढा.**

Cos 80 = Sin 10

5) **Cosec 37 = Sec 53……(90 – 37= 53)**

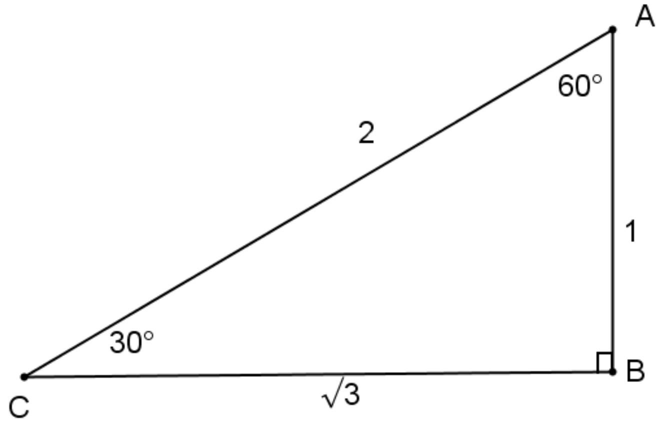
6) **Cot 48 = Tan 42 …….(90 – 48 = 42)**

असा हा मामला 'CO' चा

T8_L8

काही विशिष्ट लघुकोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे:

आता आपल्याला हे कळले आहे की, काटकोन त्रिकोणातील प्रत्येक लघुकोनासाठी त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे न बदलणारी असतात.(स्थिर असतात.) त्यांपैकी काही उपयुक्त गुणोत्तरांच्या किंमती शोधू. खालील आकृती लक्षात ठेवली की, व्याख्यांवरून या किंमती सहज मिळतील.



30°, 60° मापांच्या कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे.

30^0, 60^0, 90^0मापाच्या त्रिकोणात,

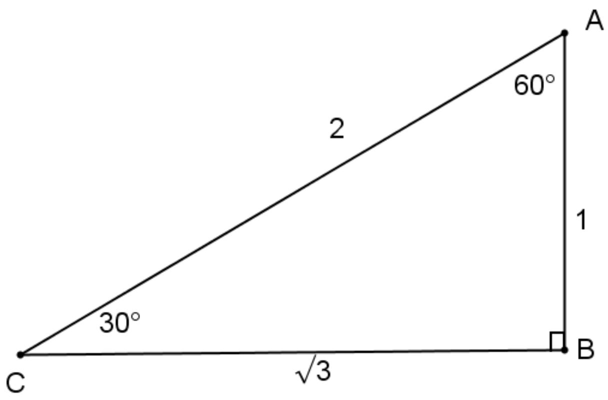
i) 30^0मापाच्या कोनासमोरील बाजू कर्णाच्या निम्म्या लांबीची असते.

ii) 60^0मापाच्या कोनासमोरील बाजू = कर्ण × $\frac{\sqrt{3}}{2}$असते.

कर्ण AC = 2 घेऊ.

AB = $\frac{AC}{2} = \frac{2}{2} = 1$............ (30^0मापाच्या कोनासमोरील बाजू)

BC = AC × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 2 × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\sqrt{3}$ ....(60^0मापाच्या कोनासमोरील बाजू)

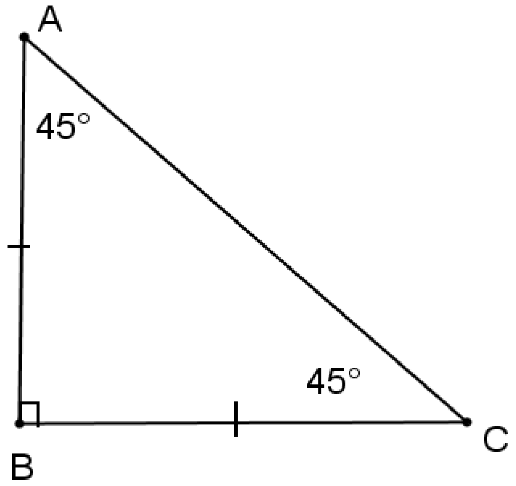


व्याख्यांनुसार,

1. $\sin 30 = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$
2. $\text{Cos } 30 = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\text{Tan } 30 = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
4. $\text{Cosec } 30 = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{1}$
5. $\text{Sec } 30 = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$
6. $\text{Cot}30 = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

1. $\text{Sin } 60 = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos 60 = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$
3. $\text{Tan}60 = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1}$
4. $\text{Cosec } 60 = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$
5. $\text{Sec } 60 = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{1}$
3. $\text{Cot}60 = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

45° मापाच्या कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे



ΔABC हा 45°–45°–90° प्रकारचा त्रिकोण आहे.

त्याचे दोन कोन एकरूप असल्याने त्या कोनासमोरील बाजूही एकरूप आहेत. (समव्दिभुज त्रिकोणाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास)

AB= CB

अशा त्रिकोणाला समद्विभुज काटकोन त्रिकोण असेही म्हणतात.

AB = CB = 1 ही सोयीची किंमत घेऊ.

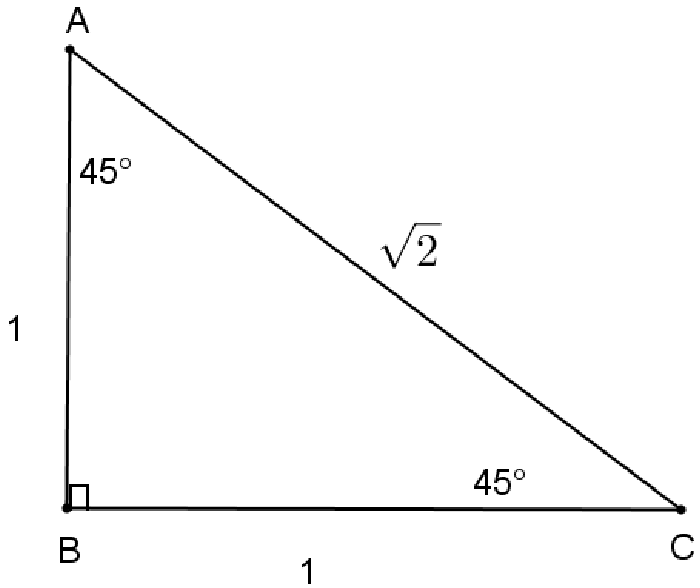
∴ पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$AC^2 = AB^2 + CB^2$

$\therefore AC^2 = 1+1 = 2$

$\therefore AC = \sqrt{2}$

आपण ∠A ची त्रिकोणमितीय गुणोत्तर लिहू.



1)Sin 45= $\frac{\text{कोनासमोरील बाजू}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2)cos 45= $\frac{\text{कोनालगतची बाजू}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3)Tan 45= $\frac{\text{कोनासमोरील बाजू}}{\text{कोनालगतची बाजू}} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{1} = 1$

4)cosec 45= $\frac{\text{कर्ण}}{\text{कोनासमोरील बाजू}} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

5)sec 45= $\frac{\text{कर्ण}}{\text{कोनालगतची बाजू}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

6)Cot45= $\frac{\text{कोनालगतची बाजू}}{\text{कोनासमोरील बाजू}} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{1} = 1$

ही आकृती बाजूंच्या लांबीसह लक्षात ठेवावी म्हणजे किंमती पाठ कराव्या लागणार नाहीत.

टीप: 45° मापाच्या कोनाच्या कोटीकोनाचे मापही 45° च असते. त्यामुळे

sin45=cos45, cosec45= sec45, Tan45= cot45 या समानता मिळतात.

0^0 व 90^0 मापांच्या कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरे:

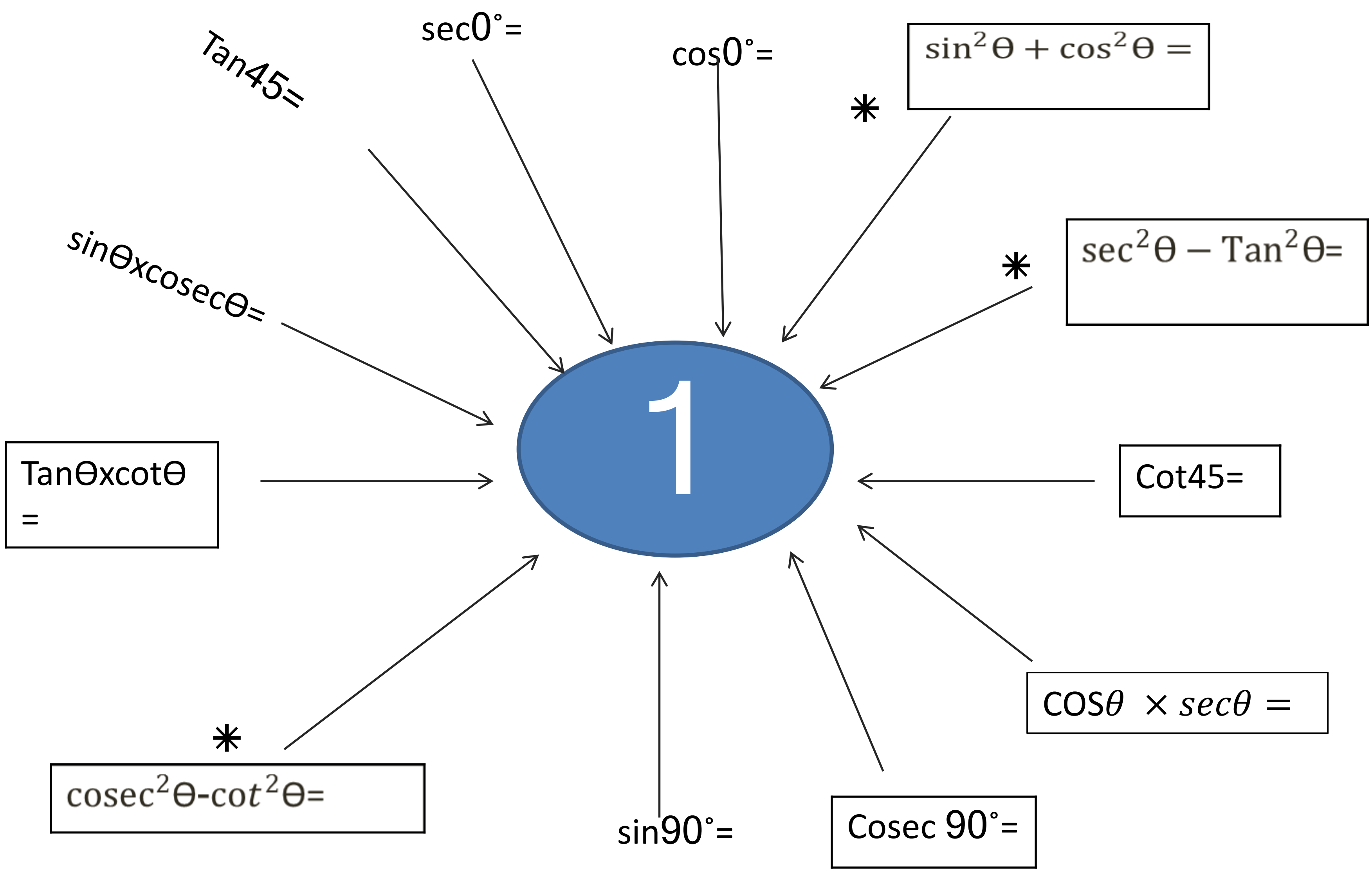
0^0 व 90^0 मापांच्या कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किंमती पुढील प्रमाणे घेतात.

1. sin0 = 0
2. Cos 0 = 1
3. Tan 0 = 0
4. Cosec 0 अव्याख्येय
5. Sec 0 = 1
6. Cot0 अव्याख्येय

1. Sin 90= 1
2. Cos 90 = 0
3. Tan 90 अव्याख्येय
4. Cosec 90 = 1
5. Sec 90 अव्याख्येय
6. Cot 90 = 0

जर अपूर्णांकाचा छेद = 0 असेल तर अशा अपूर्णांकाला अव्याख्येय म्हटले जाते. कारण 0 ने भागणे अर्थहीन असते.

सारांश:



* या खुणेने दाखविलेली त्रिकोणमितीची तीन नित्यसमीकरणे तुम्ही इ.10 वी मध्ये शिकणार आहात ती महत्वाची असल्याने येथे दिली आहेत.

Exercise

गट I): 1 गुणांचे प्रश्न

1) व्याख्यांनुसार $\sec\theta$ = ..., $\cot\theta$ = ..., $\sin\theta$ = ...,

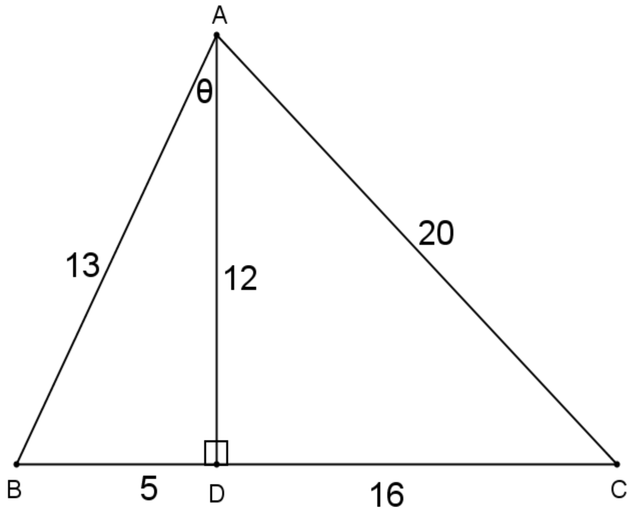
$\cos\theta$ =..........., $\tan\theta$ =........., cosecθ = ...

2) $\sin\theta$ चा गुणाकार व्यस्त असलेल्या गुणोत्तराचे नाव लिहा.

$\cot\theta$ चा गुणाकार व्यस्त असलेल्या गुणोत्तराचे नाव लिहा.

$\sec\theta$ चा गुणाकार व्यस्त असलेल्या गुणोत्तराचे नाव लिहा.

T8_L9

3) 

सोबतच्या आकृतीच्या सहाय्याने किंमती

i) $\cos\theta$ ii) $\sec(90-\theta)$

iii) $\sin\alpha$ iv) cosec $(90-\theta)$

v) $\cos(90-\alpha)$ vi) $\cot\alpha$

गट II) : 2 गुणांचे प्रश्न

प्रश्न 1) सोपे रूप द्या.

a) $sin^2\ 30 + sin^2\ 60$

b) $\frac{tan30}{tan45} \times \tan 60$

c) $\frac{tan60}{2\times cos30}$

d) $\frac{sin57}{cos33}$

e) $\cos 38^0 \cos 52^0 - \sin 38^0 \sin 52^0$

2) जर $\tan 3A$ = $\sin 45 \times \cos 45 + \sin 30$ तर A ची किंमत काढा.

3) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तर θ चे माप किती? व $\sec\theta$ = किती?

4) जर $\tan\theta = \frac{5}{2}$ तर $\cot\theta$ ची किंमत किती?

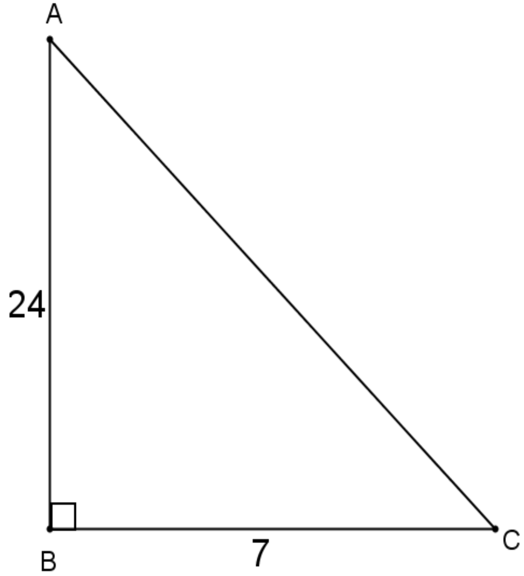
5) जर $\cot\theta = sin^2 90$ तर θ चे माप किती?

गट III): 3 गुणांचे प्रश्न:

1) जर $4sin^2$ A= 3 तर ∠A चे माप किती?

2) जर $\tan\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ तर $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\cot\theta$, cosecθ च्या किंमती काढा.

3)



जर सोबतच्या आकृतीत, $\angle ABC = 90^0$,

AB= 24,BC=7 तर पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

i) AC = किती?

ii) $\cos A$ = किती?

iii) $\tan c$ = किती?

गट IV) :4 गुणांचे प्रश्न:

1) जर $\angle A = 30^0$ तर पुढील किंमती काढा व त्यातून $\sin A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ हे सत्य दाखवा

i) $\sin 3A$ ii) $3\sin A$ iii) $4\sin^3 A$

2) जर $\alpha = 45$ तर पुढील समानता सिद्ध करा:

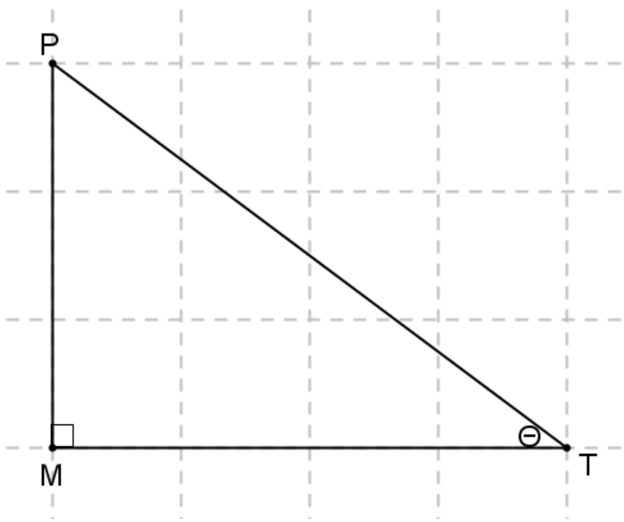
$\sin \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$

Assessment:

काटकोन त्रिकोनाच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या व्याख्या तयार करा व त्यावरून पुढील प्रश्नांची उत्तरे शोधा. त्या उपप्रश्नासाठी दिलेल्या a, b, c व d या चार पर्यायातून योग्य उत्तर निवडा.

गट I)

1)



सोबतच्या आकृतीत, $\angle PMT = 90^0$, $\angle MPT =$……

a) θ

b) 90^0

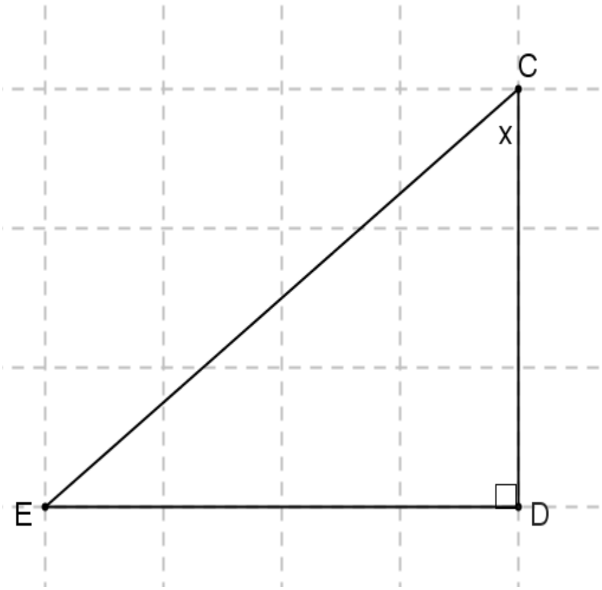
c) (90- θ)

d) (θ – 90)

2) वरील आकृतीत θ मापाच्या कोनाची लगतची बाजू =………

a) रेख PT **b) रेख MT** c) रेख PM d) माहित नाही.

3)



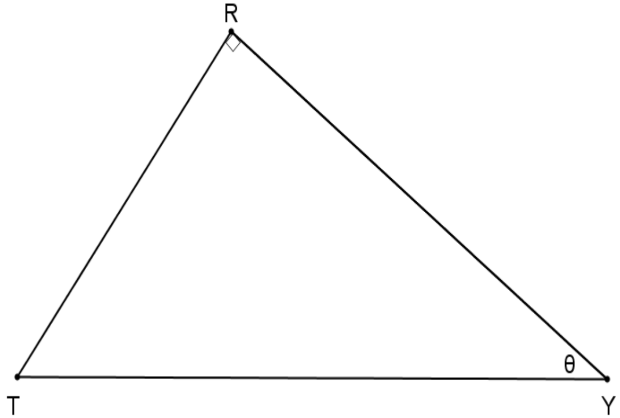
सोबतच्या आकृतीत, ∠DCE=x^0 , ∠CDE=

आकृतीवरून उत्तर द्या.

$\sin(90 - x)$=..........

a) $\frac{DE}{CE}$ b) CD × CE c) $\frac{CD}{CE}$ d) $\frac{CE}{CD}$

4)



सोबतच्या आकृतीत, ∠TRY=90^0, ∠RYT=θ

तर $\cos(90 - \theta)$=.......

a) $\frac{\mathrm{TY}}{\mathrm{RY}}$ b) $\frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{TY}}$ c) $\frac{\mathrm{RY}}{\mathrm{TR}}$ d) $\frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{RY}}$

गट II) 0, 30, 45, 60, 90 मापाच्या कोनांच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या किंमतीवर आधारित

1) $\cos 60$ = ...

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$** c) 1 d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

2) $\sec 30$ = $\frac{......}{......}$

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{2}{1}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{1}$

3) $\cot 45$ =......

a) $\frac{\sqrt{3}}{1}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{1}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ d) 1

4) $\cos 0 = \sin \theta$ असल्यास θ = ...

a) 90 b) 0 c) 45 d) 1

5) $\sin^2 60$ = ……….

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 1