प्रकरण 1: रेषा आणि कोन

संकल्पना चित्र

T1

पूर्वज्ञान :रेषा, रेषाखंड, किरण, कोन, त्यांचे प्रकार, समांतर रेषा, त्यांनी छेदिकेशी केलेल्या कोनांच्या जोड्या व त्य जोडीतील कोनांचे गुणधर्म

↓

युक्लिडची भूमिती, युक्लिडची गृहितके, त्यानुसार आकृत्या

↓

संज्ञा व त्यांचे अर्थ: एकतरी, एक व एकतरी, जास्तीत जास्त एक

↓

प्रतलाची संकल्पना

↓

संकल्पना, व्याख्या, आकृत्या काढता येणे: a) एकरेषीय बिंदू, b) नैकरेषीय बिंदू, c) एकप्रतलीय बिंदू, d) नैकप्रतलीय बिंदू, e) नैकप्रतलीय रेषा, f) छेदणारी प्रतले, g) समांतर प्रतले, h) एकसंपाती रेषा

↓

संख्यारेषेवरील बिंदू, निर्देशक, निर्देशकांवरून तिच्यावरील बिंदूतील अंतर काढणे

↓

दरम्यानतेची संकल्पना, त्यावरून रेषाखंड, किरण यांच्या व्याख्या

↓

एकरूप रेषाखंड: व्याख्या व एकरूप रेषाखंडांचे गुणधर्म, रेषाखंडांचा लहान मोठेपणा, रेषाखंडाचा मध्यबिंदू

↓

विरूद्ध किरण, नैकरेषीय किरण

↓

T1

प्रतलविभाजनाचे गृहितक

↓

सदिश कोन :संकल्पना, व्याख्या, धन व ॠण कोन, शून्य कोन, सरळकोन, प्रविशालकोन, सहअवसानी कोन

↓

i) **कोन:** व्याख्या व कोनांचे 3 प्रकार
ii) एकरूप कोन व त्यांचे गुणधर्म
iii) कोनांचा लहान मोठेपणा
iv) **कोनांच्या जोड्या:**
a) कोटिकोन, b) पूरककोन, c) रेषीय जोडीतील कोन, d) विरूद्ध कोन

↓

भौमितिक विधाने: a) सर्शत विधान, b) व्यत्यास

↓

प्रमेय, उपप्रमेय यांच्या सिद्धता म्हणजे काय? अप्रत्यक्ष सिद्धता

↓

विरुद्ध कोनांचे प्रमेय

↓

समांतर रेषा, व्याख्या, त्यांची छेदिका, छेदिकेशी केलेल्या **कोनांच्या जोड्या:**
a) संगत कोन, b) व्युक्रम कोन, c) आंतरकोन

↓

समांतर रेषांच्या कसोट्या व त्यांच्या सिद्धता:

a) व्युक्रम कोन कसोटी, b) संगत कोन कसोटी, c) आंतरकोन कसोटी

↓

समांतर रेषांच्या इतर दोन कसोट्या

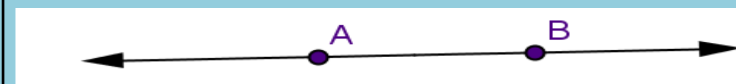
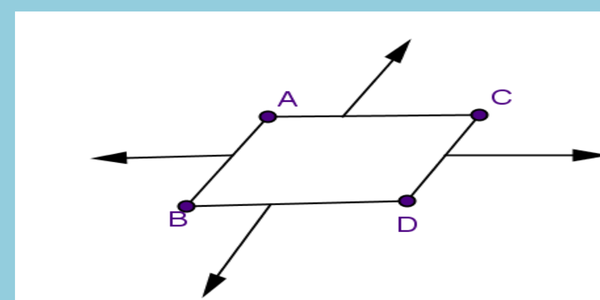
प्रथम ’MS –Word’ मधील ’प्रकरण 1 : रेषा, कोन’

या फाईल मधील माहिती वाचायची आहे त्याच

वेळेला तेथील फोटो दाखवावेत.

T1_L1

बिंदू, रेषा, प्रतल : भूमितीमधील पुढील काही सोप्या संकल्पना अशा आहेत की, व्याख्येशिवायच त्या सहजपणे समजतात.

नाव	वर्णन	आकृती
बिंदू	अतिसूक्ष्म टिंब,अणकुचीदार टाचणीने कागदावर पाडलेले छिद्र	. A बिंदू
रेषा	ताणलेला दोरा, बारीक तार, खोलीच्या एकत्र येणा-या दोन भिंतींची कडा	 रेषा AB: अनंत बिंदूंचा संच
प्रतल	भिंतीचा पृष्ठभाग, फळयाचा पृष्ठभाग, पुस्तकाचे पान	 प्रतल ABC(किंवा BCDकिंवा DAB): अनंत बिंदूंचा संच

’बाणां ‘च्या दिशांनी अमर्यादितता सुचविली जाते.

काही मूलभूत संज्ञांचे अर्थ :

1. एकतरी

अनिकेतला डब्यात दोन तीन तरी लाडू आहेत हे माहित होते म्हणून त्याने आईला विचारले, “मी डब्यातला एकतरी लाडू खाऊ का?”

आईने, “हो” म्हटल्यावर त्याने अर्थातच एकापेक्षा जास्त लाडू खाल्ले.

यावरून तुम्हाला ’एकतरी’ याचा अर्थ काय समजला?

एकतरी: कमीत कमी एक

:एक किंवा त्यापेक्षा जास्त असू शकेल पण एकपेक्षा कमी नाही.

2. जास्तीत जास्त एक

समजा, तुम्ही आजोळी जाण्यासाठी गाडीतून निघाला आहात आणि काही वेळानंतर तुम्ही आईला विचारलेत की, अजून किती वेळाने आपण आजीकडे पोचणार?
तिने सांगितले की,अजून जास्तीत जास्त एक तास लागेल तर तुम्हाला काय समजते?
बरोबर,

'जास्तीत जास्त एक' म्हणजे :

'एक किंवा त्यापेक्षा कमी पण एकपेक्षा अधिक नाही.

3. एकच

अपर्णाजवळ 15 रू आहेत आणि एका सफरचंदाची किंमत 15 रु. असेल तर तिला एकच सफरचंद विकत घेता येईल,त्यापेक्षा जास्त नाही.

एकच म्हणजे एकापेक्षा जास्त नाही.

:

4) एक आणि एकच

दोन भिन्न बिंदू घ्या व त्यांना जोडणारी रेषा पट्टीने काढा. नंतर त्याच दोन बिंदूंतून जाणारी आणखी एक रेषा काढता येते का ते पहा. काय अनुभव आला?

तुम्हाला दोन गोष्टी कळल्या असतील:-

1) दोन भिन्न बिंदू दिले असतील तर त्यांना समाविष्ट करणारी **एकतरी** रेषा काढता येते.

2) ती काढल्यानंतर त्याच दोन बिंदूंना समाविष्ट करणारी त्या **एका** रेषेपेक्षा **जास्त** रेषा काढता येत **नाहीत**.

म्हणून **दोन भिन्न बिंदूंतून जाणारी एक आणि एकच रेषा असते.**

यातील पहिल्या **'एक'** शब्दाने त्या बिंदूतून जाणारी एकतरी रेषा **अस्तित्वा**त असते असे कळते आणि **'एकच'** या शब्दाने **'रेषेचे एकमेवत्व'** कळते.

5.सर्व, प्रत्येक,कोणताही

या चित्रांकडे पाहिल्यावर तुमच्या मनात काय आले?त्यावरून खालील प्रश्नांबद्दल थोडा विचार करा आणि ठरवा की, पुढीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत.

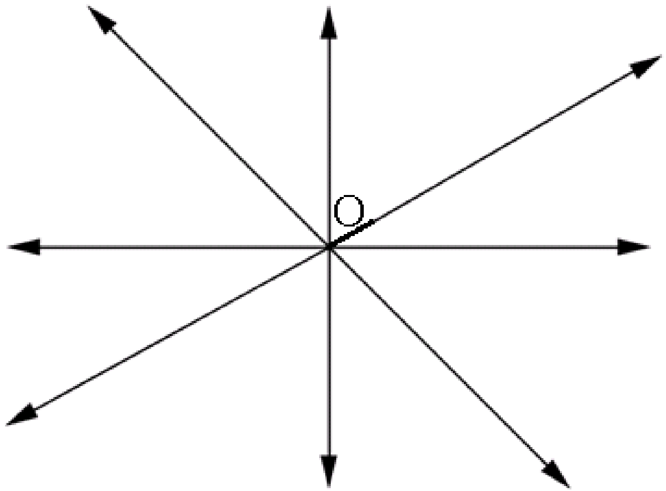
1) चित्रातील सर्व दप्तरे निळी आहेत. 2)चित्रातील प्रत्येक दप्तर निळे आहे .
3) चित्रातील कोणतेही दप्तर निळे आहे.

ही तीनही विधाने सत्य आहेत. याचा अर्थ त्यांच्यातील कोणते शब्द समान अर्थाचे आहेत?

सर्व, प्रत्येक, कोणतेही(कोणताही, कोणातीही) हे सर्व समानार्थी शब्द आहेत. तसेच कोणताही म्हणजे विशिष्ट नाही. हे लक्षात ठेवा.

1.काही गृहितके व व्याख्या

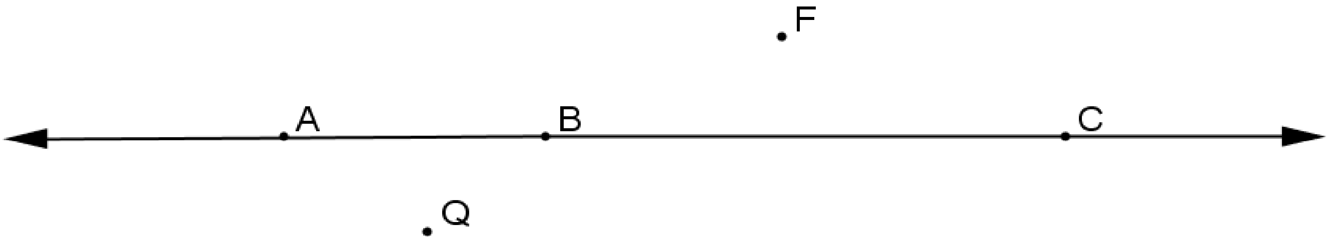
1. समजा, O हा कोणताही एक बिंदू दिला आहे. त्यातून जाणा-या रेषा तुम्हाला काढायच्या आहेत तर अशा किती रेषा काढता येतील?



दिलेल्या एका बिंदूतून जाणा-या अनंत रेषा असतात.

एकरेषीय बिंदू , नैकरेषीय बिंदू

वरील आकृतीमधील बिंदू A,B,O,C हे एकरेषीय आहेत.



वरील आकृतीमधील बिंदू A,B,C, F,Q हे नैकरेषीय आहेत.

या माहितीवरून एकरेषीय बिंदू व नैकरेषीय बिंदू यांच्या व्याख्या तुम्ही तयार करू शकाल का?

2.व्याख्या : एकरेषीय बिंदू , नैकरेषीय बिंदू

1) जर दिलेल्या तीन किंवा त्यापेक्षा अधिक बिंदूतून जाणारी नेमकी एकच रेषा असेल तर त्यांना एकरेषीय बिंदू म्हणतात.

2) जर दिलेल्या तीन किंवा त्यापेक्षा अधिक बिंदूतून जाणारी एकही रेषा नसेल तर त्यांना नैकरेषीय बिंदू म्हणतात.

3) किती बिंदू नेहेमीच एकरेषीय असतात?

उत्तर: दोन भिन्न बिंदू नेहेमीच एकरेषीय असतात.

3) चार नैकरेषीय बिंदू A,B,C,D घ्या. त्यांतून जाणाऱ्या रेषा काढा.

अशा जास्तीत जास्त रेषा काढा. त्यांना नावे द्या. किती रेषा मिळाल्या?

4) चार नैकरेषीय बिंदू आणखी किती प्रकारे घेऊ शकता?

दुसरी शक्यता सापडली तर आता त्यांच्यातून जाणाऱ्या सर्व रेषा काढा.

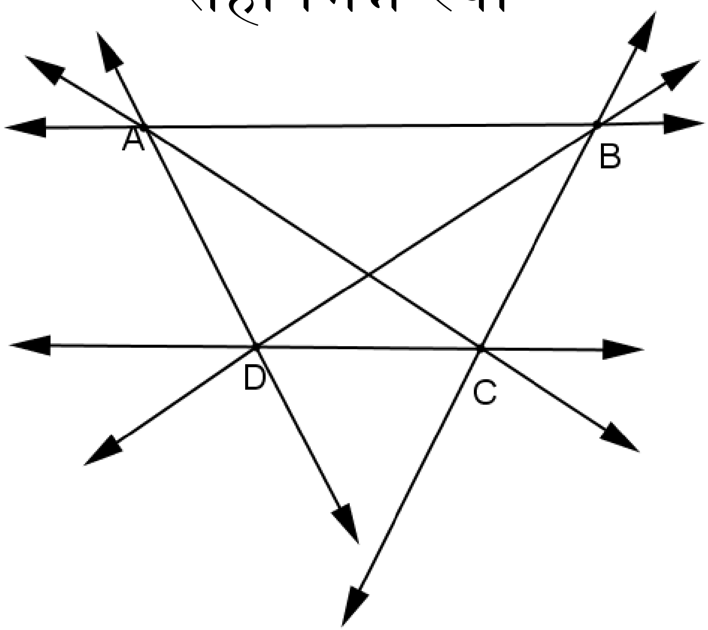
किती रेषा मिळाल्या?

चार नैकरेषीय बिंदू दोन प्रकारे घेता येतात.

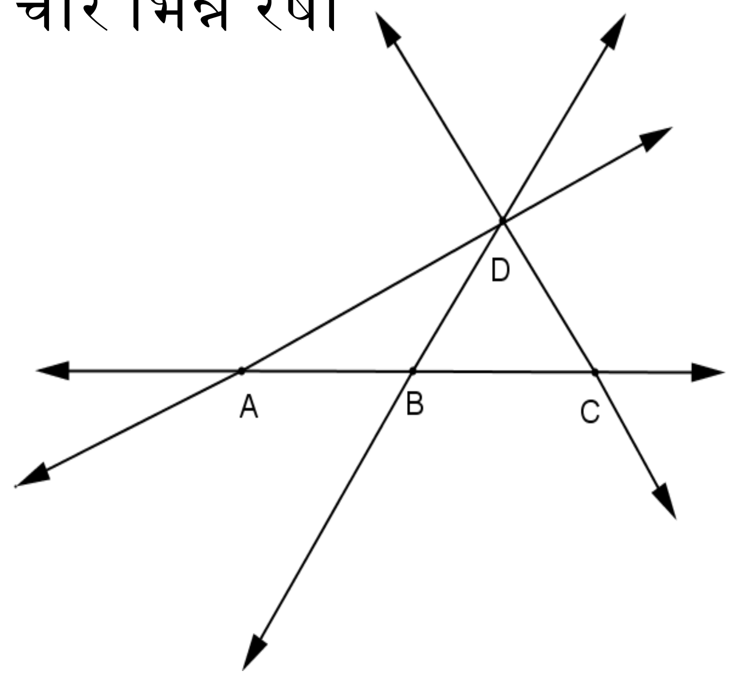
i) चारपैकी कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नाहीत.

ii) चारपैकी तीन बिंदू एकरेषीय असून चौथा बिंदू त्या रेषेबाहेर आहे.

सहा भिन्न रेषा



चार भिन्न रेषा



T1_L3_A1

डोके लढवा:

लेझीमच्या स्पर्धेची तयारी शाळेत सुरू होती.

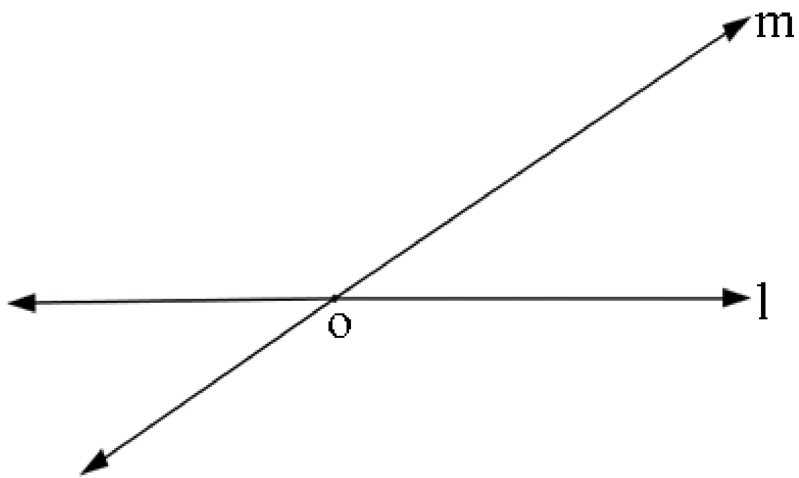
क्रिडाशिक्षकांना 10 मुलांची अशी रचना करायची होती की, प्रत्येकी चार मुले असलेल्या

पाच सरळ रांगा दिसतील.

तुम्ही त्यांना त्यासाठी मदत करू शकाल का?

करा प्रयत्न!

3.दोन छेदणा-या रेषा



रेषा l व रेषा m यांना कोणता बिंदू सामाईक आहे? आपण दोन संचांचा छेदसंच म्हणजे काय हे शिकलो आहोत. या छेदसंचात दोन संचांतील सामाईक घटक असतात.

वरील आकृतीत, रेषा l व रेषा m या बिंदूसंचांचा छेदसंच म्हणजेच त्यांचा सामाईक बिंदू O आहे.

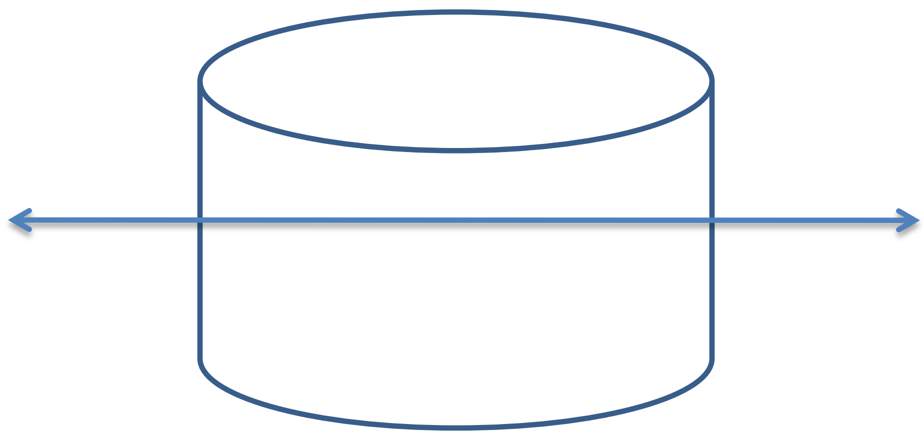
जर दोन भिन्न रेषा परस्परांना छेदत असतील तर त्यांचा छेद नेमका एकच बिंदू असतो.

4.प्रतल: अनंत बिंदूंचा संच

प्रतलाचे वर्णन एखादा सपाट पृष्ठभाग सर्व दिशांनी अमर्याद वाढविला तर जो बिंदूसंच मिळेल तो संच म्हणजे प्रतल असे करता येईल.

प्रतल हा अनंत बिंदूंचा संच असतो.

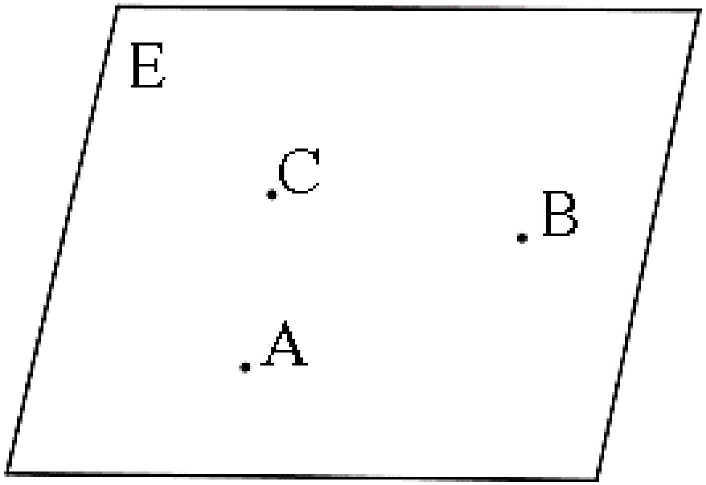
पण एखादा पृष्ठभाग सपाट आहे की नाही हे कसे ठरवितात असा प्रश्न तुम्हाला पडलाय ना? त्यासाठी त्या पृष्ठभागावर दोन भिन्न बिंदू घेतात आणि त्यांना जोडणारी रेषा काढतात. जर त्या रेषेचे सर्व बिंदू त्याच पृष्ठभागावर असणार असे आढळले तर तो सपाट पृष्ठभाग आहे असे ठरते.



शेजारील आकृतीमधील पृष्ठभाग पहा. तो तुमच्या घरातील डब्यासारखाच आहे. डब्याचा बाहेरील पृष्ठभाग सपाट असतो का?

नाही.त्यामुळे हा प्रतलाचा भाग नाही.

5.प्रतल निश्चितीचे गृहितक:



याचा अर्थ असा की,

बिंदू A,B,C या तीन नैकरेषीय बिंदूंतून एकतरी प्रतल जाणारच.

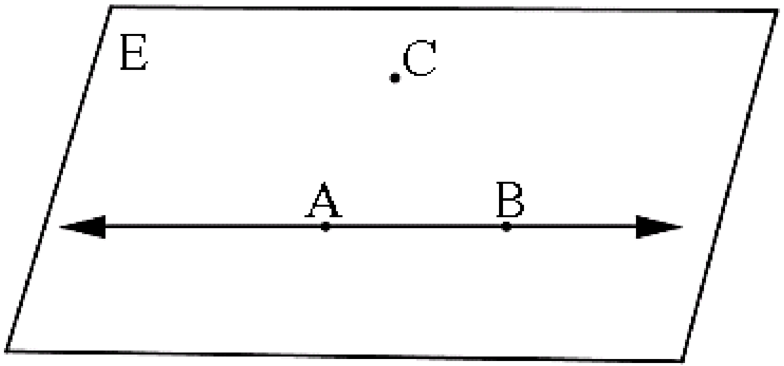
समजा, ते प्रतल E आहे.

बिंदू A,B,C मधून E या प्रतलाखेरीज दुसरे कोणतेही प्रतल जाणार नाही.

तीन नैकरेषीय बिंदूंनी एक आणि एकच प्रतल निश्चित होते.

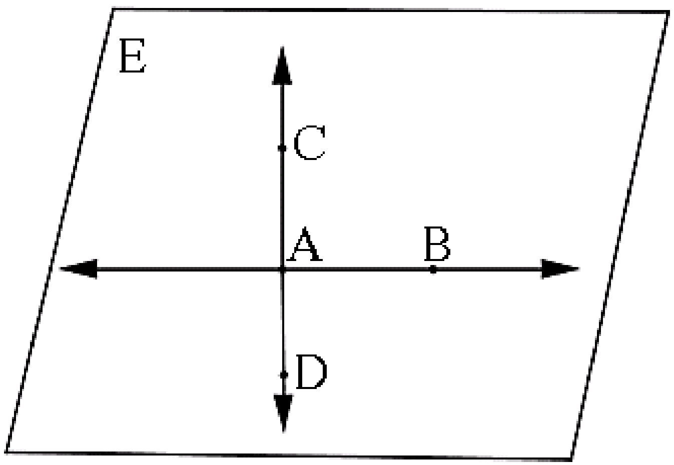
6.प्रतल निश्चित करणारे इतर घटक

1)



आकृतीमधील रेषा AB वरील बिंदू A,B व तिच्याबाहेरील बिंदू C हे नैकरेषीय आहेत.त्यांनी E हे प्रतल निश्चित झाले आहे. एक रेषा व तिच्या बाहेरील बिंदू यांनी एक आणि एकच प्रतल निश्चित होते.

2)



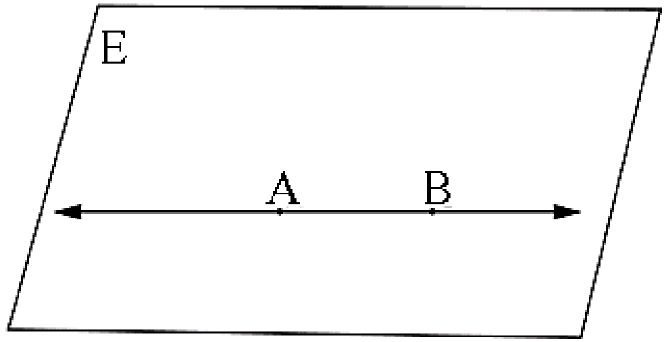
रेषा AB व रेषा CD यांनी E हे प्रतल निश्चित झाले आहे.

दोन छेदणा-या रेषांनी एक आणि एकच प्रतल निश्चित होते.

7.प्रतलातील रेषेचे गृहितक :

प्रतलातील दोन भिन्न बिंदूंना जोडणारी रेषा पूर्णपणे त्याच प्रतलात असते.

याचा अर्थ असा की,
त्या दोन बिंदूंप्रमाणेच रेषेवरील इतर सर्व बिंदू त्याच प्रतलात असतात.

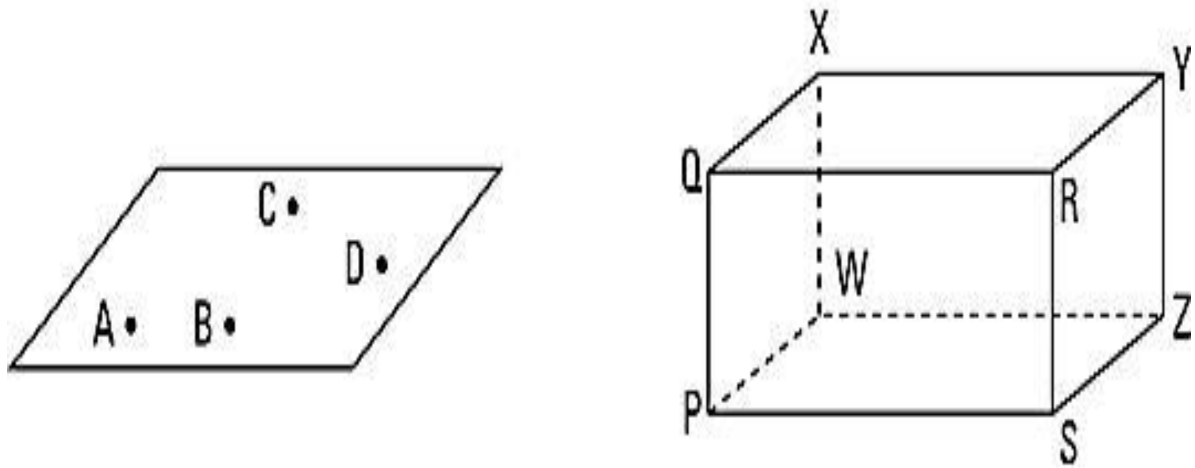


प्रतल E मधील A व B हे दोन बिंदू जोडणा-या रेषा AB चे A व B प्रमाणे इतर सर्व बिंदूही प्रतल E चे घटक असतात.

आता विचार करून सांगा की, पुढीलपैकी कोणते विधान सत्य आहे ते सांगा.
i) रेषा AB ϵ प्रतल E (ii) रेषा AB $\subseteq$ प्रतल E

उत्तर: रेषा AB $\subseteq$ प्रतलE

8.एकप्रतलीय व नैकप्रतलीय बिंदू



जर तुम्हाला एकरेषीय आणि नैकरेषीय बिंदूंची संकल्पना समजली असेल तर त्यासारखीच असलेली एकप्रतलीय व नैकप्रतलीय बिंदू ही संकल्पना तुम्हाला सहज कळेल.

वरील आकृतीमधील बिंदू A,B,C व D हे एकप्रतलीय आहेत.

परंतु बिंदू P,S,W व Y हे नैकप्रतलीय आहेत.

प्रतलाला English मधील Capital letter किंवा त्यातील तीन नैकरेषीय बिंदू वापरूनही नाव देतात.

T1_L3_A5

9.व्याख्या

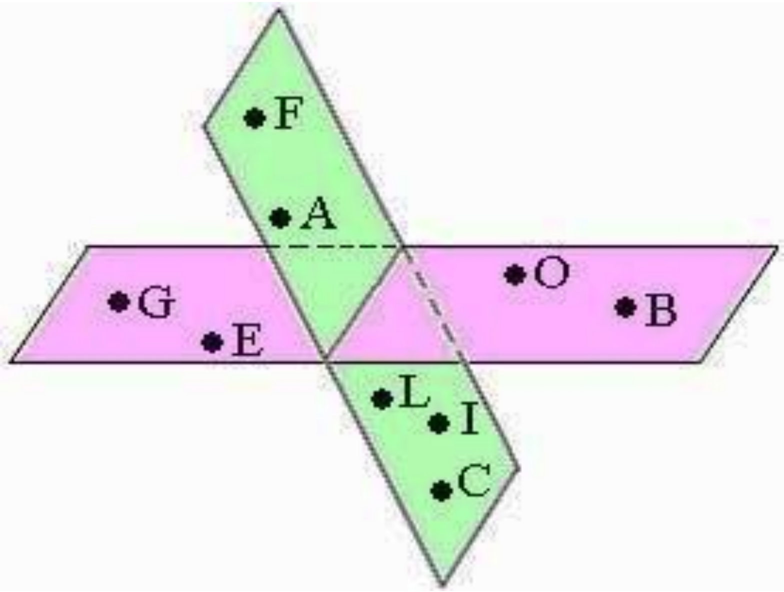
1) जर चार किंवा त्यापेक्षा जास्त बिंदूंतून जाणारे किंवा त्यांना समाविष्ट करणारे नेमके एकच प्रतल असेल तर त्यांना **एकप्रतलीय बिंदू** म्हणतात.

2) जर चार किंवा त्यापेक्षा जास्त बिंदूंतून जाणारे किंवा त्यांना समाविष्ट करणारे नेमके एकच प्रतल नसेल तर त्यांना **नैकप्रतलीय बिंदू** म्हणतात.

3) जर दोन किंवा त्यापेक्षा जास्त रेषांना समाविष्ट करणारे नेमके एकच प्रतल असेल तर त्यांना **एकप्रतलीय रेषा** म्हणतात.

4) जर दोन किंवा त्यापेक्षा जास्त रेषांना समाविष्ट करणारे नेमके एकच प्रतल नसेल तर त्यांना **नैकप्रतलीय रेषा** म्हणतात.

5) दोन एकप्रतलीय रेषा परस्परांना छेदत नसतील तर त्यांना **समांतर रेषा** म्हणतात.

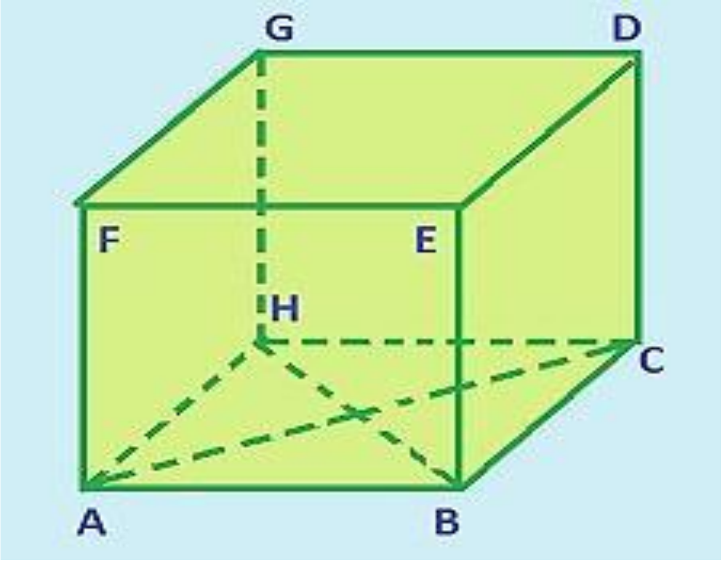


वरील आकृतीत, A, L, I, C हे बिंदू एकप्रतलीय आहेत की नैकप्रतलीय?

उत्तर: A, L, I, C हे बिंदू एकप्रतलीय आहेत.

वरील आकृतीमधील कोणतेही चार नैकप्रतलीय बिंदू सांगा.

उत्तर: (याला अनेक वेगवेगळी उत्तरे लिहिता येतील.
त्यांपैकी एक म्हणजे, बिंदू O,B,E,F हे नैकप्रतलीय आहेत.



1) या आकृतीमध्ये किती भिन्न प्रतले आहेत?
त्यांची नावे त्यांमधील तीन नैकरेषीय बिंदूंवरून लिहा.

2) बिंदू D,E,F हे ज्या प्रतलात आहेत त्याच प्रतलातील आणखी एका बिंदूचे नाव सांगा.

3) आकृतीत, रेख AB ला समांतर असणारे तीन रेषाखंड कोणते?

4) रेख AH व रेख DE समांतर आहेत का?

5) रेख BH व रेख AC हे एकप्रतलीय आहेत का? कारण सांगा.

6) तुमच्या आजूबाजूला वरील आकृतीसारख्या अनेक वस्तू तुम्ही बघता.
त्यांची निदान तीन उदाहरणे सांगा.

उत्तरे: 1) आकृतीत एकूण सहा प्रतले आहेत.

त्यांची नावे **i)** ABC **ii)** BCD **iii)** DEF **v)** FGH **vi)** BEF

2) बिंदू D,E,F हे ज्या प्रतलात आहेत त्याच प्रतलातील आणखी एक बिंदू G आहे.

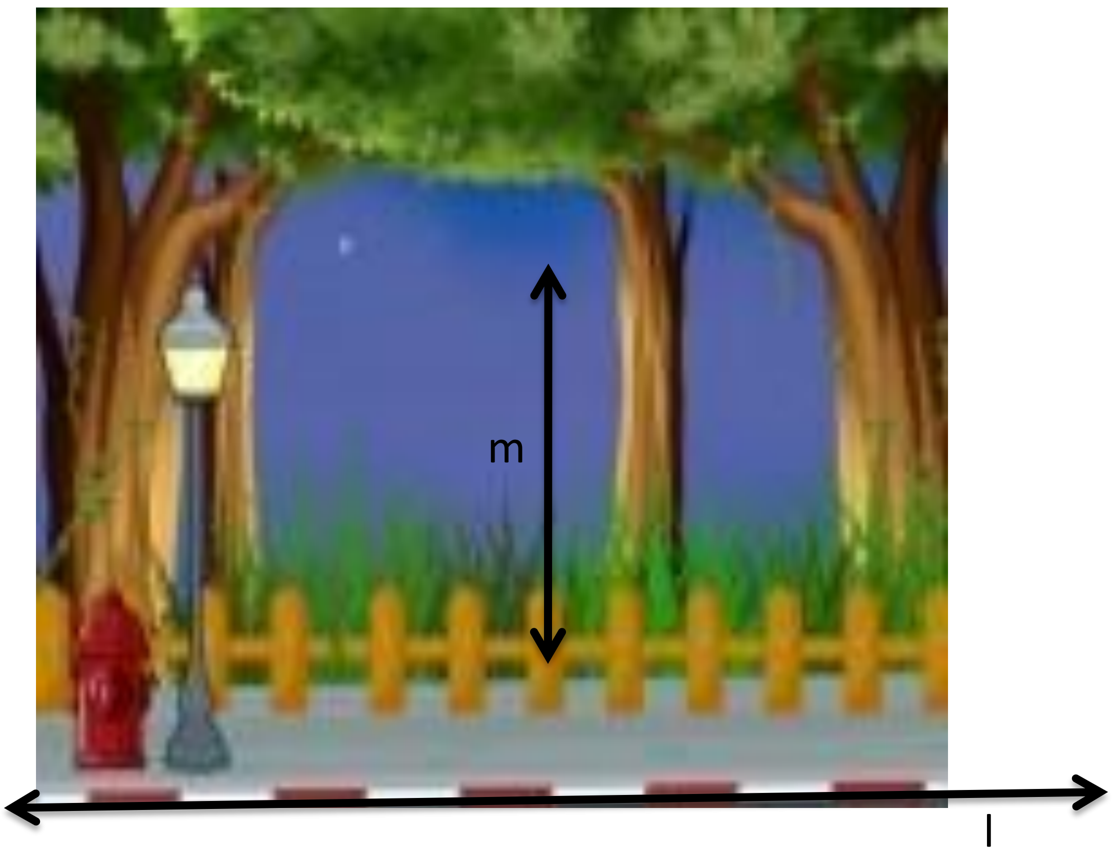
3) रेख AB || रेख EF || रेख GD || रेख CH

4) रेख AH || रेख DE सत्य आहे.

5) रेख BH व रेख AC एकप्रतलीय आहेत कारण दोन छेदणा-या रेषा एक व एकच प्रतल निश्चित करतात.

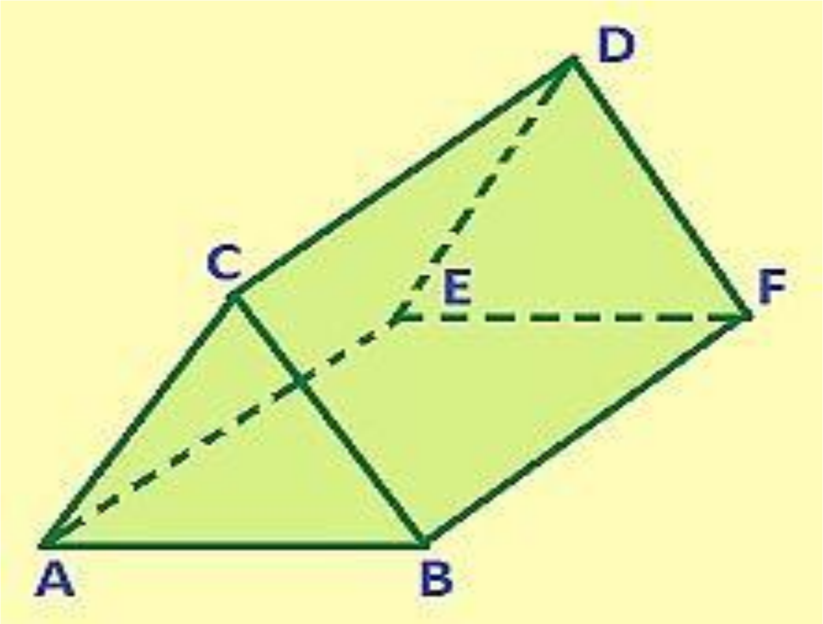
6) आकृत्या दिलेल्या आकृतीसारखी आपण नेहेमी पाहतो ती उदाहरणे म्हणजे आगकाड्यांची पेटी,सापशिडीच्या खेळातील फासा, भूमितीचे पुस्तक इ.

10.दोन रेषा समांतर किंवा छेदणा-या यांपेक्षा वेगळ्या प्रकारच्या असू शकतात का?



असा प्रश्न यशला पडला. मग त्याने शेजारच्या फोटोत रेषा l आणि रेषा m काढल्या आणि मामाला e-mail ने हे चित्र पाठवले आणि विचारले, रेषा l आणि रेषा m रस्त्याच्या विरूध्द बाजूला आहेत मला वाटतंय की त्या समांतर नाहीत आणि छेदणा-याही नाहीत, एका प्रतलातील नाहीत.मग त्या कोणत्या प्रकारच्या आहेत?

मामाने कळविले की,या रेषा एकप्रतलीय नाहीत. त्यांना नैकप्रतलीय/ वितलीय रेषा म्हणतात.



यशप्रमाणे तुम्हीसुध्दा आपल्या अवतीभोवती छेदणा-या / समांतर / नैकप्रतलीय रेषाखंड दिसतात का याकडे लक्ष द्या.

शेजारच्या आकृतीचे निरीक्षण करून पुढील सारणीत योग्य रकान्यात ही ✓ खूण करा.

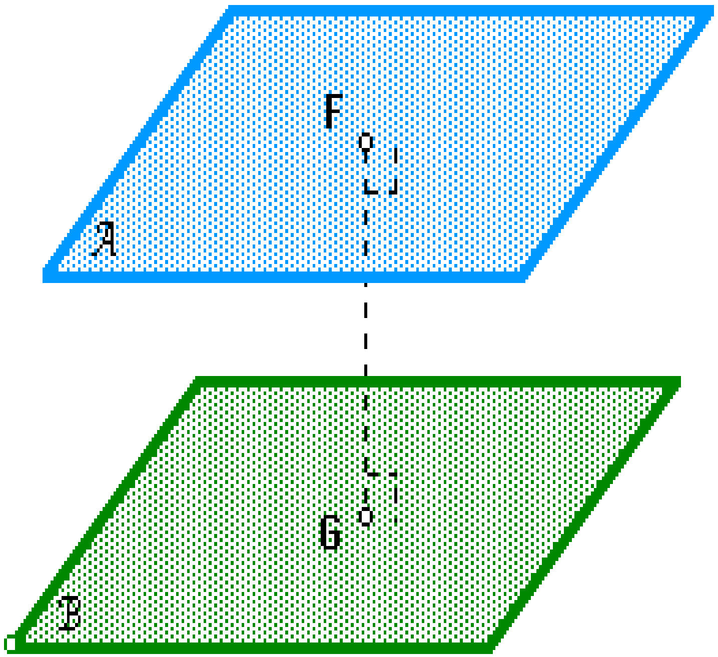
रेषाखंडांची जोडी	छेदणा-या	समांतर	नैकप्रतलीय
रेख AB व रेख EF			
रेख BC व रेख DF			
रेख AE व रेख DF			
रेख BC व रेख BF			
रेख AE व रेख CD			

T1_L3_A6

उत्तरे:

रेषाखंडांची जोडी	छेदणा-या	समांतर	नैकप्रतलीय
रेख AB व रेख EF		✓	
रेख BF व रेख DF	✓		
रेख AE व रेख DF			✓
रेख BC व रेख BF		✓	
रेख AE व रेख CD		✓	

11.समांतर प्रतले :



सोबतच्या दोन आकृत्या पहा.

दोन छेदणा-या रेषा व दोन समांतर रेषा यांच्या व्याख्या आठवा. त्यांच्या प्रमाणेच छेदणारी प्रतले आणि समांतर प्रतले यांच्या व्याख्या तुम्ही तयार करू शकाल का?.

येथे, प्रतल F || प्रतल G आहे.

तुमच्या अवती-भवती तुम्हाला समांतर आणि छेदणा-या प्रतलांचे भाग दिसतात का?

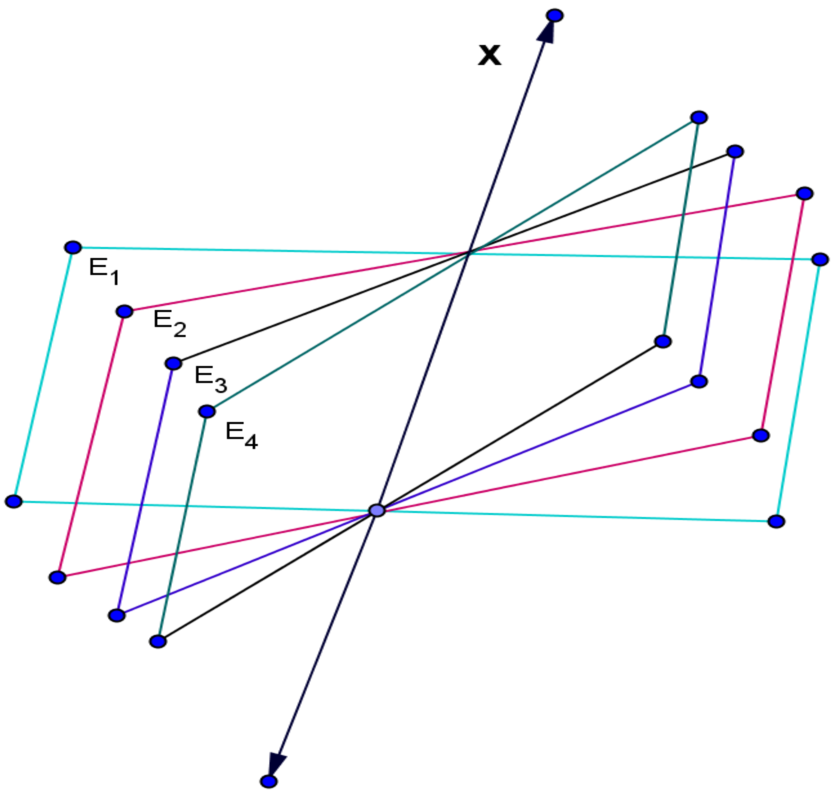
12.छेदणारी प्रतले:

सोबतच्या आकृतीत रेषा X कोणकोणत्या प्रतलात समाविष्ट आहे?

तुमचे निरीक्षण सांगा.

मात्र लक्षात घ्या की, प्रतल तसेच रेषा अमर्याद असतात.

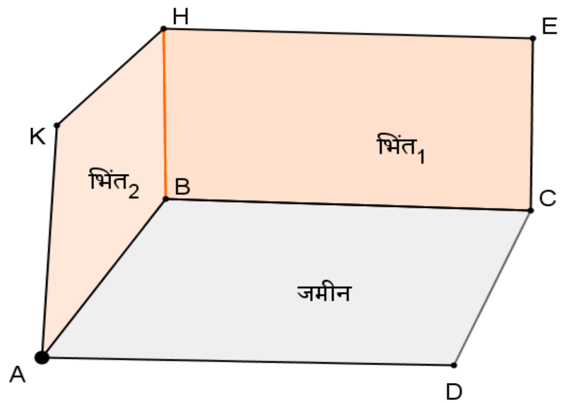
उत्तर: प्रतले E_1 ,E_2,E_3, E_4 या चारही प्रतलात रेषा X समाविष्ट आहे.



म्हणजे या चारही प्रतलांचा छेदसंच रेषा Xआहे.

याचाच दुसरा अर्थ आहे की,
रेषा X या एका रेषेतून अनेक प्रतले जातात.

13.छेदणारी प्रतले:

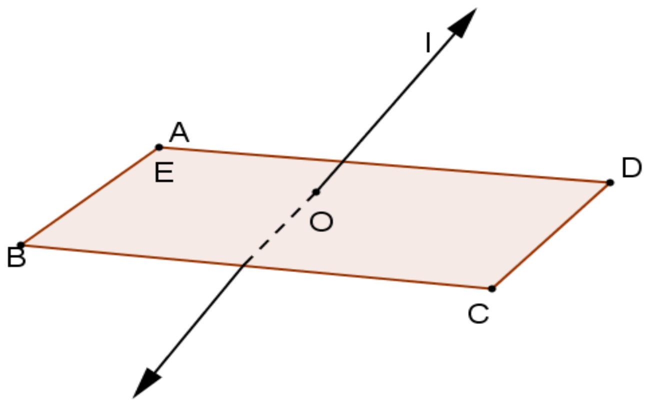


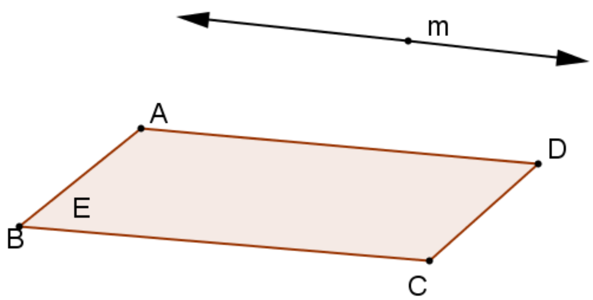
आकृतीत खोलीच्या दोन भिंती व जमीन दाखविली आहे.

म्हणजेच आकृतीत 3 भिन्न प्रतले दिसतात.प्रत्येक प्रतल इतर दोन्हींना छेदत आहे. प्रतल अमर्याद असते याचा विचार केलात तर कळेल की प्रतल A,B,H व प्रतल A,B,C यांचा छेदसंच रेषा AB आहे. प्रतल A,B,C व प्रतल H,B,C यांचा छेदसंच रेषा BC आहे. प्रतल A,B,H व प्रतल H,B,C यांचा छेदसंच रेषा HB आहे.

जर दोन प्रतले परस्परांना छेदत असतील तर त्यांचा छेदसंच एक आणि एकच रेषा असते.

प्रतलाबाहेरील रेषा व प्रतल यांमध्ये कोणत्या दोन शक्यता असतात?



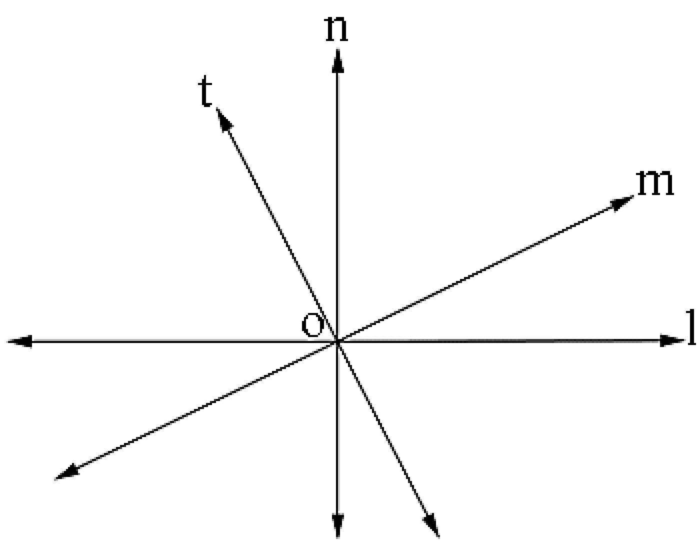


आकृती (1) मध्ये रेषा l ही E या प्रतलाबाहेरील रेषा आहे परंतु ती E प्रतलाला O बिंदूत छेदते.

आकृती (2) मध्ये रेषा m ही E या प्रतलाबाहेरील रेषा आहे परंतु ती E प्रतलाला कोणत्याही बिंदूत छेदत नाही. ती E या प्रतलाला समांतर आहे.

विचार करा की, प्रतलाबाहेरची एखादी रेषा त्या प्रतलाला दोन भिन्न बिंदूत छेदत असेल का?

14.एकसंपाती रेषा:



सोबतच्या आकृतीमधील 4 रेषांची काय काय वैशिष्ट्ये तुम्हाला सांगता येतील ?

उत्तरे:

1) या चारही रेषा एकाच प्रतलातील आहेत.

2) या सर्व रेषा O या एकाच बिंदूत परस्परांना छेदत आहेत. म्हणजेच त्या O या एकाच बिंदूतून जात आहेत.

व्याख्या: एकाच प्रतलातील तीन किंवा त्याहून जास्त रेषा परस्परांना एकाच बिंदूत छेदत असतील तर त्यांना एकसंपाती रेषा म्हणतात व त्यांच्या छेदबिंदूला त्या रेषांचा संपातबिंदू म्हणतात.

∴ रेषा l, m, n,t या एकसंपाती असून त्यांचा संपातबिंदू O आहे.

15.संख्यारेषा व दोन बिंदूंमधील अंतराचे गृहितक:

अंतराचे गृहितक: दोन भिन्न बिंदूंमधील अंतर ही धन वास्तव संख्या असते.

P व Q या बिंदूंमधील अंतर d(P,Q) किंवा d(Q,P) ने दाखवितात.

जर P व Q हे भिन्न बिंदू असतील तर d(P,Q) > o

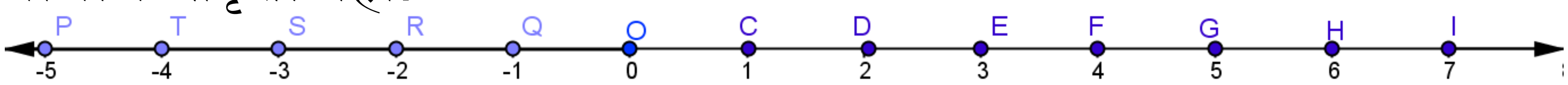
जर P व Q हे भिन्न बिंदू नसतील तर d(P,Q) = o

रेषेवरील बिंदूंनी संख्या दाखवितात तेव्हा तिला संख्यारेषा म्हणतात हे तुम्हाला माहित आहे.

एखाद्या बिंदूने दाखविलेल्या संख्येला त्या बिंदूचा निर्देशक म्हणतात.

त्यांचा उपयोग करून बिंदूंमधील अंतर आपण ठरवू शकतो.

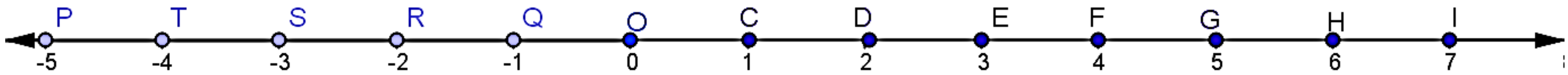
खालील आकृती पहा.



O बिंदूने 0(शून्य) ही संख्या दाखविली जाते म्हणून त्याला आरंभबिंदू म्हणतात.
त्याच्या उजवीकडील बिंदूंनी धन व डावीकडील बिंदूंनी ऋण संख्या दाखवितात.
दोन क्रमवार पूर्णांकांमधील अंतर बदलत नाहीत व त्याला प्रमाण म्हणतात.

T1_L4

16.संख्यारेषा व बिंदूंमधील अंतर



वरील रेषेवर C बिंदूचा निर्देशक 1 आहे व E बिंदूचा निर्देशक 3 आहे.

जर आपण रेषेवरून मोजले तर कळेल की, C आणि E बिंदूतील अंतर 2 एकक आहे.त्यांच्या निर्देशकांमधील फरक = 3-1 = 2आहे.

आता आणखी एका बिंदूंच्या जोडीतील अंतर प्रथम मोजून पाहू व नंतर निर्देशकांचा विचार करू. बिंदू S व G यांच्या मधील अंतर रेषेवरून मोजले तर ते 8 एकक आहे.

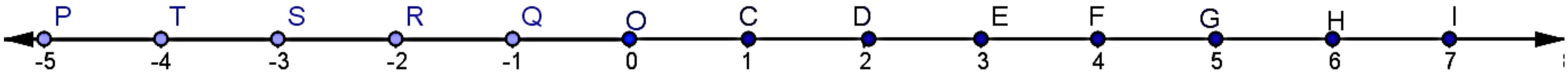
S बिंदूचा निर्देशक -3 आहे व G बिंदूचा निर्देशक 5 आहे.

त्यांच्या निर्देशकांमधील फरक = 5 – (-3) = 5+3 = 8 एकक आहे.

बिंदू P व Q यांच्या मधील अंतर रेषेवरून मोजले तर ते 4 एकक आहे.

P बिंदूचा निर्देशक -5 आहे व Q बिंदूचा निर्देशक -1आहे.

त्यांच्या निर्देशकांमधील फरक = -1 – (-5) = -1 + 5 = 4 एकक आहे.



या आधीच्या तीन उदाहरणांवरून संख्यारेषेवरील दोन बिंदूंमधील अंतर आणि त्या बिंदूंचे निर्देशक यांच्यातील संबंध तुमच्या लक्षात आला असेल.

तो योग्य आहे का नाही हे आणखी काही बिंदूंच्या जोड्या निवडून त्याच प्रकारे काढा.उत्तर रेषेवरून त्या बिंदूंमधील अंतर मोजून पडताळून पहा.

आता तुम्हीसुध्दा अंतर काढण्याचे सूत्र तयार करू शकाल. त्यासाठी खालील दोन गोष्टी लक्षात ठेवा.

i) अंतर ही धन संख्या असते.

ii) दोन संख्यांमधील फरक म्हणजे त्यांपैकी मोठी संख्या – लहान संख्या

तुमचे सूत्र वापरून वरील रेषेवरून पुढील किंमती काढा: d(D,H), d(F,T),d(O,R), d(O,D)

उत्तरे: d(D,H) = 6-2 =4. d(F,T) = 4- (-4)= 4+4 =8, d(O,R)= 0-(-2)=2, d(O,D) = 2-0=2

17.दरम्यानता:

जुन्या हिंदी चित्रपटात एका गाण्यात कोडे होते. तुम्हाला ते कदाचित माहित असेल.

तीतरके दो आगे तीतर,

तीतरके दो पिछे तितर,

आगे तीतर,पीछे तीतर ,

बोलो कितने तीतर ?

या कोड्याचे उत्तर सोपे आहे. विचार करा.

समजा, कोड्यातील तीन तीतर पक्षी लहान मुलांप्रमाणे भांडायला लागले आणि प्रत्येकजण म्हणू लागला की, मी नाही तुमच्या दोघांच्या मध्ये राहून चालणार पण आपण एकामागोमाग सरळच (रेषेवर) मात्र राहायचेच, तर हे दोन्ही एकाचवेळी करणे शक्य होईल का?

तुमच्यापैकी तीनजणांनी एकाच बाकावर बसायचे ठरविले आहे. कितीही प्रयत्न केलात तरी कोणातरी एकाला दुस-या दोघांच्या मध्ये बसावेच लागेल नाही का?

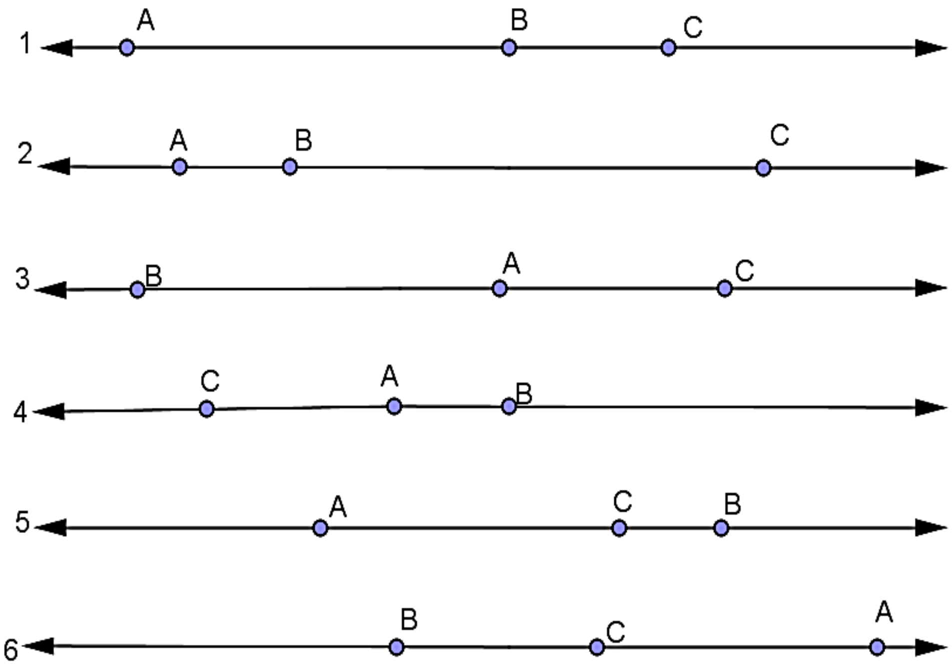
याचा भूमितीशी काय संबंध?

यावरून तीन एकरेषीय बिंदूंची दरम्यानता ही संकल्पना तुम्हाला कळेल.

18.तीन एकरेषीय बिंदूंची दरम्यानता:

T1_L5

हे कळण्यासाठी एक रेषा काढा.तिच्यावर A,B,C हे तीन बिंदू शक्य त्या सर्व प्रकारे दाखवा.



आकृती 1व 2 मध्ये,B बिंदू A व C यांच्या दरम्यान आहे असे म्हणतात.
चिन्हात A-B-C असे लिहितात.

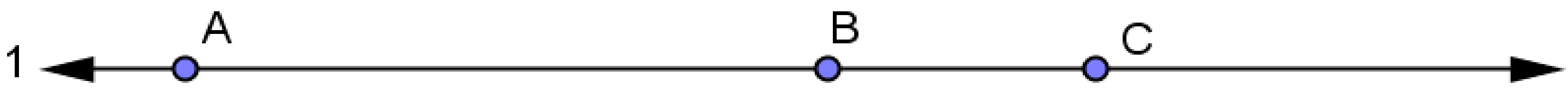
आकृती 3 व 4 मध्ये, Aबिंदू B व C यांच्या दरम्यान आहे असे म्हणतात.
चिन्हात B-A-C असे लिहितात.

आकृती 5 व 6 मध्ये, C बिंदू A व B यांच्या दरम्यान आहे असे म्हणतात.
चिन्हात A-C-B असे लिहितात.

यांवरून असे दिसते की,तीन एकरेषीय बिंदू घेतले की त्या फुलपाखरांप्रमाणे दरम्यानता तयार होतेच.त्यांपैकी एक आणि एकच बिंदू इतर दोन बिंदूंच्या दरम्यान असतो.

एकाच वर्तुळावर कोणतेही तीन बिंदू घ्या व त्यांमध्ये अशी दरम्यानता मिळते का बघा.

19.दरम्यानता आणि अंतर



वरील आकृतीत A –B- C अशी दरम्यानता आहे. जर AB = 6, BC =4 तर AC हे अंतर किती असेल, हे कोणालाही सहज कळेल.

AC = 6+4 =10

यातून कोणते समीकरण मिळाले?

d(A,B)+ d(B,C) = d(A,C)

तसेच जर d(P,Q) = d(P, R) + d(Q,R) हे अंतरांमधील समीकरण सत्य असेल तर रेषेवर काय दरम्यानता असेल?

जर d(P,Q) = d(P , R) + d(Q,R) तर P-R-Q अशी दरमान्यता असेल.

जर d(S,M) = 3.6, d(M,N) = 5.4 व d(S,N) = 4.5 असेल तर यावरून S,M N बिंदूबद्दल काय महत्वाची माहिती कळेल?

यामध्ये सर्वात मोठे अंतर = 5.4 आहे . आता इतर दोन अंतरांची बेरीज करू. 4.5 +3.6 = 8.1 असल्यामुळे S,M,N या तीन बिंदूंमध्ये दरम्यानता संबंध नाही.

पण आपण तर सहा आकृत्या काढून पाहिले की, तीन बिंदू एकरेषीय असल्यास त्यांच्यात दरम्यानता संबंध असतोच.

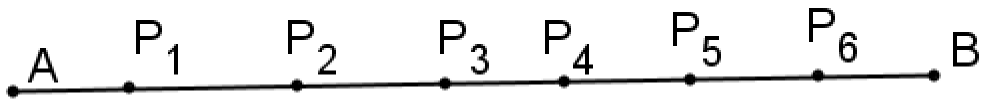
यावरून काय निष्कर्ष निघतो?

अगदीच सोपे आहे की, हे तीन बिंदू नैकरेषीय असणार.

ते एका त्रिकोणाचे शिरोबिंदू असतील.

दरम्यानतेच्या संकल्पनेचा आपण अनेक प्रकारे उपयोग यापुढे करणार आहोत.

20.रेषाखंड : दरम्यानतेवरून व्याख्या



वरील आकृतीत A आणि B हे भिन्न बिंदू आहेत.

तुम्हाला $P_1, P_2, \ldots P_6$ या बिंदूंच्या जागांचे वर्णन A व B च्या संदर्भात सांगता येईल का?

हे सर्व बिंदू A व B च्या दरम्यानचे आहेत.

जर A व B हे भिन्न बिंदू आणि त्यांच्या दरम्यानचे सर्व बिंदू यांचा संच घेतला तर कोणता संच मिळेल?

रेषाखंड AB किंवा रेषाखंड BA

व्याख्या: जर A व B हे भिन्न बिंदू आणि त्यांच्या दरम्यानचे <u>सर्व</u> बिंदू यांच्या संचाला रेषाखंड AB म्हणतात. A व B यांना त्याचे अंत्यबिंदू म्हणतात. अंत्यबिंदूमधील अंतराला त्या रेषाखंडाची लांबी म्हणतात.

21.रेषाखंडांची एकरूपता व गुणधर्म:

कोणत्याही दोन एकप्रतलीय आकृत्या एकमेकांवर ठेवल्या आणि त्या तंतोतंत जुळल्या तर त्यांना एकरूप आकृत्या म्हणतात.

यापूर्वी एकरूप रेषाखंडांबद्दल तुम्ही शिकला आहात.त्याची थोडक्यात उजळणी करू.

समजा, AB = 6cm , CD = 5.9 cm , PQ = 6 cm. व RS = 5.9 cm तर यांपैकी कोणते रेषाखंड एकरूप आहेत? का?

समान लांबीचे रेषाखंड एकरूप असतात. या व्याख्येवरून,

रेख AB ≅रेख PQ व रेख CD ≅रेख RS

येथे रेख AB ≅रेख AB किंवा रेख CD≅ रेख CD असे म्हणता येईल का?

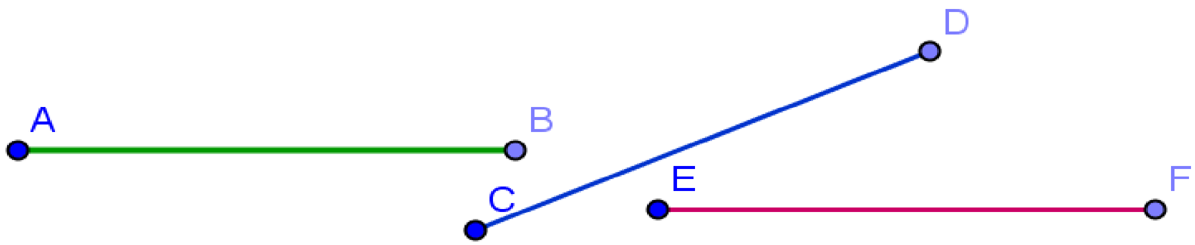
हो,असे नक्कीच म्हणता येईल.

.

1) रेख AB ≅रेख AB (रेख AB ≅रेख BA).या गुणधर्माला **'परावर्तनता'** असे म्हणतात.

2)तसेच रेख AB ≅रेख PQ असल्यामुळे रेख PQ≅रेख AB असेही म्हणता येते. या गुणधर्माला **’सममितता’** म्हणतात.

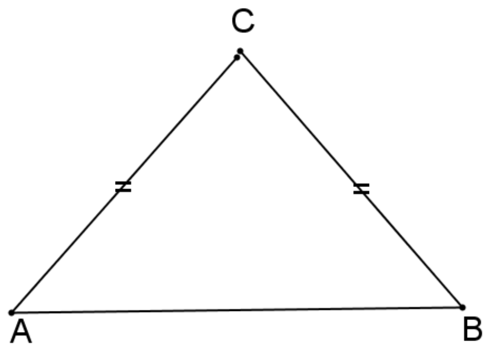
3)



वरील आकृतीमध्ये, जर रेख AB ≅रेख CD व रेख CD≅ रेख PQ असेल तर रेख AB≅ रेख PQ ही एकरूपता कळेल. या गुणधर्माला **’संक्रामकता’** म्हणतात.

22.रेषाखंडाचा मध्यबिंदू

1)



2)

वरील आकृत्यांमध्ये CA=CB आहे तसेच EH = FH आहे.

C बिंदू रेख AB च्या अंत्यबिंदूंपासून समदूर आहे व H बिंदू Eव F पासून समदूर आहे.आकृती1 मध्ये, C बिंदूला रेख AB चा मध्यबिंदू म्हणतात का?

आकृती 2 मध्ये, H बिंदूला रेख EF चा मध्यबिंदू म्हणतात का?

आकृती 2 मध्ये, H बिंदूला रेख EF चा मध्यबिंदू म्हणतात कारण तो रेख EF वर आहे. (E-H-F) आणि EH = FH आहे. परंतु आकृती 1 मध्ये जरी CA=CB आहे तरी C बिंदू रेख AB वर नाही म्हणून तो रेख AB चा मध्यबिंदू नाही.

आता रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूची अचूक व्याख्या तुम्ही तयार करा.

23.किरण : दरम्यानतेवरून व्याख्या

T1_L7

एक छोटी कृती करा.

1. एक रेषा काढा. तिच्यावर A व B हे दोन भिन्न बिंदू दाखवा.
2. रेख AB चे सर्व बिंदू ठळक करून घ्या.
3. आता असे बिंदू ठळक करा की जे रेषा AB वर आहेत आणि त्यांच्यामुळे A – B – P अशी दरम्यानता मिळेल.(असे अनेक बिंदू असतात.त्यामुळे नमुन्यादाखल काही बिंदू निवडा.)

या बिंदूसंचाला किरण AB म्हणतात. A बिंदूला किरण AB चा आरंभबिंदू म्हणतात.

रेषाखंड AB व रेषाखंड BA हे संच समान असतात तसे किरण AB व किरण BA समान संच असतील का यावर विचार करा.

किरण AB व किरण BA हे समान संच नाहीत कारण या बिंदूसंचांत भिन्न घटक आहेत.
किरण AB व किरण BA यांचे आरंभबिंदू अनुक्रमे A व B आहेत.
हा तर त्यांच्यात महत्वाचा फरक आहेच.
आकृती काढलीत तर फरक अधिक चांगला कळेल.

किरण BA वरील M_1, M_2, M_5, M_4 सारखे बिंदू किरण AB वर नाहीत.या बिंदूंमुळे B-A-M_1 अशी दरम्यानता मिळते.

24.दोन किरणांवरील क्रिया:

किरण BA चा आरंभबिंदू B आहे . रेख AB चे सर्व बिंदू किरण BA चेही बिंदू आहेत. त्यांच्याखेरीज रेषा AB चे M_1, M_2, M_3, M_4 …असे सर्व बिंदू या किरणावर आहेत की, ज्यांच्यामुळे B-A-M अशी दरम्यानता मिळते.

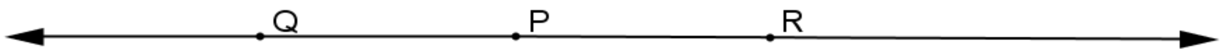
किरण AB व किरण BA यांच्या नावांवरून त्यांना A व B बिंदू सामाईक आहेत हे तुम्हाला कळले असेलच. त्यांखेरीज आणखी अनेक बिंदू त्यांना सामाईक आहेत. अशा सर्व सामाईक बिंदूंनी या किरणांचा छेदसंच आपल्याला मिळतो. तो संच कोणता? हे चिन्हात कसे लिहिता येईल?

किरण AB ∩ किरण BA = रेख AB (किंवा) रेख BA

या दोन्ही किरणांचा संयोग संच कोणता? ते चिन्हात कसे लिहिता येईल?

किरण AB ∪ किरण BA = रेषा AB

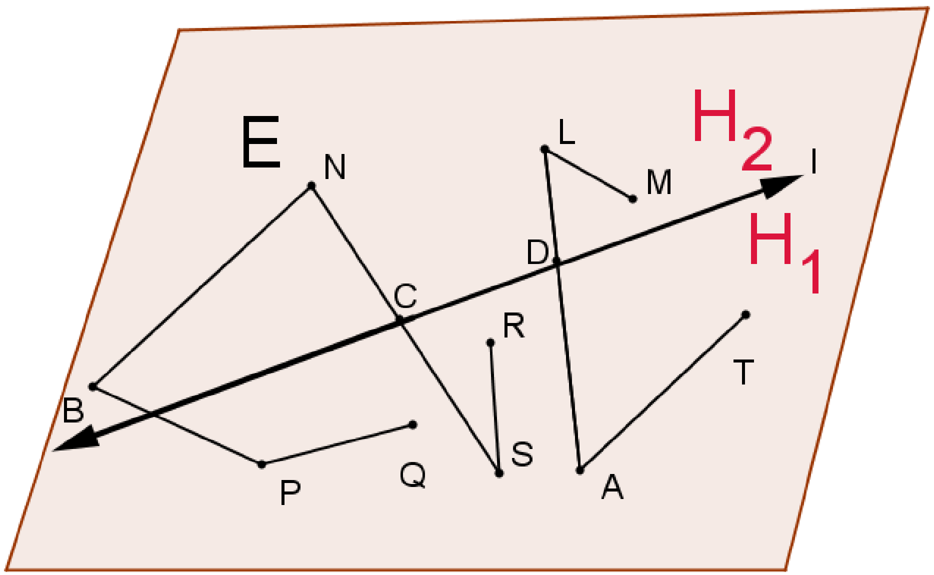
25.विरुद्ध किरण : व्याख्या



या आकृतीत असलेल्या बिंदूसंचांबद्दल तुम्हाला काय काय सांगता येईल?

1. यामध्ये रेषा PQ हा एक अनंत बिंदूंचा संच आहे.
2. रेषा PQ चे तीन घटक Q,P, R असून त्यांमध्ये Q-P-R अशी दरम्यानता आहे.
3. त्यामुळे तयार झालेले किरण PQ व किरण PR यांना P बिंदू सामाईक आहे.परंतु या किरणांना P बिंदूखेरीज इतर कोणताही बिंदू सामाईक नाही. किरण PQ व किरण PR यांना विरुध्द किरण म्हणतात.
   संचाच्या भाषेत, i) किरण PQ ∪ किरण PR = रेषा PQ
   ii) किरण PQ ∩ किरण PR = रेख PQ
   iii) रेख PQ ⊆ किरण PQ ⊆ रेषा PQ

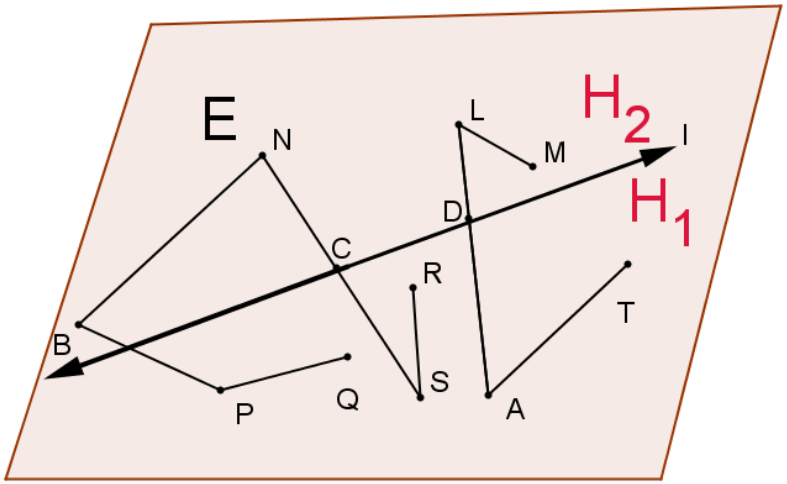
26.प्रतल विभाजनाचे गृहितक



प्रतल E मध्ये रेषा l ही कोणतीही एक रेषा काढली तर रेषा l वर नसलेल्या त्या प्रतलातील बिंदूंचे दोन नवीन संच तयार होतात. त्यांना अर्धप्रतले म्हणतात. या अर्धप्रतलांना एकही बिंदू सामाईक नसतो म्हणजेच ते विभिन्न संच असतात. ज्या रेषेमुळे प्रतलाचे विभाजन होते तिला त्या अर्धप्रतलांची कडा म्हणतात.

सोबतच्या आकृतीत, प्रतल E चे रेषा l ने विभाजन झाले असून तयार झालेली अर्धप्रतले H_1 ,H_2 आहेत.

आता आकृतीचे निरीक्षण करून पुढीलपैकी जी विधाने तुम्हाला पटतील त्यांच्या समर्थनार्थ आकृतीमधून योग्य ती कोणतीही दोन योग्य उदाहरणे शोधून लिहा.जे विधान तुम्हाला पटणार नाही त्याच्यापुढे ते विधान का चुकीचे वाटते त्याचा खुलासा करा.



i) H_1 हे अर्धप्रतल H_2 पेक्षा मोठे आहे.

तुमचा खुलासा:

ii)त्यांपैकी एकाच अर्धप्रतलात दोन भिन्न बिंदू घेतले आणि त्यांना जोडणारा रेषाखंड काढला तर तो रेषाखंड पूर्णपणे त्याच अर्धप्रतलात असतो.

तुमचा खुलासा:

iii) एका अर्धप्रतलात एक बिंदू घेऊन तो दुस-या अर्धप्रतलातील एका बिंदूला जोडणारा रेषाखंड काढला तर तो रेषाखंड विभाजन करणा-या रेषेला छेदतो.

तुमचा खुलासा:

iv) रेषा l चे बिंदू दोन्ही अर्धप्रतलात आहेत.

तुमचा खुलासा:

v) रेषा l मुळे प्रतल E चे तीन विभिन्न उपसंच तयार झाले आहेत.

तुमचा खुलासा:

योग्य खुलासा:

i) प्रतल अमर्याद असल्याने अर्धप्रतलेही अमर्याद असतात. त्यांच्यात लहान मोठेपणा नसतो

ii) हे विधान सत्य आहे. त्यासाठी जर आपण रेख BN, रेख PQ, रेख RS,

रेख AT हे रेषाखंड पूर्णपणे निवडले तर तो प्रत्येक रेषाखंड एकाच अर्धप्रतलात समाविष्ट आहे.

iii) एका अर्धप्रतलात एक बिंदू घेऊन तो दुस-या अर्धप्रतलातील एका बिंदूला जोडणारा रेषाखंड काढला तर तो रेषाखंड विभाजन करणा-या रेषेला छेदतो हे रेख BP,रेख AN व रेख SN वरून पटते आहे.

iv) रेषा l चे बिंदू दोन्ही अर्धप्रतलात असतात हे विधान पटत नाही कारण सुरूवातीलाच असे दिले आहे की, तर रेषा l वर नसलेल्या त्या प्रतलातील बिंदूंचे दोन नवीन संच तयार होतात. त्यांना अर्धप्रतले म्हणतात.

या अर्धप्रतलांना एकही बिंदू सामाईक नसतो.

v) रेषा l मुळे प्रतलाचे तीन विभिन्न उपसंच तयार होतात,(हे विधान (iv) वरून पटते आहे.)

या खुलाशात असलेल्या विधानांतून प्रतल विभाजनाचे गृहितक तयार झाले आहे.

27.सशर्त विधाने व काही नवीन संकल्पना

ज्या पूर्णांकाच्या एकक स्थानी 0 किंवा 5 यांपैकी एखादा अंक असतो त्याला 5 ने भाग जातो.हे तुम्हाला माहित आहे.

हेच विधान पुढीलप्रमाणेही सांगता येईल.

जर (एखाद्या पूर्णांकाच्या एकक स्थानी 0 किंवा 5 यांपैकी एखादा अंक असेल)

तर (त्या पूर्णांकाला 5 ने भाग जातो.)

दिलेले विधान वरीलप्रमाणे जर .... तर............. अशाप्रकारे किंवा

जेव्हा .... तेव्हा .... अशाप्रकारे व्यक्त केले तर त्याला **सशर्त विधान** म्हणतात.

भूमितीमध्ये **सशर्त विधाने** लिहिता येणे महत्वाचे असते. ते सरावाने सहज जमते.

पुढील विधाने जर..... ...तर .... या स्वरूपात लिहा.

1. सामान्य विधान :दोन एकप्रतलीय रेषा समांतर किंवा छेदणा-या असतात.

सशर्त विधान :जर दोन रेषा एकपतलीय असतील तर त्या समांतर किंवा छेदणा-या असतात.

2. सामान्य विधान: कोणताही चौरस हा आयत असतो..

सशर्त विधान: जर एखादा चौकोन चौरस असेल तर तो आयतही असतो.

T1_L9

सशर्त विधानात जर नंतर आलेल्या वाक्यांशाला 'पक्ष' किंवा 'पूर्वांग' म्हणतात व तर नंतर आलेल्या वाक्यांशाला ' साध्य' किंवा' उत्तरांग' म्हणतात.

सशर्त विधान: जर एखादा चौकोन चौरस असेल तर तो आयतही असतो.

या विधानातील

पक्ष(पूर्वांग): दिलेला चौकोन चौरस आहे.

साध्य (उत्तरांग) : दिलेला चौकोन आयत आहे.

पक्ष हा साध्यातील विधान सत्य होण्यासाठी 'पुरेसे' असतो.
साध्य हे पक्षासाठी आवश्यक असते.

सशर्त विधान: जर एखादा चौकोन समांतरभुज असेल तर त्याचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

येथे एखादा चौकोन समांतरभुज असणे हे त्याचे कर्ण परस्परांना दुभागण्यासाठी पुरेसे आहे.

चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागण्यासाठी तो समांतरभुज असणे आवश्यक असते.

28.सशर्त विधानाचा 'व्यत्यास'

T1_L9_A1

सशर्त विधानात जर आणि तर नंतरच्या विधानांची अदलबदल करून

मिळण्या-या विधानाला त्याचा 'व्यत्यास' म्हणतात

1)सशर्त विधान: जर एखादा चौकोन समांतरभुज असेल तर त्याचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

व्यत्यास: जर एखाद्या चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात असतील तर तो समांतरभुज असतो.

2) सशर्त विधान: जर एखादा दिवस हा रविवार असेल तर त्या दिवशी शाळेला सुट्टी असते.

व्यत्यास: जर एखाद्या दिवशी शाळेला सुट्टी असेल तर तो रविवार असतो.

वरीलपैकी 1) मधील सशर्त विधान आणि त्याचा 'व्यत्यास' दोन्ही सत्य आहे.

पण

2) मधील सशर्त विधान सत्य आहे पण व्यत्यास मात्र असत्य आहे.

या उदाहरणातून असे आढळते की,विधान सत्य असले तरी त्याचा व्यत्यास सत्य असेलच असे नाही.

29.विधान आणि त्याचे नकारी विधान:

खाली दिलेली विधाने वाचा व प्रत्येक विधानापुढे ते सत्य असल्यास ✓ आणि असत्य असल्यास × ही चिन्हे लिहा व सारणी पूर्ण करा.

विधान	सत्य	असत्य	विधान	सत्य	असत्य
a)4ही विषम संख्या आहे.			b)4 ही सम संख्या आहे.		
c) $3^2 = 8$,			d) $3^2 \neq 8$.		
e)√2ही अपरिमेय संख्या आहे .			f) √2ही परिमेय संख्या आहे		

या सारणीमध्ये विधानांच्या ज्या जोड्या आहेत त्यांना परस्परांची नकारी विधाने किंवा नकरणे म्हणतात.

सारणीवरून रिकाम्या जागा भरा.

जे विधान सत्य असते त्याचे नकरण .... असते. तसेच

जे विधान असत्य असते त्याचे नकरण .... असते.

उत्तरे : जे विधान सत्य असते त्याचे नकरण असत्य असते. तसेच

जे विधान असत्य असते त्याचे नकरण सत्य असते.

$\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे याचे नकारी विधान $\sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या आहे असे होते कारण जी संख्या परिमेय नसते तिला अपरिमेय संख्या म्हणतात.

जर $\sqrt{2}$ हीपरिमेय संख्या आहे हे असत्य असेल तर $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे हे सत्य ठरते.

30.विसंगत विधाने

T1_L9_A3

विसंगत विधाने म्हणजे काय ते तुम्हाला पुढील दोन विधानांवरून कळेल.

i)जेव्हा आगरकर वारले तेव्हा टिळक खूप रडले.

ii)नंतर जेव्हा टिळक वारले तेव्हा आगरकरही रडले.

ही दोन विधाने परस्परांशी जुळणारी नाहीत म्हणजेच ती विसंगत आहेत.

त्यांच्यापैकी कोणतेही एकच विधान सत्य आहे .

समजा, तुम्हाला अशी दोन विधाने मिळाली की,

i) $\angle a \cong \angle b$ व ii) $\angle a$ काटकोन आहे व $\angle b$ हा लघुकोन आहे.

या विधानांबद्दल तुम्हाला काय वाटते?

उत्तर: यातील विधान (i) व (ii) ही विसंगत विधाने आहेत, कारण जर विधान (i) सत्य असेल तर त्यांची मापे समान असली पाहिजेत आणि विधान (ii) सत्य असेल तर काटकोन व लघुकोन यांच्या व्याख्यांनुसार त्यांपैकी $\angle a$ चे माप $90°$ व $\angle b$ चे माप $90°$ पेक्षा कमी असणार.त्यांची मापे समान असणार नाहीत.

31.अप्रत्यक्ष सिद्धतेची पद्धत:

या गुणधर्मांचा उपयोग आपण अप्रत्यक्ष सिद्धतेत असा करतो:-

दिलेली अट पूर्ण करणा-या दोन रेषा समांतर आहेत हे अप्रत्यक्ष सिध्दतेनुसार सिध्द करण्यासाठी कोणते विधान सत्य आहे असे मानून सुरुवात करतात?

साध्यातील विधानाचे नकारी विधान सत्य आहे असे मानून सुरूवात करतात.

दोन रेषा समांतर नाहीत म्हणजेच छेदतात हे विधान सत्य मानून सुरूवात करतात.

त्यावरून मिळणारी विधाने लिहीतात.

त्यामुळे आपल्याला एखाद्या गृहितकाशी किंवा आधी सिध्द केलेल्या प्रमेयाशी किंवा दिलेल्या माहितीशी(म्हणजेच पक्षाशी) विसंगत विधान मिळते.

या विसंगतीचे कारण आपण जे विधान सत्य आहे असे मानून सुरूवात केलेली असते ते चूक असते.

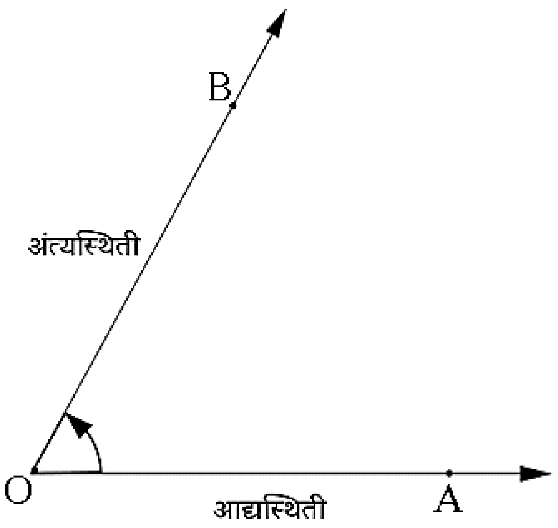
त्यामुळे आपण मानलेले विधान असत्य आहे हे आपल्याला मान्य करावेच लागते.

पर्यायाने त्याचे नकारी विधान म्हणजेच आपले साध्य सत्य आहे हे सिध्द होते.

अप्रत्यक्ष सिध्दतेची ही पध्दत नेहमीपेक्षा वेगळी आहे.
ही पध्दत यंदा कोणत्या प्रमेयांसाठी वापरली आहे याकडे तुम्ही लक्ष ठेवा.

32.सदिश कोन

कोन ही संकल्पना तुम्हाला माहित आहे. त्यापेक्षा निराळी कोनाची आणखी एक संकल्पना पाहू या. यामध्ये किरणाचे भ्रमण व भ्रमणाची दिशा दोन्ही विचारात घेतलेले असते.



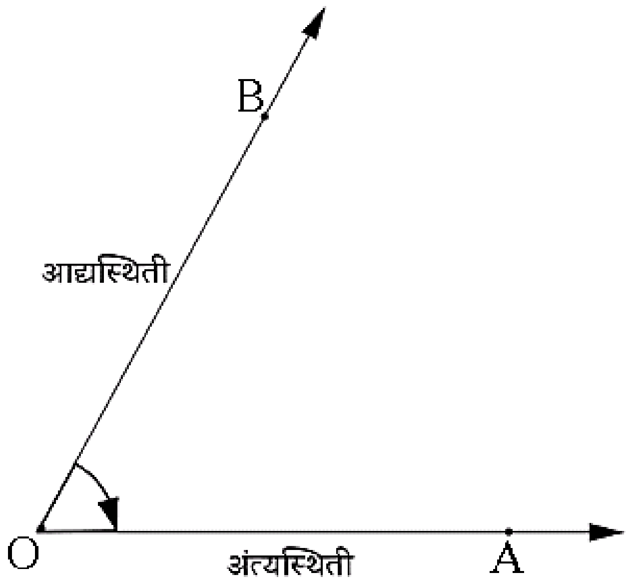
व्याख्या : (किरण OA, किरण OB) या क्रमित जोडीतील किरण OA, भ्रमण करताना किरण OB या स्थितीला येतो. तेव्हा या भ्रमणामुळे तयार होणारा ∠AOB हा सदिश कोन आहे असे म्हणतात.

सदिश कोन AOB हा चिन्हात ∡AOB असा दर्शवितात.

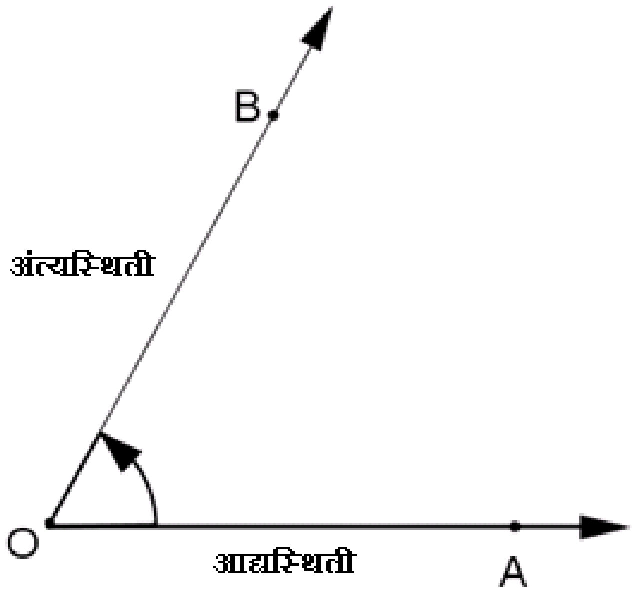
सदिश कोन :

T1_L11

(किरण OA, किरण OB) या क्रमित जोडीपैकी किरण OA ला ∡AOB ची आद्यस्थिती (मूलभूत बाजू) म्हणतात आणि किरण OB ला ∡AOB ची अंत्यस्थिती किंवा अंत्य बाजू म्हणतात. ∡BOA मध्ये क्रमित जोडी (किरण OB, किरण OA) आहे म्हणून ∡AOB व ∡BOA समान नसतात.∡BOA ≠ ∡AOB



∡BOA



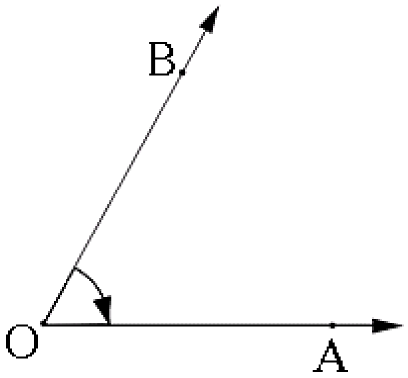
∡AOB

33.भ्रमणाच्या परिभाषेतील कोनांची मापे:

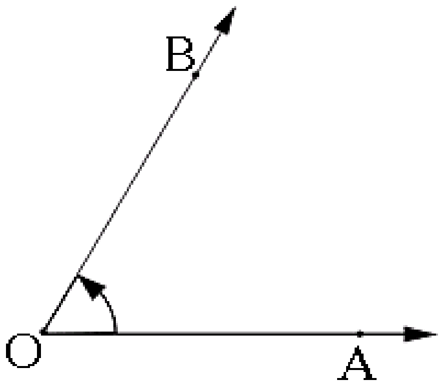
एखादा किरण त्याच्या आरंभ बिंदूभोवती फिरताना वेगवेगळ्या मापांचे कोन तयार करतो.

किरणांचे भ्रमण दोन वेगवेगळ्या दिशेने होत असते.

किरणाचे भ्रमण घड्याळयाच्या काट्याच्या भ्रमणाच्या दिशेने (घटिवत) किंवा त्याच्या विरूद्ध दिशेने (प्रतिघटिवत)असते.

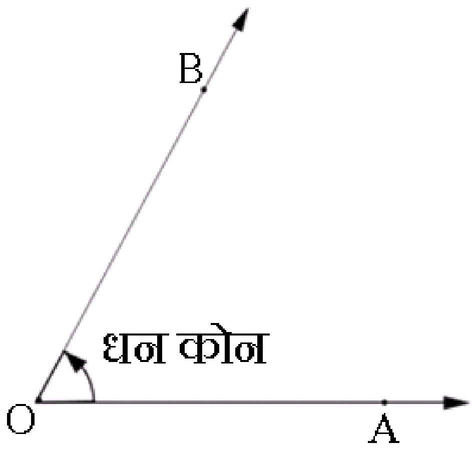


घड्याळयाच्या काट्याच्या भ्रमणाच्या दिशेने (घटिवत)



घड्याळयाच्या काट्याच्या भ्रमणाच्या विरूद्ध दिशेने (प्रतिघटिवत)

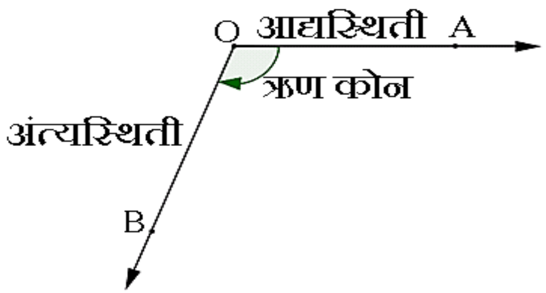
धन कोन :



घड्याळाच्या काट्याच्या विरूद्ध दिशेने किरण OA हा शिरोबिंदू O भोवती फिरत असल्यास तयार होणारा सदिश कोन धन घेतला जातो.

∴ ∡AOB हा धन कोन आहे.

ऋण कोन :



किरण OAहा शिरोबिंदू O भोवती घड्याळयाच्या काट्याच्या दिशेने फिरत असल्यास तयार होणारा सदिश कोन **ऋण** घेतला जातो.

∴ ∡**AOB**हा ऋण कोन आहे.

एक संपूर्ण भ्रमण (एक फेरी):

समजा, किरण OA हा आरंभ बिंदू 'O' भोवती घड्याळयाच्या काट्याच्या विरूद्ध दिशेने भ्रमण करून एक फेरी पूर्ण करतो. तेव्हा किरण OA चे एक भ्रमण झाले असे म्हणतात.

किरण OA एक भ्रमणप्रतिघटीवत दिशेने पूर्ण करतो तेव्हा त्याने 360^0मापातून भ्रमण केलेले असते. तसेच भ्रमण दोनदा प्रतिघटीवत दिशेने पूर्ण झाले म्हणजे $2 \times 360^0=720^0$चा कोन पूर्ण होतो.

किरण OA एक भ्रमणघटीवत दिशेने पूर्ण करतो तेव्हा त्याने -360^0मापातून भ्रमण केलेले असते.

परंतु भ्रमण दोनदा घटीवत दिशेने पूर्ण झाले म्हणजे $-(2 \times 360^0) = -720^0$चा कोन पूर्ण होतो.

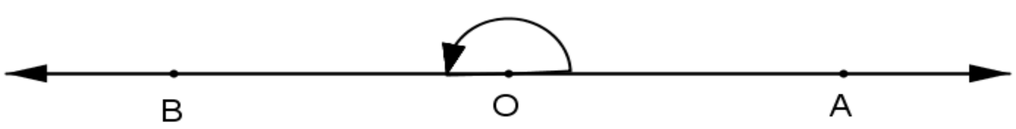
1.किरण OA मूळ स्थितीतच राहिला त्याने भ्रमण केलेच नाही तर सदिश कोन तयार होईल का? त्याचे माप काय असेल असे तुम्हाला वाटते?

उत्तर: OA ने केलेले भ्रमण शून्य आहे. त्या कोनाचे माप 0^0 असतेम्हणून त्याला शून्य कोन म्हणतात. शून्य कोनाचा मुलभूत किरण OA हा शून्य अंशातून भ्रमण करतो म्हणजे स्थिर असतो किंवा भ्रमण करीत नाही.

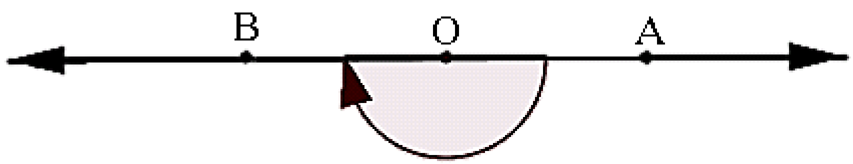
सरळ कोन :

2. जर किरण OA ह्याचे प्रतिघटीवत भ्रमण तो त्याच्या विरूद्ध किरण असलेल्या किरण OB वर आला तर त्याचे माप काय असेल व त्याला कोणता कोन म्हटले जाईल? तुमच्या कंपासपेटीतील कोनमापकाचे निरीक्षण केल्यास याचे उत्तर मिळते का बघा.

उत्तर :किरण OA हा आरंभ बिंदू ‘O’ भोवती प्रतिघटीवत दिशेने फिरताना आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे किरण OB च्या जागी येतो तेव्हा ∠AOB ला सरळ कोन म्हणतात. आणि सरळ कोन ∠AOB चे माप 180^0 असते.

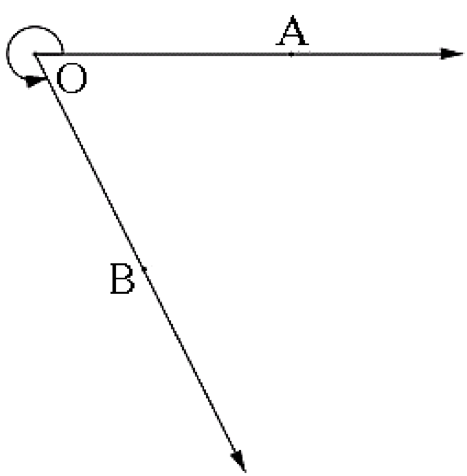


3. जर किरण OA हा आरंभ बिंदू 'O' भोवती घटीवत दिशेने फिरताना आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे किरण OB च्या जागी येतो तेंव्हा त्याला सरळ कोन म्हणता येईल का? त्या सरळ कोनाचे माप किती असेल?



उत्तर: जर किरण OA हा आरंभ बिंदू 'O' भोवती घटीवत दिशेने फिरताना आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे किरण OB च्या जागी येतो तेंव्हा त्याला सरळ कोन म्हणतात. सरळ कोन ∠AOB चे माप -180^0 असते.

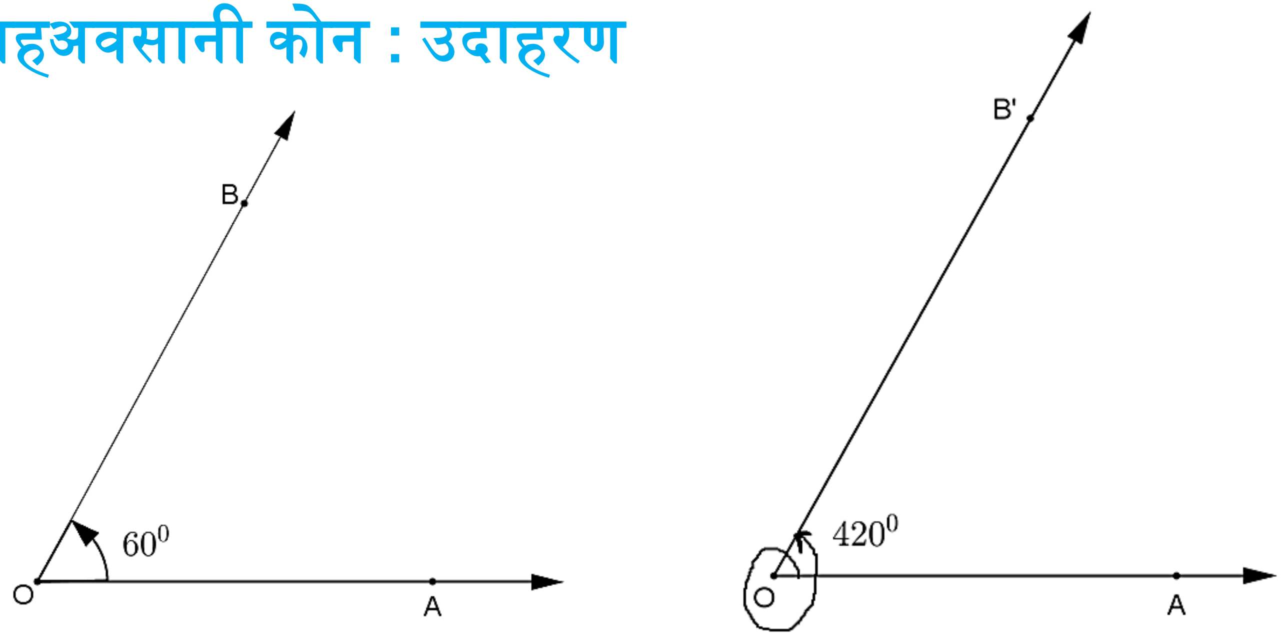
4.



आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे किरण OA हा आरंभ बिंदूभोवती घड्याळाच्या काट्याच्या विरूद्ध दिशेने फिरताना किरण OB च्या अंतिम स्थितीत पोहचल्यावर तयार होणारा ∠AOB ची सरळ कोनाशी तुलना केल्यास काय आढळते?

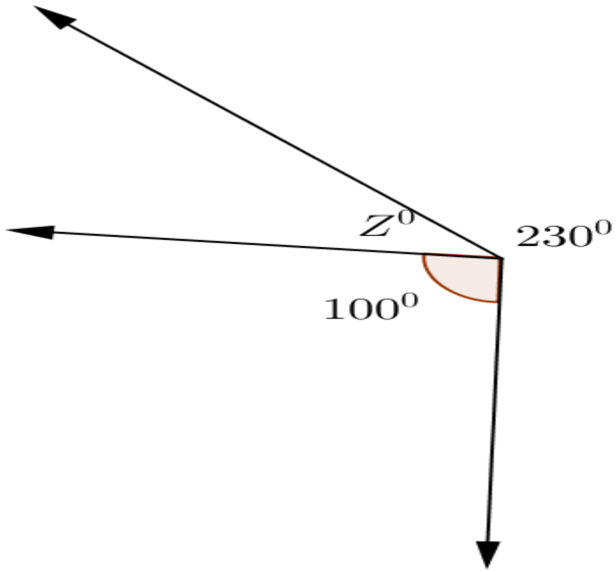
उत्तर: किरण OA हा आरंभ बिंदूभोवती घड्याळाच्या काट्याच्या विरूद्ध दिशेने फिरताना किरण OB च्या अंतिम स्थितीत पोहोचल्यानंतर तयार होणाऱ्या ∠AOB चे माप 180^0पेक्षा जास्त आणि 360^0पेक्षा कमी असेल तर∠ AOBला **प्रविशाल कोन म्हणतात.**

सहअवसानी कोन : उदाहरण



समजा जर किरण OA ने एक भ्रमण प्रतिघटीवत दिशेने पूर्ण केले आणि त्याच दिशेने पुढे आणखी भ्रमण करून तो पुन्हा किरण OB च्या जागी आला तर तयार होणा-या दोन कोनांची मापे भिन्न आहेत पण त्यांच्या आद्यस्थिती आणि अंत्यस्थिती मात्र त्याच आहेत. त्यांच्या मापांमध्ये कितीचा फरक आहे ते आकृतीवरून ठरवा. अशा कोनांना **सहअवसानी कोन** म्हणतात.

सोबतच्या आकृतीवरून z ची किंमत काढा.



उत्तर:दिलेल्या कोनांच्या मापांवरून ,

$z + 100 + 230 = 360$

$\therefore\ z + 330 = 360$

$\therefore\ z = 360 - 330$

$\therefore\ z = 30$

34.सहअवसानी कोन : व्याख्या

मूळ किरण (आद्य स्थिती) व अंतिम किरण (अंतिम स्थिती) यांची स्थिती समान असणाऱ्या

वेगवेगळ्या मापांच्या सदिश कोनांना सहअवसानी कोन म्हणतात.

एका सदिश कोनाचे असंख्य सहअवसानी कोन असतात.

दोन सहअवसानी कोनांच्या मापातील फरक = 360^0किंवा 360^0 च्या पटीतील संख्या असते.

T1_L11

खालील मापांच्या कोनांच्या जोड्या सहअवसानी कोनांच्या जोड्या आहेत की नाहीत ते ठरवा.

अ.क्र	दिलेल्या मापाच्या कोनांची जोडी	कोनांच्या मापांतील फरक	कोनांच्या मापातील फरक 360^0 च्या पटीतील संख्या आहे का?	हे सहअवसानी कोन आहेत का ?
1	$-180^0, 180^0$	……	…..	……
2	$408^0, 38^0$	…..	……	……
3	$-270^0, 90^0$	……	…..	……
4	$785^0, 75^0$	……	……	……
5	$-200^0, 160^0$	…..	…..	…….
6	$0^0, 360^0$	……	…….	……..
7	$60^0, 1140^0$	…..	…..	……

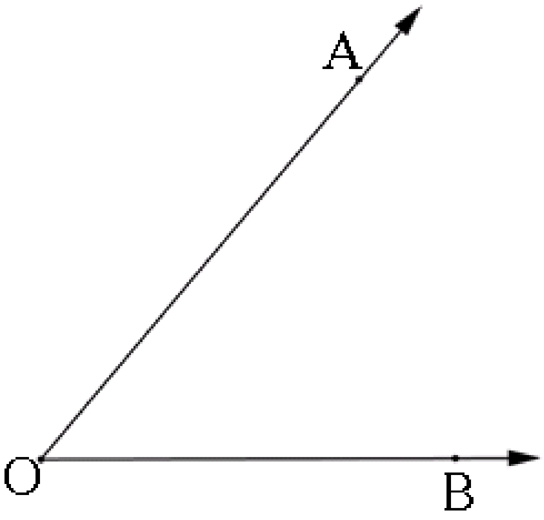
टीप: वरील कोनांच्या जोड्यांपैकी जे सहअवसानी कोन तुम्हाला आढळले त्यांच्या मापांबद्दल स्तंभ तीन वरून नियम तयार करा.

उत्तर:

T1_L11

अ.क्र	दिलेल्या मापाच्या कोनांची जोडी	कोनांच्या मापांतील फरक	कोनांच्या मापातील फरक 360^0च्या पटीतील संख्या आहे का?	हे सहअवसानी कोन आहेत का?
1	$-180^0, 180^0$	360^0	आहे	आहेत.
2	$408^0, 38^0$	370^0	नाही	नाहीत.
3	$-270^0, 90^0$	360^0	आहे	आहेत.
4	$785^0, 75^0$	710^0	नाही	नाहीत.
5	$-200^0, 160^0$	360^0	आहे	आहेत.
6	$0^0, 360^0$	360^0	आहे	आहेत.
7	$60^0, 1140^0$	1080^0	आहे	आहेत.

35.कोन :



कोनाची ही संकल्पना तुम्हाला पूर्वीपासून माहित आहे.

व्याख्या: सामाईक आरंभबिंदू असलेल्या दोन नैकरेषीय किरणांच्या संयोग संचाला कोन असे म्हणतात.

ज्या दोन किरणांमुळे कोन तयार होतो त्या कोनाच्या बाजू आणि त्यांचा सामाईक आरंभबिंदू कोनाचा शिरोबिंदू होय.

आकृती मध्ये, किरण OA आणि किरण OB हे नैकरेषीय किरण असून त्यांचा O हा सामाईक आरंभबिंदू आहे.

त्यांच्या संयोग संचाला ∠AOB किंवा ∠BOA म्हणतात.

किरण OA आणि किरण OBया कोनाच्या बाजू असून बिंदू 'O' हा कोनाचा शिरोबिंदू आहे.

36.एकरूप कोन:

व्याख्या :एकरूप कोनांची मापे समान असतात.

कोनांच्या एकरूपतेचे गुणधर्म :

i) परावर्तनता : $\angle ABC \cong \angle ABC$ (प्रत्येक कोन स्व:शी एकरूप असतो.)

ii) सममितता : जर $\angle ABC \cong \angle PQR$ तर $\angle PQR \cong \angle ABC$

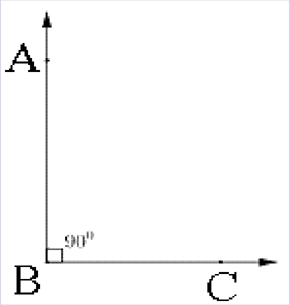
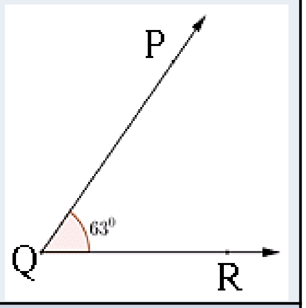
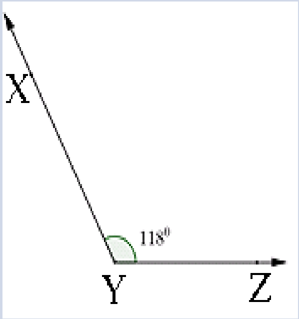
(जर एक कोन दुस-या कोनाशी एकरूप असेल तर दुसरा कोन पहिल्या कोनाशी एकरूप असतो.)

iii) संक्रमकता : जर $\angle ABC \cong \angle PQR$ आणि $\angle PQR \cong \angle XYZ$ तर $\angle ABC \cong \angle XYZ$

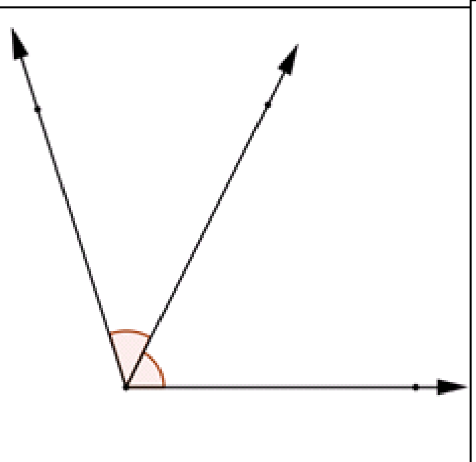
(जर पहिला कोन दुस-या कोनाशी एकरूप असून दुसरा कोन तिसऱ्या कोनाशी एकरूप असेल तर तिसरा कोन पहिल्या कोनाशी एकरूप असतो.)

37.कोनांचे प्रकार :

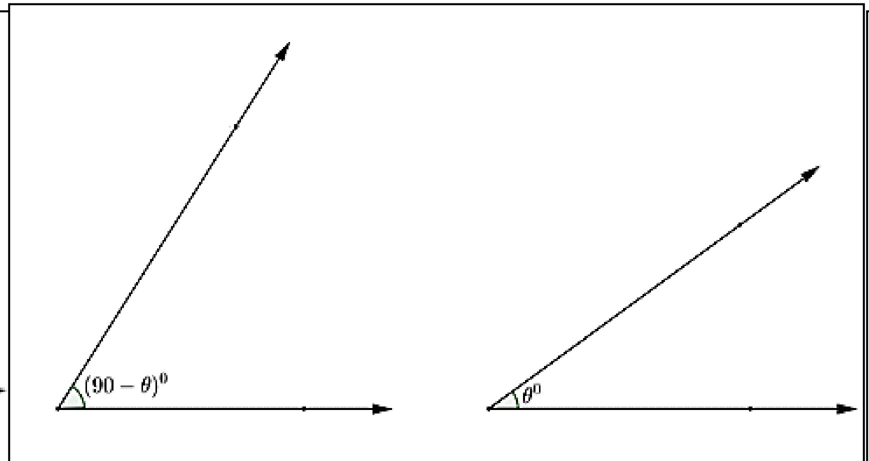
प्रत्येक आकृतीमधील उदाहरणे पहा त्यावरून कोनाचा प्रकार ठरवा व व्याख्या पूर्ण करा.

कोनाचा प्रकार	व्याख्या	आकृती
1)……कोन	जर दिलेल्या कोनाचे माप 90^0 असेल तर त्या कोनास ….. म्हणतात.	$m\angle ABC = 90^0$ 
2) …..कोन	जर दिलेल्या कोनाचे माप 90^0 पेक्षा कमी असेल तर त्या कोनास …. म्हणतात.	$m\angle PQR<90^0$ 
3) ….. कोन	जर दिलेल्याकोनाचे माप 90^0 पेक्षा जास्त असेल तर त्या कोनास …..म्हणतात.	$m\angle XYZ>90^0$ 

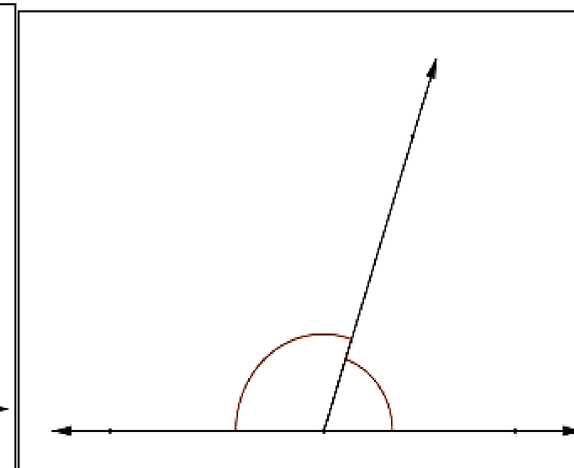
पुढे काही कोनांच्या जोड्या दिलेल्या आहेत.
त्यातून प्रत्येक कोनांच्या जोडीचा पुढीलपैकी योग्य प्रकार अचूक ओळखा.
पूरक कोन, लगतचे कोन , कोटीकोन, रेषीय जोडीतील कोन.



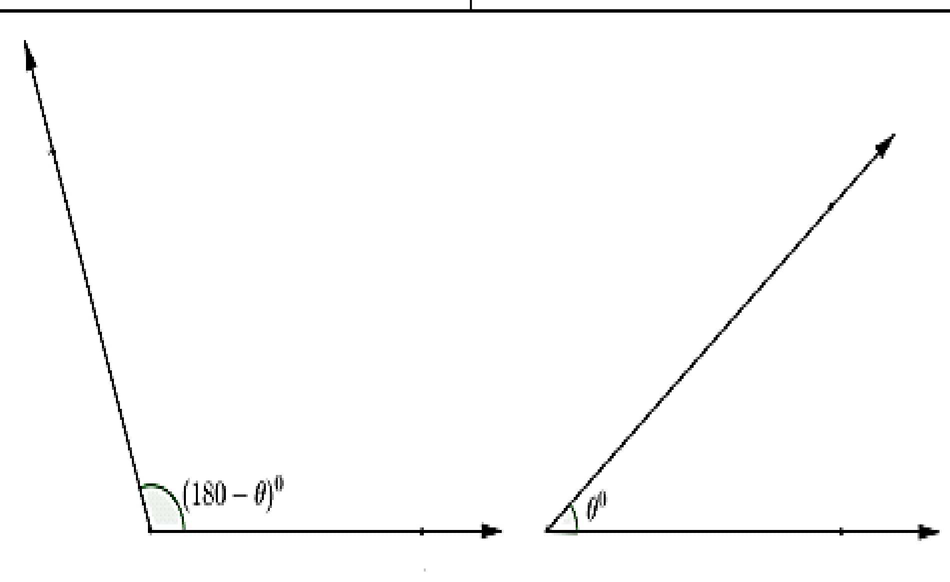
(1)



(2)

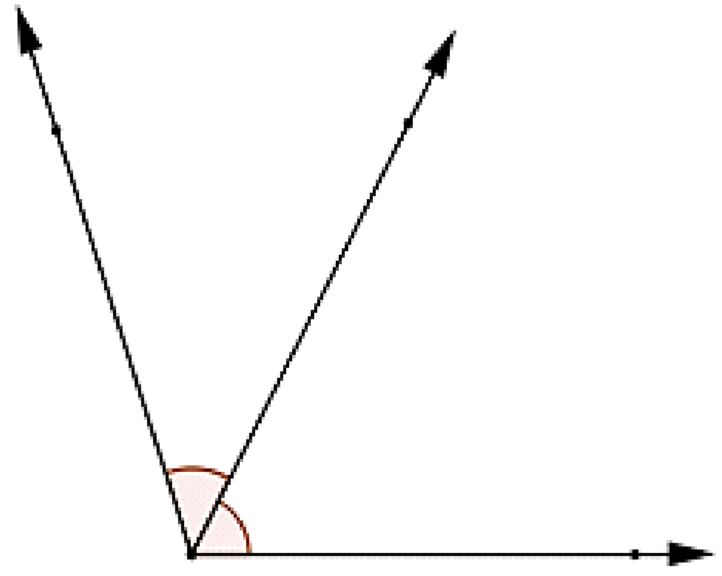


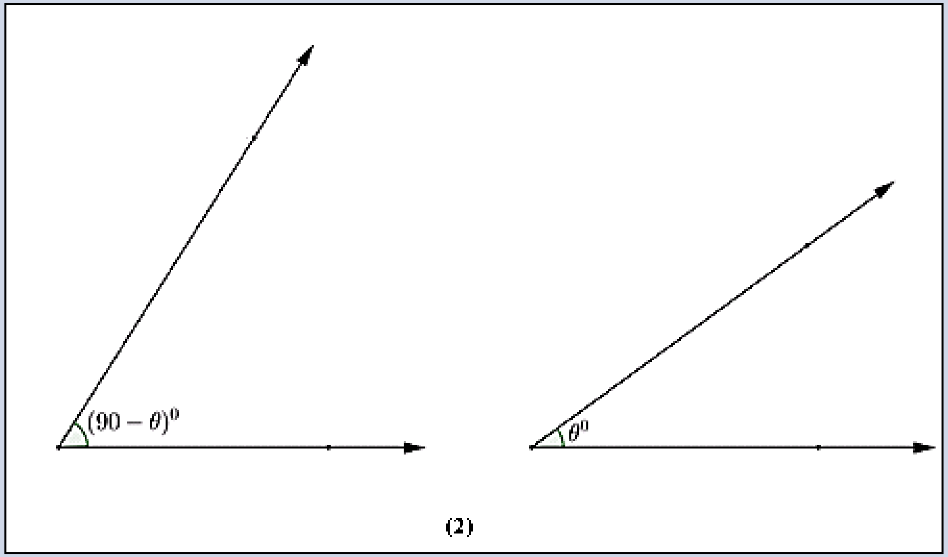
(3)

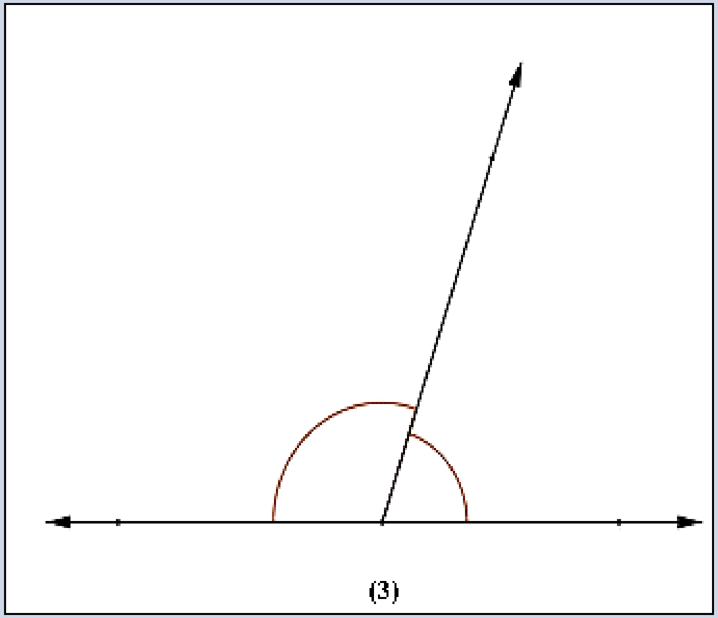


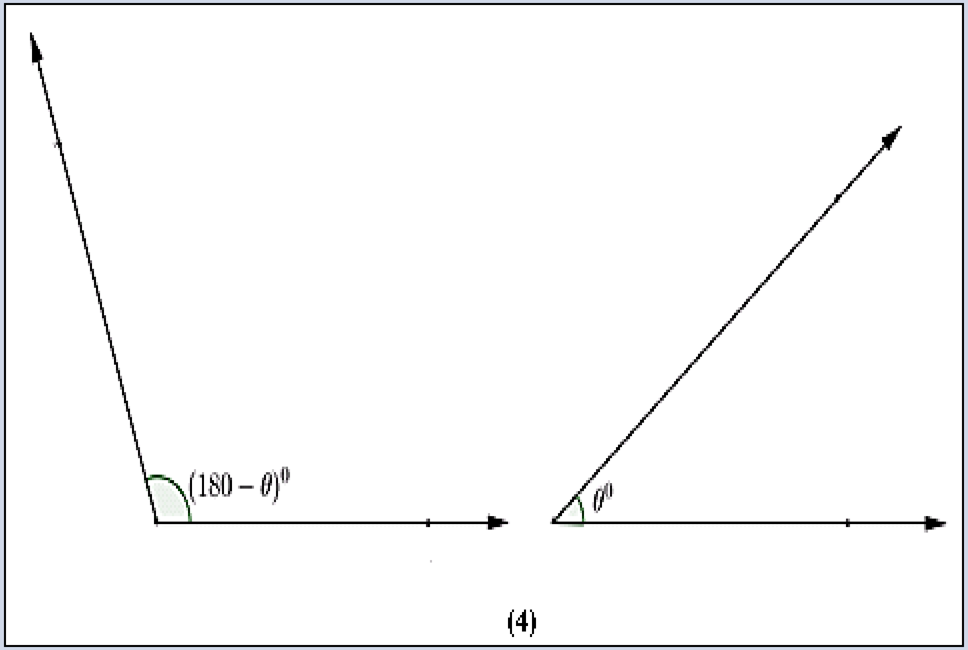
(4)

उत्तरे:

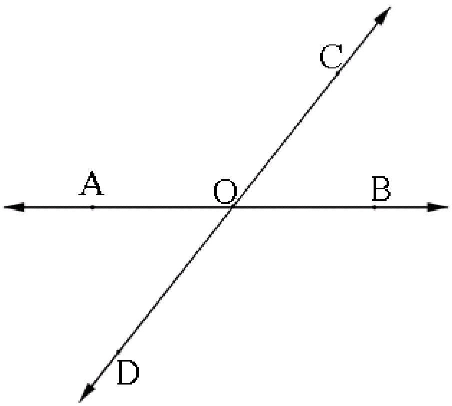
कोनांच्या जोड्या	व्याख्या	आकृती
1) लगतचे किंवा संलग्न कोन:	जर दोन कोनांना सामाईक शिरोबिंदू, एक सामाईक बाजू असून त्यांचे अंतर्भाग विभिन्न संच असतील तर त्या कोनांना संलग्न किंवा लगतचे कोन म्हणतात.	 (1)

कोनांच्या जोड्या	व्याख्या	आकृती
2)कोटीकोन :	जर दिलेल्या दोन लघुकोनांच्या मापांची बेरीज 90^0असेल तर त्या कोनांना परस्परांचे कोटीकोन म्हणतात.	

कोनांच्या जोड्या	व्याख्या	आकृती
3)रेषीय जोडीतील कोन:	जेव्हा दोन संलग्न कोनांच्या असामाईक बाजू विरूद्ध किरण असतात तेव्हा त्या कोनांना रेषीय जोडीतील कोन म्हणतात. (टीप:रेषीय जोडीतील कोन संलग्न कोन असतात परंतु दोन संलग्न कोन रेषीय जोडीतील कोन असतीलचअसे नाही.) **रेषीय जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0असते. हे** **रेषीय जोडीतील कोनांचे गृहितक आहे.**	

कोनांच्या जोड्या	व्याख्या	आकृती
4) पूरक कोन	जर दिलेल्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0असेल तर त्या कोनांना परस्परांचे पूरक कोन म्हणतात.	

38.विरूद्ध कोन



आकृतीमध्ये, A-O-B व C-O-D अशी दरम्यानता आहे म्हणून किरण OA व किरण OB ही विरूद्ध किरणांची एक जोडी आहे. तसेच किरण OC व किरण OD ही विरूद्ध किरणांची जोडी आहे.

आता ∠AOC व ∠BOD यांच्या भुजा पहा.

∠AOCच्या भुजा: किरण OA व किरण OC

∠BODच्या भुजा: किरण OB व किरण OD

या कोनांच्या भुजांनी चौकटीत दाखविलेल्या विरूद्ध किरणांच्या दोन जोड्या मिळाल्या.

अशा कोनांना **'विरुद्ध कोन'** म्हणतात.

या व्याख्येनुसार आकृतीवरून विरूद्ध कोनांची दुसरी जोडी ठरवा.

विरूद्ध कोनांच्या प्रमेयासाठी पूर्व तयारी:

आता एक अगदी सोपे उदाहरण पहा. त्यातून मिळणारा निष्कर्ष फार महत्वाचा आहे, कारण अनेक सिद्धता लिहिण्यासाठी तो फार उपयुक्त आहे.

6 + 3 = 9 हे तुम्हाला माहित आहे.

समजा, तुम्हाला x + 3 = 9 हे समीकरण तुम्हाला दिले तर या दोन समीकरणांतून तुम्ही त्यातून एक नवे समीकरण लिहू शकाल का?

उत्तर:- 6 + 3 = x + 3 .....(दोन्हींच्या किंमती 9 आहेत.)

∴ 6 = x ...... (दोन्ही बाजूतून 3 वजा करून)

वरील उदाहरणात तुम्हाला जे समजले त्यावरून खालील निष्कर्ष पूर्ण करा.

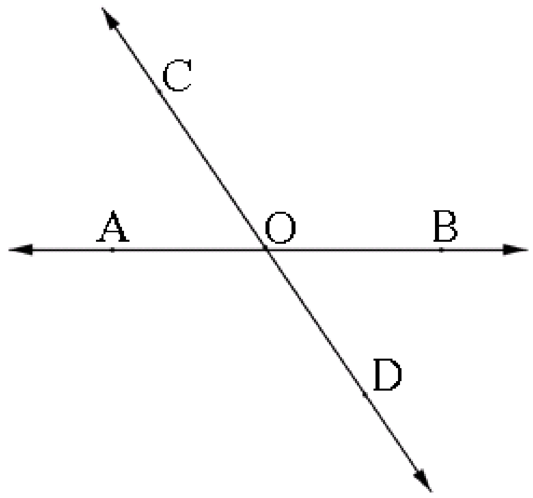
जर a + b = c व d + b = c तर

∴ a + b= d + b

∴ a = d ....(दोन्ही बाजूंतून 'b' ही समान संख्या वजा करून.)

हे तंत्र वापरून आपण पहिल्या प्रमेयाची सिद्धता मिळविणार आहोत.

विरूद्ध कोनांचे प्रमेय:

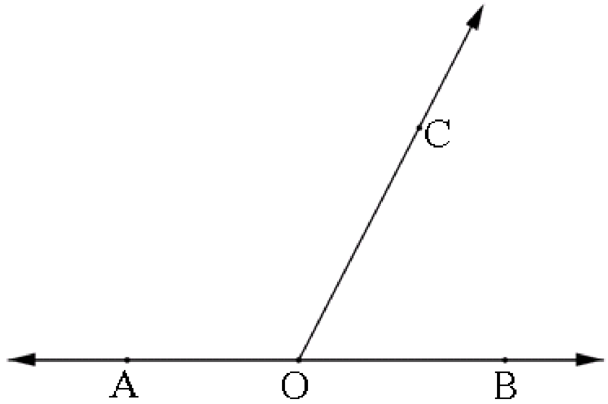


पक्ष:- रेषा AB व रेषा CD या दोन भिन्न रेषा परस्परांना O बिंदूत छेदतात. त्यामुळे तयार झालेले $\angle AOC$ व $\angle BOD$ विरुद्ध कोन असून $\angle BOC$ व $\angle AOD$ हेही विरुद्ध कोन आहेत.

साध्य:- i) $\angle AOC \cong \angle BOD$

ii) $\angle BOC \cong \angle AOD$

सिद्धतेसाठी कसा विचार करावा लागतो ते तंत्र समजून घ्या. ही रीत कळली तर हळूहळू अनेक सिद्धता तुमच्या तुम्हाला सरावाने सुचू शकतील.



प्रश्न: 1) आकृती मधील रेषा AB व किरण OC पहा.

तयार झालेले ∠AOC व ∠BOC हे कोणत्या प्रकारचेकोन आहेत?

त्यांच्या मापांची बेरीज किती?

उत्तर: ∠AOC व ∠BOC हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत व त्यांच्या मापांची

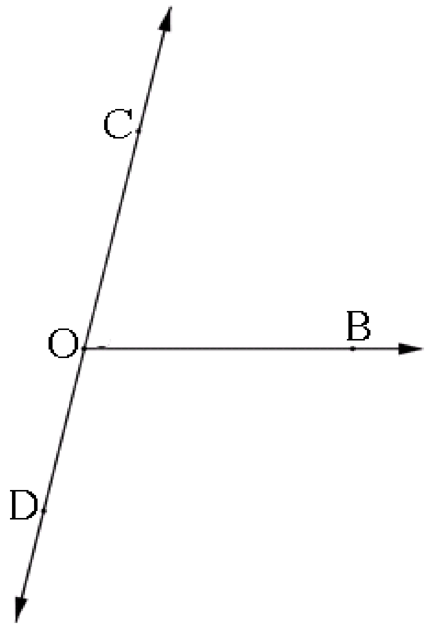
बेरीज = 180^0(रेषीय जोडीतील कोनांचे गृहितक)

प्रश्न: 2) हेच विधान चिन्हांचा उपयोग करून कसे लिहाल?

उत्तर: $m\angle AOC + m\angle BOC = 180^0$.....(रेषीय जोडीतील कोनांचे गृहितक)

प्रश्न: 3) आकृतीमधील दुसरी रेषा कोणती?

उत्तर: आकृतीमधील दुसरी रेषा CD आहे.



प्रश्न:4) रेषा CD व किरण OB ह्यांच्यामुळे तयार झालेली कोनांची रेषीय जोडी कोणती? त्यांच्या मापांबद्दल समीकरण लिहा.

उत्तर: $\angle BOC$ व $\angle BOD$ हे तयार झालेले रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

$m\angle BOC + m\angle BOD = 180^0$....(रेषीय जोडीतील कोनांचेगृहितक)

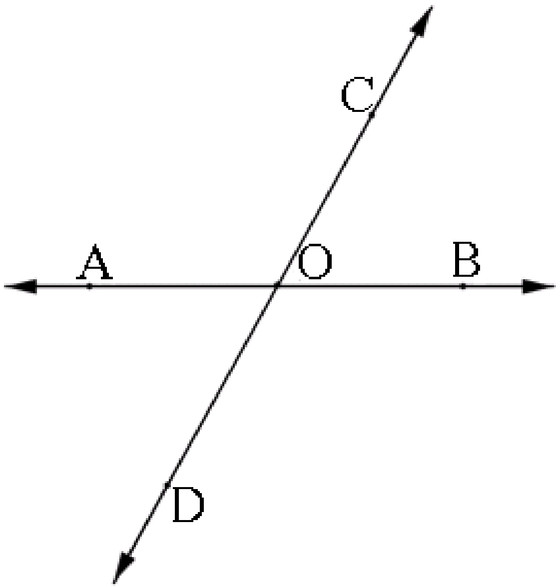
T1_L13_A1

प्रश्न 5: प्रश्न 2 व 4 मध्ये मिळालेल्या समीकरणांच्या उजव्या बाजूंना 180^0 हीच किंमत आहे.

त्यावरुन त्यांच्याडाव्या बाजूंबद्दल कोणते नवीन समीकरण मिळेल?

उत्तर: $m\angle AOC + m\angle BOC = m\angle BOC + m\angle BOD$ ....(विधान 2 व 4 वरून)

प्रश्न 6 : आता हे समीकरण a + b = b + d या प्रकारचे झाले. त्यातून नवीन कोणती समानता मिळेल?



उत्तर: $m\angle AOC = m\angle BOD$ म्हणजेच

$\angle AOC \cong \angle BOD$

आता याच प्रकारे विचार करून $m\angle BOC = m\angle AOD$

दाखविण्याचा प्रयत्न करा. पायऱ्या लिहून पहा.सर्व पायऱ्या वरीलप्रमाणेच मिळतात हे कळेल.

फक्त नावे बदलली तर तशीच विधाने व कारणे मिळतात.

अशा वेळेला दुसऱ्या वेळेला त्या पायऱ्यालिहिल्या नाहीत तरी चालते.

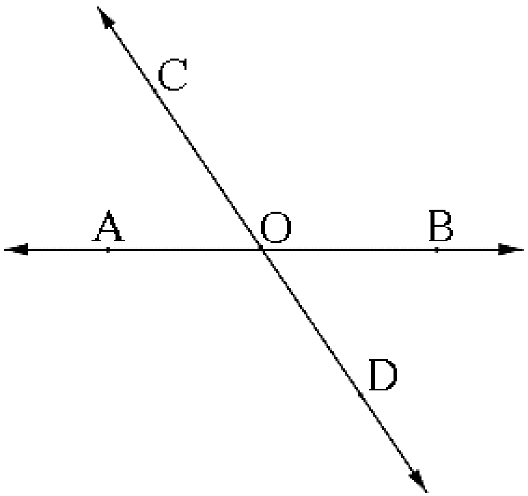
फक्त त्याचप्रमाणे $\angle BOC \cong \angle AOD$ दाखविता येईल.सिध्दतेमध्ये हे वाक्य लिहिणे मात्र आवश्यक असते.

आता ही सिद्धता प्रत्यक्षात कशी लिहितात ते पाहू.

हे प्रमेय आता आपण जेंव्हा जेंव्हा विरुद्ध कोन मिळतात तेंव्हा तेंव्हा वापरु शकतो कारण ते विरुद्ध कोनांच्या कोणत्याही जोडीला लागू पडते हे आपण कोनांची विशिष्ट मापे न घेता सिद्ध करावयाचे असते.

विरुध्द कोनांचे प्रमेय

T1_L13_A1



पक्ष:- रेषा AB व रेषा CD या दोन भिन्न रेषा परस्परांना O बिंदूत छेदतात. त्यामुळे तयार झालेले$\angle AOC$ व $\angle BOD$ विरुद्ध कोन असून $\angle BOC$ व $\angle AOD$ हेही विरुद्ध कोन आहेत.

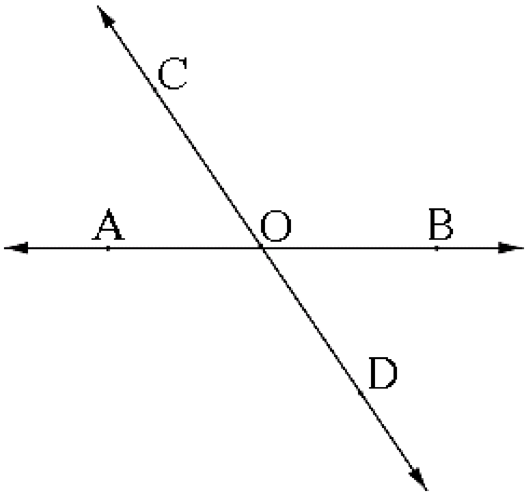
साध्य:-i) $\angle AOC \cong \angle BOD$

ii) $\angle BOC \cong \angle AOD$

सिध्दता:

1) $\angle AOC$ व $\angle BOC$ हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

$\therefore m\angle AOC + m\angle BOC = 180^0$.....(रेषीय जोडीतील कोनांचे गृहितक)



2)त्याचप्रमाणे,

∠BOC व ∠BOD हे तयार झालेले रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

∴ m∠BOC + m∠BOD = 180^0

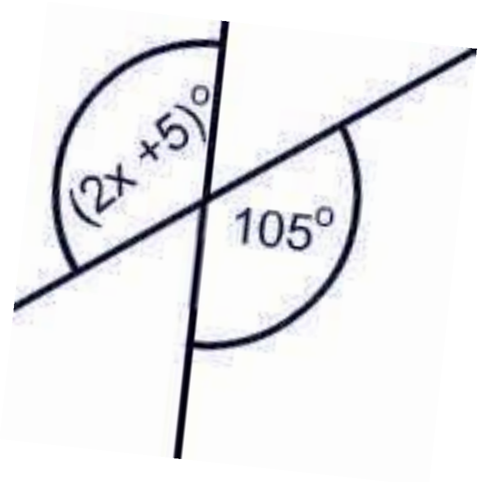
3) m∠AOC + **m∠BOC= m∠BOC**+ m∠BOD ....(विधान 1व 2 वरून)

∴ m∠AOC = m∠BODम्हणजेच ∠AOC ≅ ∠BOD

4) त्याचप्रमाणे ∠BOC ≅ ∠AOD दाखविता येईल.

निष्कर्ष : दोन रेषा परस्परांना छेदत असतील तर तयार होणारे विरूध्द कोन परस्परांशी एकरूप असतात.

‘विरुध्द कोनाच्या प्रमेया’चे उपयोजन



1)सोबतच्या आकृतीचे निरीक्षण करा व x ची किंमत काढा. त्यासाठी कोणते प्रमेय वापरावे ते ठरवा.

उत्तर: आकृतीमधील ज्या कोनांची मापे दिली आहेत ते परस्परांचे विरुध्द कोन आहेत म्हणून विरुध्द कोनांच्या प्रमेयानुसार, त्यांची मापे समान

$\therefore 2x + 5 = 105$

$\therefore 2x = 105 - 5$

$\therefore 2x = 100$

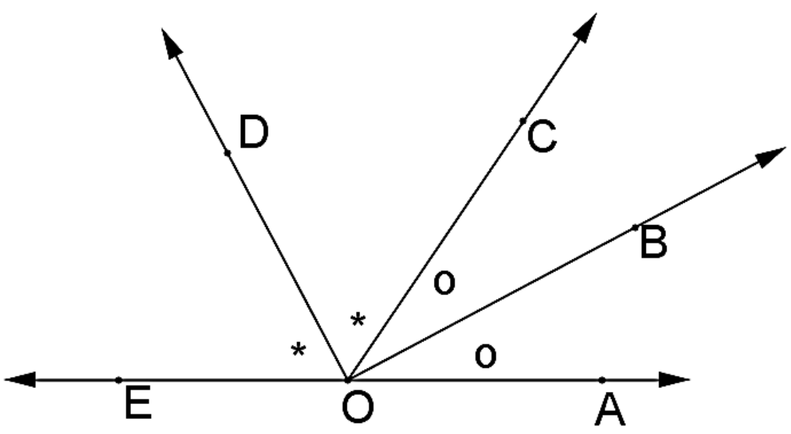
$\therefore x = 100 \div 2$

$\therefore x = 50$

रायडरची सिद्धता कशी तयार होते? – एक नमुना

तुम्ही यंदापासून गृहीतके, प्रमेये व त्यांच्या सिध्दता शिकायला लागला आहात.
प्रमेयांवर आधारित उदाहरणे (riders) कशी सिध्द करता येतात हे आता तुम्हाला आत्मसात केले पाहिजे. सिध्दतेला सुरूवात कशी करावी ह्याच पायरीवरच अनेकजणांना अडचण येते.

त्यासाठीच आता चला एका वर्गात. कारण तिथे यावरच चर्चा सुरू आहे शिक्षक व विद्यार्थ्यांमध्ये.
फळ्यावर खालीलप्रमाणे त्या उदाहरणाची आकृती, पक्ष व साध्य लिहिलेले आहे.



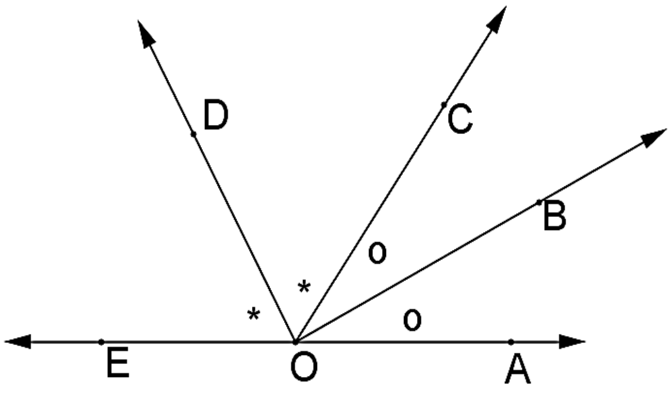
पक्ष: A -O- E.

किरण OB हा ∠AOC चा दुभाजक आहे.

किरण OD हा ∠EOC चा दुभाजक आहे.

साध्य: m ∠BOD = 90^0

वर्गातील चर्चा



राहुल : “A – O – E हे एकरेषीय बिंदू आहेत व O बिंदू A व E च्या दरम्यान आहे एवढंच कळलंय. पण त्याचा संबंध तरअंतरांशी असतो.मग त्याचा कोनांच्या मापांशी काय संबंध ते समजत नाही.”

हर्षद : “मला वाटतंय की यातून मला किरण OA व किरण OE हे विरूध्द किरण आहेत याचा उपयोग होईल.”

गौरव: “मला पहिल्यापासून वाटतंय की यांचा रेषीय जोडीतील कोनांशी काहीतरी संबंध आहे आणि त्यांच्या मापांची बेरीज 180^0 असते ह्याचा उपयोग करता येईल.”

शिक्षक: “बघा विचार करून.”

हर्षद : “आम्हाला आणखीन काही माहिती हवी आहे.”

शिक्षक : “कशाबद्दल तुला माहिती हवी आहे?”

हर्षद : “∠AOC किंवा ∠EOC ची मापे सांगितली तरच मला ∠BOD चे माप काढता येईल असे वाटतंय.”

शिक्षक : “मी सुरूवातीलाच सांगितले होते की विशिष्ट मापांचेच हे कोन असले पाहिजेत असे नाही. त्याची मापे समजणे हे ∠ BOD = 90^0दाखविण्यासाठी आवश्यक नसते. शिवाय पक्षातील माहिती साध्यासाठी पुरेशी असते.”

अस्मिता : “मग नेहमी पक्षापासूनच सुरूवात करायची असते का?”

शिक्षक : “अनेक रायडर्समध्ये पक्ष व आकृती यांची माहिती घेतली की आपण पक्षातील एकेक विधान वाचून त्यातून काय कळते व त्याचा साध्याशी काही संबंध आहे का याचा विचार करायला सुरूवात करावी.”

राहुल : "मग A – O – E यातून मला काय कळले ते सांगू का?"

शिक्षक : "हो-हो."

गौरव: "मला आता अडचण वाटतीय की, रेषा AE च्या A बिंदूपासून बाहेर पडणारे किरण OC,किरण OB व किरण OD एवढे किरण आहेत. त्यामुळे रेषीय जोडीतील कोनांसाठी त्यांच्यापैकी कोणता किरण निवडू?"

शिक्षक : "मग आता पक्षातील पुढच्या माहितीकडे बघ."

अस्मिता : "आपण ∠AOC व ∠EOC ही रेषीय कोनांची जोडी घेऊ कारण त्यांचेच दुभाजक दिले आहेत. त्यामुळे माझे पहिले समीकरण तयार झालंय की,

$m\angle AOC + m\angle EOC = 180^0$

शिक्षक : "या विधानाला आधार काय द्याल?"

सन्मान : "रेषीय जोडीतील कोन परस्परांचे पूरक असतात हे गृहितक आहे."

हर्षद: “साध्यामध्ये उजव्या बाजूला 90^0आहे. ती संख्या ह्या 180^0च्या निम्मी आहे. म्हणजे साध्याच्या डावीकडे असलेले $\angle AOC$ व$\angle EOC$च्या कोणत्या कोनांच्या निम्म्या मापांचेआहेत हे बघितलेपाहिजे.”

अस्मिता : “अरे हो. तुझं बरोबर आहे कारण पक्षात ∠AOC व∠EOC चे दुभाजक दिले आहेत.हीमाहिती अजून आपण वापरलीचनव्हती.

किरण OB हा ∠ AOC चा दुभाजक आहेम्हणजे त्यामुळे तयार होणारे कोन एकरूप असतात आणि त्यापैकीप्रत्येकाचे माप मूळच्या कोनाच्या निम्मे असते.

पण त्या दोन कोनांपैकी कोणता कोन घ्यायचा?”

शिक्षक : “साध्यातल्या कोनाचा विचार करून बघा.”

सन्मान : “कळले मला. साध्यातील ∠BOD चे माप कळण्यासाठी त्याच्याच दोन भागांचा म्हणजे दोन कोनांचा विचार केला तर किरण OB ह्या दुभाजकामुळे झालेला ∠BOC निवडला पाहिजे. आपण लिहू की,

m ∠BOC = ½ m ∠AOC.

गौरव : "same तसाच विचार केला तर किरण OD हा $\angle$ EOC चा दुभाजक दिला आहे आणि त्यामुळे तयार झालेला व $\angle$BOD चा भाग असलेला $\angle$COD घेऊ.

$m\angle COD = \frac{1}{2}\ m\angle EOC$."

हर्षद : "मग या आपल्या पहिल्या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंना ½ ने गुणले की झालेच उत्तर तयार.

$\frac{1}{2} \times m\angle AOC + \frac{1}{2} \times m\angle EOC = \frac{1}{2} \times 180^0$

$\therefore m\angle BOC + m\angle COD = 90^0$

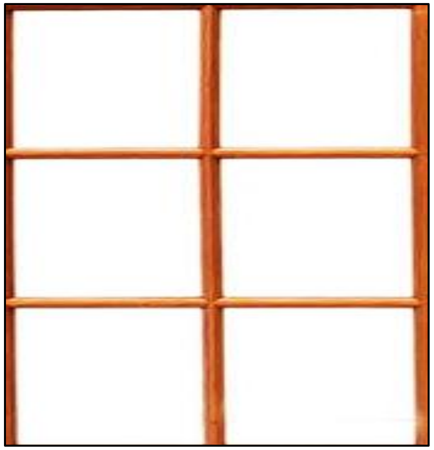
$\therefore m\angle BOD = 90^0$ (कोनांच्या बेरजेने)

39.समांतर रेषा

वरील चित्रांतील रेषाखंडांचे कोणते वैशिष्ट्य दिसते? त्यांना भूमितीत आपण काय म्हणतो?

उत्तर: ह्या चित्रांमधील रेषाखंड परस्परांना समांतर आहेत कारण एकाच प्रतलातील दोन रेषा परस्परांना छेदत नसतील तर त्यांना **समांतर रेषा** म्हणतात.

आपल्या अवतीभोवती असे समांतर रेषाखंड तुम्ही पाहिले असतील. त्यांची काही उदाहरणे आठवतात का?

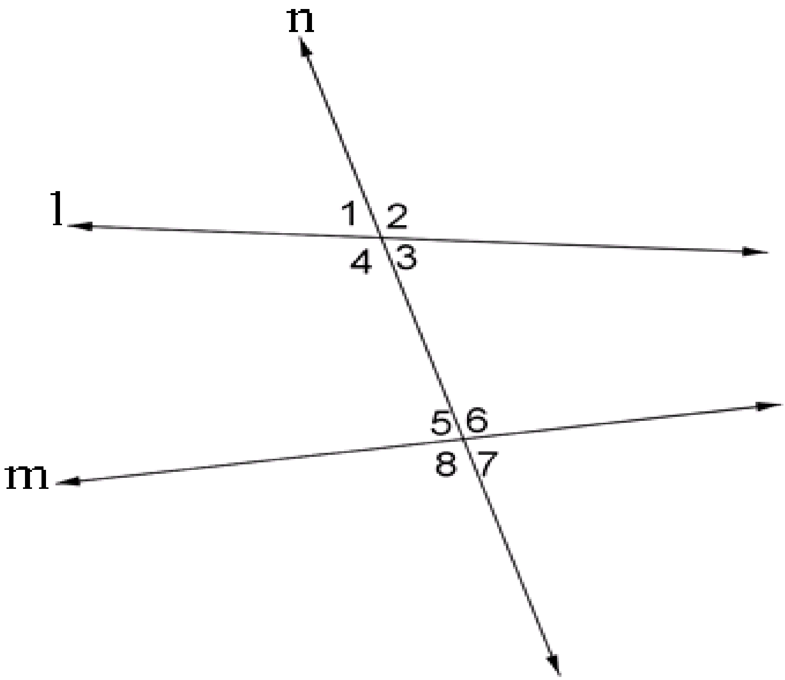


दिलेल्या दोन एकप्रतलीय रेषांना त्याच प्रतलातील एक रेषा जर दोन भिन्न बिंदूत छेदत असेल तर तिला त्या **रेषांची छेदिका म्हणतात**. **(वरील चित्रात रेख AB व रेख CD यांची रेषा l छेदिका आहे. तुमच्या वहीतील कागदावर आखलेल्या रेघांचा व समास यांचा या संदर्भात विचार करा.)**

कोणत्याही दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यास प्रत्येक छेदबिंदूशी चार कोन तयार होतात. अशा तयार झालेल्या चार जोड्यातील कोनांना त्यांच्या जागांनुसार नावे दिली जातात. तुम्हाला ती नावे माहित आहेतच. त्यामुळे त्याची थोडक्यात उजळणी करू.

एक महत्वाची गोष्ट लक्षात घ्या की ज्या दोन रेषांची छेदिका दिलेली असते त्या रेषा परस्परांना छेदणाऱ्या असोत की नसोत हे **आठ कोन** तयार झालेले असतातच.

दोन रेषांच्या छेदिकेने तयार होणाऱ्या कोनांच्या जोड्या :



रेषा l व रेषा m या एकप्रतलीय रेषांची रेषा n ही छेदिका आहे. (कळायला सोपे जावे म्हणून आकृतीत त्यांना क्रमांक दिले आहेत. ती कोनांची मापे नाहीत.)

I) तयार झालेल्या संगत कोनांच्या जोड्या:

i) ∠1व ∠5 ii) ∠2 व ∠6

iii) ∠4व ∠8 iv) ∠3व ∠7

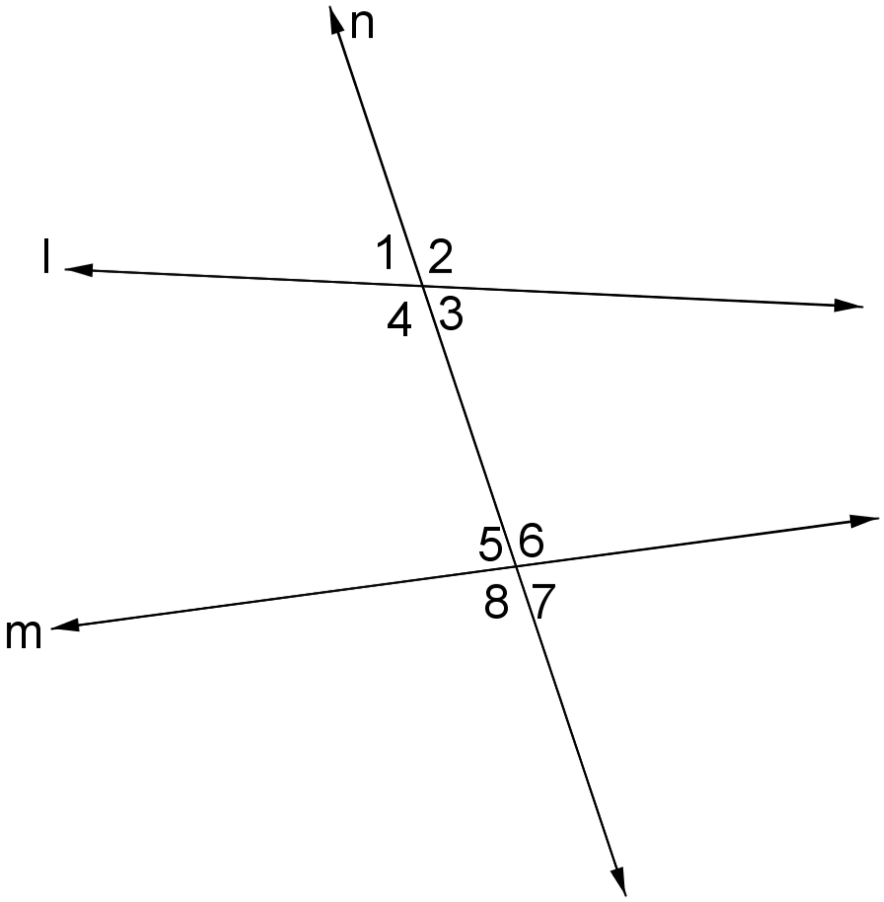
II) तयार झालेल्या व्युत्क्रम कोनांच्याजोड्या:

i) ∠3 व ∠5 ii) ∠4 व ∠6

III) तयार झालेल्या आंतरकोनांच्या जोड्या:

i) ∠4व ∠5 ii)∠3 व ∠6

प्रत्येक जोडीतील कोनांच्या जागांचे नीट निरीक्षण करा.



तुमच्या लक्षात आले असेलच की,

∠1, ∠2, ∠8, ∠7 यांच्याबरोबर व्युत्क्रम करणारेकोन नसतात.

तसेच त्यांच्याशी आंतरकोन करणारे कोन

नसतात.

40.समांतर रेषांच्या कसोट्या

दिलेल्या दोन एकप्रतलीय रेषा परस्परांना छेदणाऱ्या आहेत की समांतर हे केवळ आकृत्यांच्या सहाय्याने ठरविणे अवघड आहे. महत्वाची अडचण ही आहे की, रेषा अमर्याद असतात व कागद किंवा फळा हे मर्यादित असतात.

दिलेल्या दोन रेषा कागदावर कागद संपेपर्यंत वाढविल्या तरी जर छेदल्या नाहीत तरी पुढे त्या छेदू शकतीलही.

त्यामुळे व्याख्येच्या आधारे समांतर रेषांच्या कसोट्या (दोन रेषांनी पूर्ण करण्याच्या अटी)आपण आता पाहणार आहोत.

रेषांच्या ज्या जोड्या त्या अटी पूर्ण करतील त्या परस्परांना समांतर असतातच.

व रेषांच्या ज्या जोड्या त्या अटी पूर्ण करत नसतील त्या परस्परांना समांतर नसतात.

’व्युत्क्रम कोन कसोटी’

दोन एकप्रतलीय रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणा-या व्युत्क्रम कोनांच्या कोणत्याही एका जोडीतील कोनांनी कोणती अट पूर्ण केली तर त्या दोन रेषा परस्परांना छेदूच शकणार नाहीत म्हणजेच त्या समांतर असतील त्या अटीला समांतर रेषांची **’व्युत्क्रम कोन कसोटी’** म्हणतात.

अशा प्रकारची ही पहिली कसोटी आहे म्हणून ती मूलभूत कसोटी आहे.

ही कसोटी सिद्ध झाली की तिच्या आधारे इतर दोन कसोट्या सिद्ध करता येतात.

व्युत्क्रम कोन कसोटी आपण अप्रत्यक्ष सिद्धतेची रीत वापरून सिद्ध करणार आहोत.

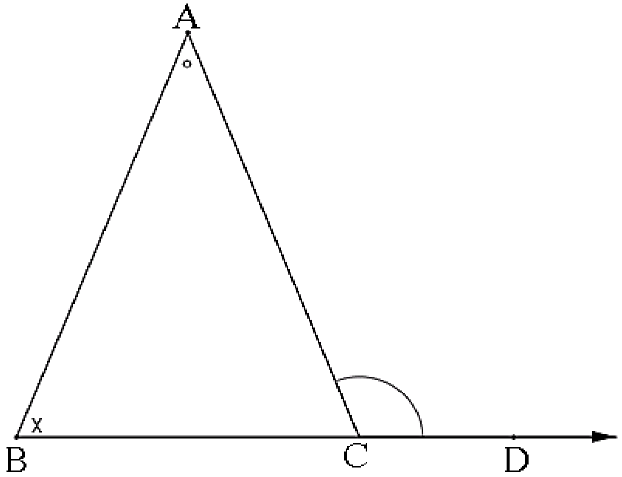
त्यासाठी आपल्याला त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचा गुणधर्म उपयोगी पडतो.

तो तुम्ही यापूर्वी शिकला आहात.तो पुढे दिला आहे.

(त्याला दूरस्थ आंतरकोनाचे प्रमेय म्हणतात. त्याची सिद्धता पुढील प्रकरणात आपण समजावून

घ्यायचीच आहे.)

व्युत्क्रम कोन कसोटीची पूर्व तयारी



आकृतीत, रेषा BC वर B – C –D अशी दरम्यानता आहे.

∠ACDहाΔABC च्या ∠ACB या आंतरकोनाशी

रेषीय जोडी तयार करतो.त्यामुळे∠ACD हाΔABC चा

एक बाह्यकोन आहे.

∠BAC व ∠ABC चे त्याचे दूरस्थ आंतरकोन आहेत.

बाह्यकोनाचा गुणधर्म आहे की, m∠ACD = m∠BAC + m∠ABC

या सर्व संख्या कोनांची मापे असल्यामुळे त्या धन आहेत.

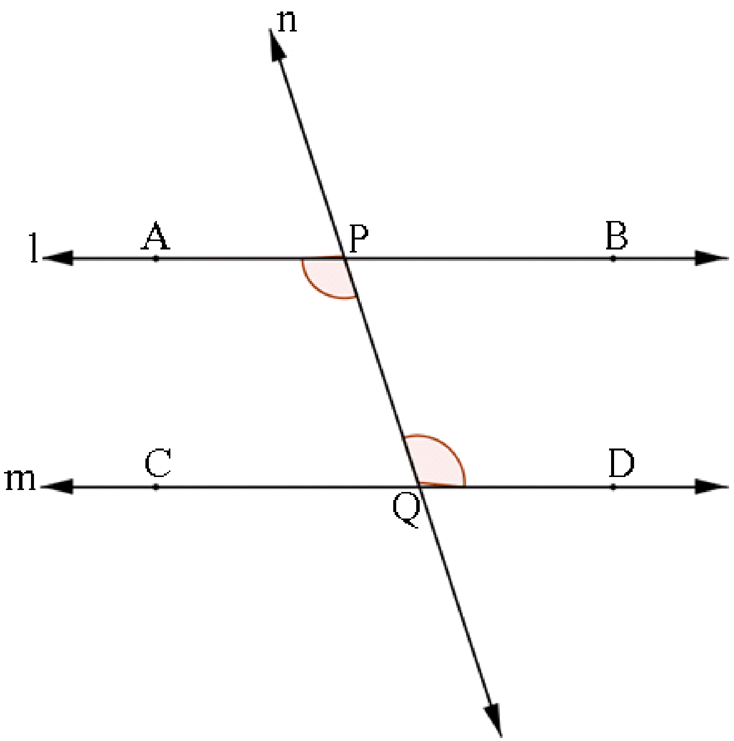
9 = 6 + 3 ∴9 > 6 प्रमाणे,

m∠ACD>m∠BACव m∠ACD>m∠ABC, म्हणजेच

त्रिकोणाचा बाह्यकोन हा त्याच्या प्रत्येक दूरस्थ आंतरकोनापेक्षा मोठा असतो.

हा गुणधर्म आपण आता वापरणार आहोत.

1) समांतर रेषांची व्युत्क्रम कोन कसोटी :



पक्ष: रेषा l व रेषा m या एकप्रतलीय रेषांची रेषा n ही छेदिका त्यांना अनुक्रमे P व Q बिंदूत छेदते.

त्यामुळे तयार झालेले ∠APQ व ∠DQP हे व्युत्क्रम कोन असून

∠APQ ≅ ∠DQP

साध्य: रेषा l ∥ रेषा m

सिद्धतेसाठी खुलासा : दोन एकप्रतलीय रेषा एकतर छेदणाऱ्या असतात किंवा न छेदणाऱ्या म्हणजेच समांतर असतात. आपल्याला दुसरा पर्याय सत्य दाखवायचा आहे म्हणजेच येथे पहिला पर्याय असत्य सिद्ध केला पाहिजे.

आपण पाहिले आहे की, विधान व त्याचे नकारी विधान यांपैकी एकच विधान सत्य असते.

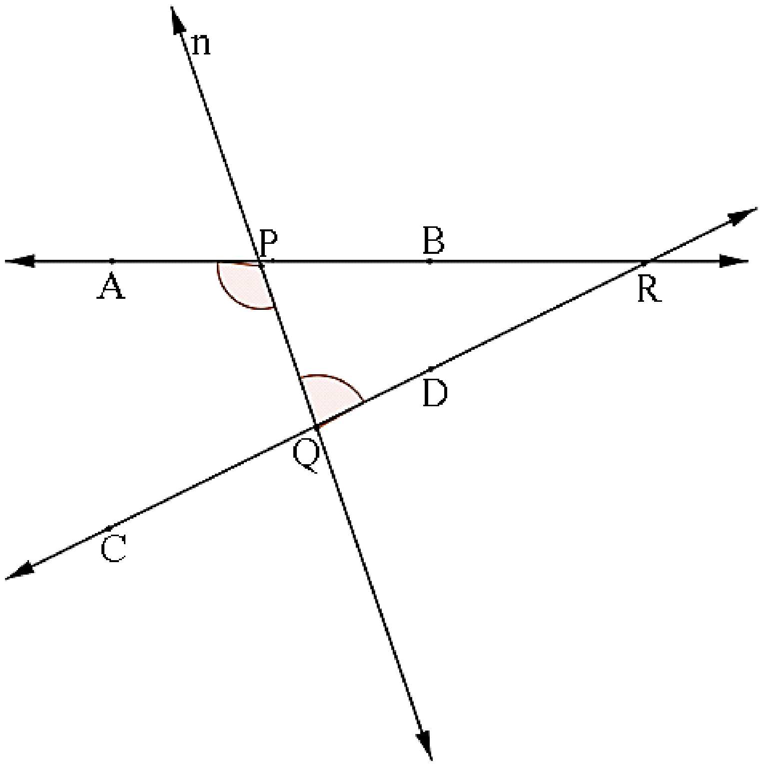
अप्रत्यक्ष सिद्धतेच्या पद्धतीत पहिला पर्याय सत्य मानणे कसे चूक ठरते ते आपण दाखवून देणार आहोत.त्यामुळे आपोआपच त्याचे नकारी विधान सत्य ठरते.

त्यासाठी जी आकृती मिळेल तीसुद्धा पक्षाशी विसंगत दिसते. फक्त ती कशी विसंगत आहे तेच सिद्ध करावयाचे असते.

सिध्दता: रेषा l व रेषा m परस्परांना समांतर नाहीत असे मानू..........(I)

दोन एकप्रतलीय रेषा समांतर नसतील तर त्या परस्परांना छेदणाऱ्या असतात.

समजा त्या परस्परांना R बिंदूत छेदतात. त्यानुसार आकृती काढू.



आकृतीत,∠APQ हा ΔPQR च्या ∠RPQ (म्हणजेच ∠BPQ) ह्या कोनाशी रेषीय जोडी करतो.

∴ ∠APQ हा ΔPQR चा बाह्यकोन आहे व ∠PQR (म्हणजेच ∠PQD) हा त्याचा दूरस्थ आंतरकोन आहे.

∴ ∠APQ >∠PQD ...(त्रिकोणाचा बाह्यकोन दूरस्थ आंतरकोनापेक्षा मोठा असतो.

परंतु पक्षानुसार, ∠APQ≅ ∠PQD असल्याने ∠APQ>∠PQD हे विधान विसंगत आहे.

त्याअर्थी आपण मानलेले विधान (I) हे असत्य असले पाहिजे.

(कारण त्यामुळेच आपल्याला विसंगत विधाने मिळाली)

रेषा l व रेषा m या एकप्रतलीय रेषा असून त्या समांतर नाहीत असे मानणे चुकीचे आहे.

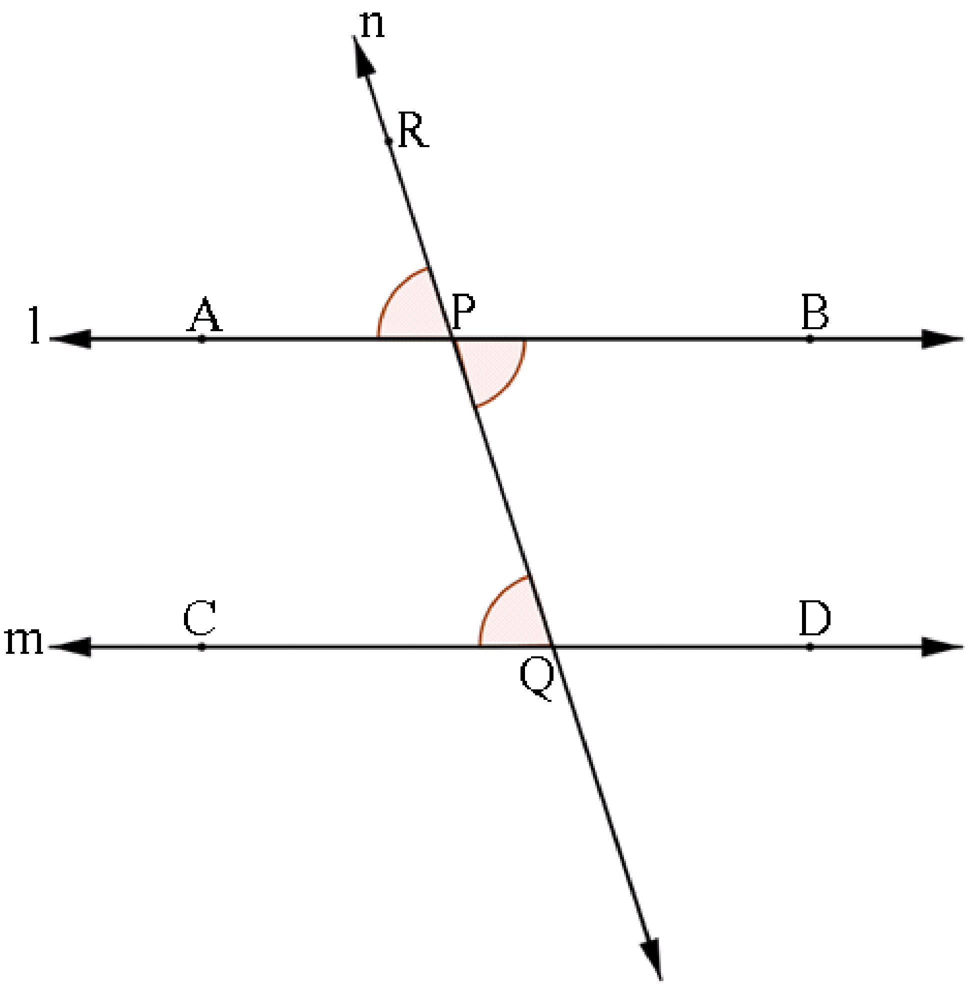
∴रेषा l ∥रेषा m हे सत्य आहे

(या आकृतीत आणि सिद्धतेतही आपण R बिंदू हा रेषा n वर का घेतला नाही यावर विचार करा.)

निष्कर्ष: दोन एकप्रतलीय रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणारी व्युत्क्रम जोडी एकरूप असेल तर त्या रेषा परस्परांना समांतर असतात.

(आता यानंतरच्या कसोट्यांसाठी अप्रत्यक्ष सिद्धता तसेच समांतर रेषांच्या व्याख्या ह्यांच्याऐवजी व्युत्क्रम कसोटी आपण वापरू शकतो. हाच प्रमेय सिद्ध करण्याचा फायदा असतो.)

2) समांतर रेषांची संगत कोन कसोटी :-



पक्ष: रेषा l व रेषा m या एकप्र...

रेषा n ही छेदिका अनुक्रमे P व Q बिंदूत

छेदते. त्यामुळे तयार झालेले ∠APR व

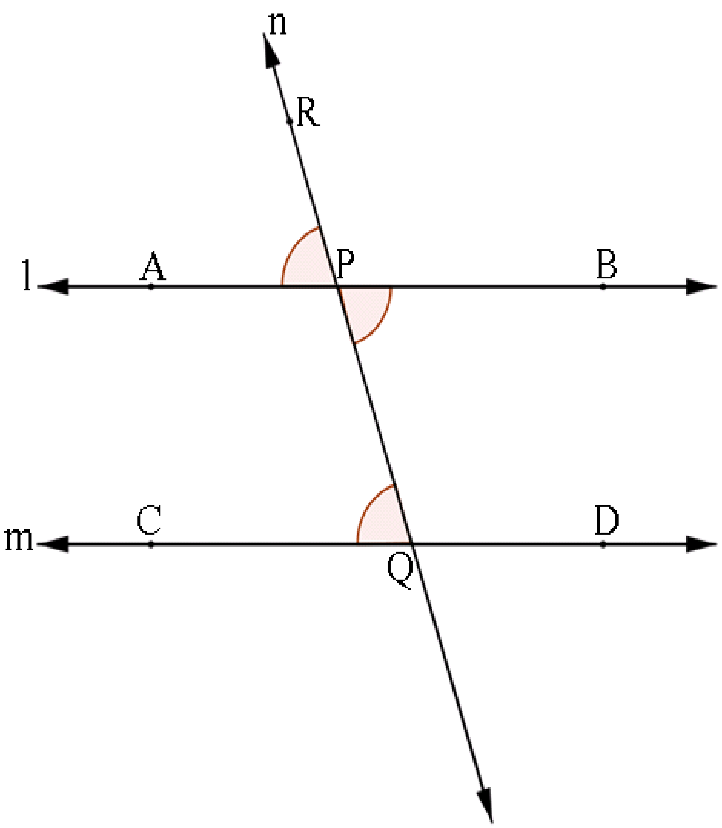
∠CQP हे संगत कोन असून ∠BPQ व

∠CQ Pहे व्युत्क्रम कोन आहेत.

∠APR≅ ∠CQP

साध्य : रेषा l ‖रेषा m

याची सिद्धता अप्रत्यक्ष पद्धतीने देण्याची आवश्यकता नाही. कारण आपण तयार केलेल्या व्युत्क्रम कोन कसोटीचा उपयोग करणार आहोत.



सिद्धता : रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

1) ∠APR ≅ ∠CQP …… (……..)

2) ∠APR ≅ ∠……. (विरूद्ध कोनांचे प्रमेय)

3) ∴ ∠CQP ≅ ∠...... (विधान 1 व 2 वरून)

परंतु ∠CQP व ∠……… हे व्युत्क्रम कोन असून ते एकरूपही आहेत.

∴रेषा l ∥रेषा m ……. (……………….)

निष्कर्ष: दोन एकप्रतलीय रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणारी संगत कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या रेषा परस्परांना समांतर असतात.

उत्तर:-

सिद्धता:-

1) $\angle APR \cong \angle CQP$ ....(पक्ष)

2) $\angle APR \cong \angle BPQ$ ....(विरूद्ध कोनांचे प्रमेय)

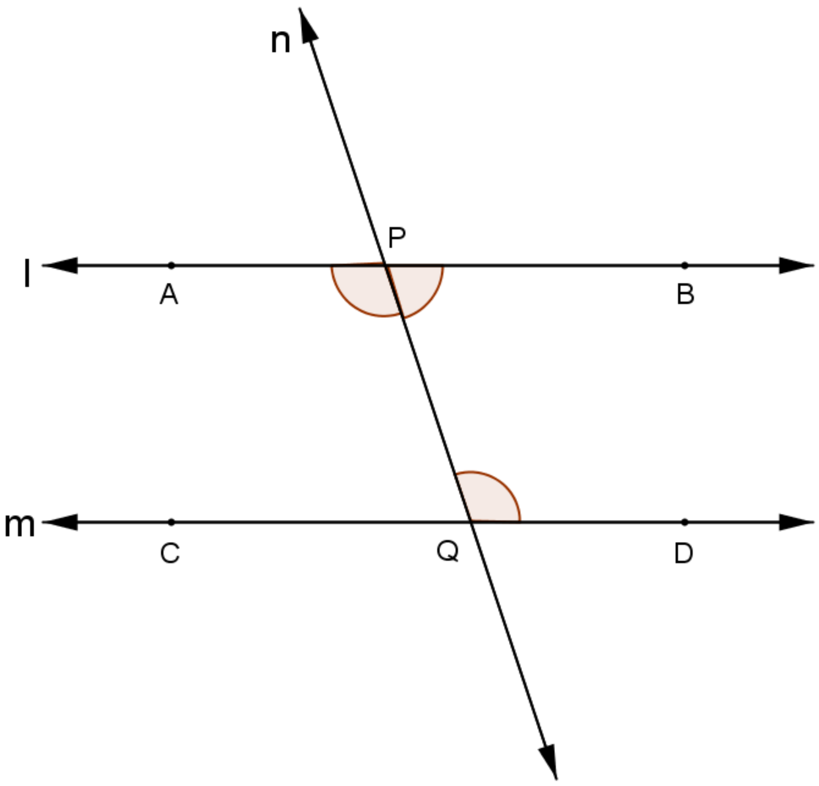
3) $\therefore \angle CQP \cong \angle BPQ$ ....(विधान 1 व 2 वरून)

परंतु $\angle CQP$ व $\angle BPQ$ हे **व्युत्क्रमकोन** आहेत.

$\therefore$ रेषा l $\parallel$ रेषा m ....(समांतर रेषांची व्युत्क्रम कोन कसोटी)

निष्कर्ष: दोन एकप्रतलीय रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणारी संगत कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या रेषा परस्परांना समांतर असतात.

3) समांतर रेषांची आंतरकोन कसोटी:-

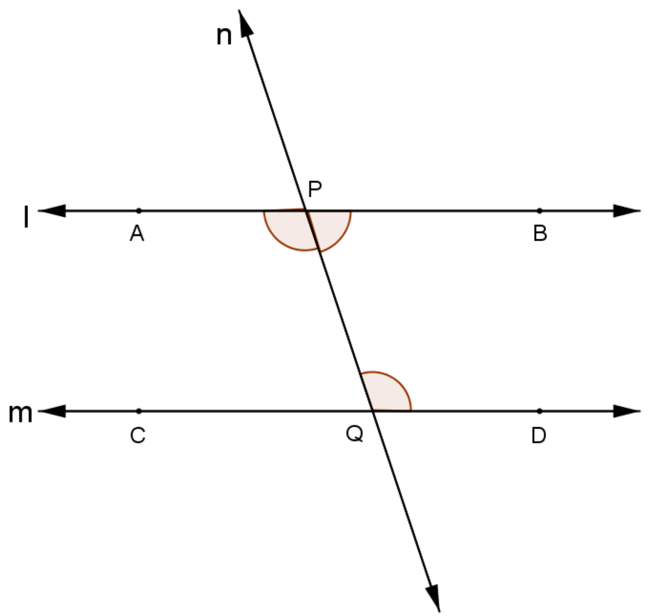


पक्ष: रेषा l व रेषा m या एकप्रतलीय रेषांना रेषा n ही छेदिका अनुक्रमे P व Q बिंदूत छेदते. त्यामुळेतयार झालेले ∠BPQ व ∠PQD हे आंतरकोनआहेत.

तसेच ∠APQ व∠PQD हे व्युत्क्रम कोन आहेत.

$m\angle BPQ + m\angle PQD = 180^0$

साध्य: रेषा l ‖ रेषा m



सिद्धता: रिकाम्या जागा भरून पूर्ण करा.

1) m∠BPQ + m∠PQD = ……… (पक्ष)

2) m∠BPQ + m∠APQ = 180^0 (……….गृहितक)

3) ∴ m∠BPQ + m∠PQD = m∠BPQ + m∠APQ (…………………)

∴ m∠PQD = m∠….. (दोन्ही बाजूतून m∠BPQवजा करून)

परंतु हे दोन कोन रेषा l व रेषा m यांना रेषा n छेदल्यामुळे तयार झालेले व्युत्क्रम कोन आहेत.

4) ∴ रेषा l ||रेषा n ………….. (……….कोन कसोटी)

निष्कर्ष: दोन एकप्रतलीय रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता जर **आंतरकोनांची** एक जोडी **पूरक** असेल तर त्या रेषा परस्परांना समांतर असतात.

उत्तरे:सिद्धता:-

1) $m\angle BPQ + m\angle PQD = \mathbf{180^0}$..............(पक्ष)

2) $m\angle BPQ + m\angle APQ = 180^0$ ....(रेषीय जोडीतील कोनांचे गृहितक)

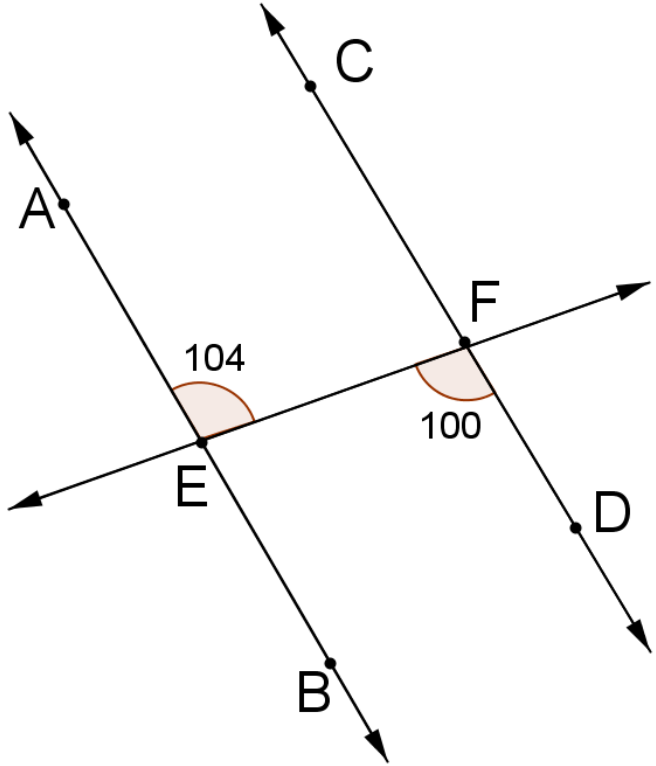
3) $\therefore m\angle BPQ + m\angle PQD = m\angle BPQ + m\angle APQ$........(विधान 1 व 2 वरून)

4) $\therefore m\angle PQD = m\angle$**APQ**.............दोन्ही बाजूतून $m\angle BPQ$वजा करून)

परंतु हे दोन्ही कोन रेषा l व रेषा m यांना रेषा n छेदल्यामुळे तयार झालेले**व्युत्क्रम कोन** आहेत.

5) $\therefore$ रेषा l ‖रेषा n ....(**समांतर रेषांची व्युत्क्रमकोन कसोटी**)

निष्कर्ष: दोन एकप्रतलीय रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता जर **आंतरकोनांची** एक जोडी **पूरक** असेल तर त्या रेषा परस्परांना समांतर असतात.



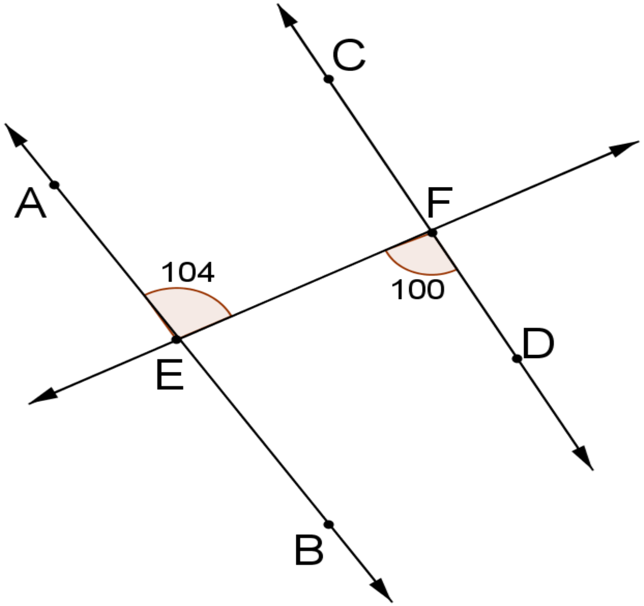
रेषा AB व रेषा CD यांची रेषा EF ही छेदिका आहे. आकृतीत दोन कोनांची मापे दिली आहेत त्यावरून पुढीलपैकी सत्य पर्याय निवडा.

1) रेषा AB ∥रेषा CD

2) रेषा AB व रेषा CD समांतर नाहीत कारण दिलेले संगत कोन एकरूप नाहीत.

3) रेषा AB व रेषा CD समांतर नाहीत कारण दिलेले व्युत्क्रम कोन एकरूप नाहीत.

4) रेषा AB व रेषा CD समांतर नाहीत कारण दिलेले आंतरकोन पूरक नाहीत.



रेषा AB व रेषा CD यांची रेषा EF ही छेदिका आहे. आकृतीत दोन कोनांची मापे दिली आहेत त्यावरून पुढीलपैकी सत्य पर्याय निवडा.

1) रेषा AB ∥ रेषा CD

2) रेषा AB व रेषा CD समांतर नाहीत कारण दिलेले संगत कोन एकरूप नाहीत.

3) रेषा AB व रेषा CD समांतर नाहीत कारण दिलेले व्युत्क्रम कोन एकरूप नाहीत.

4) रेषा AB व रेषा CD समांतर नाहीत कारण दिलेले आंतरकोन पूरक नाहीत.

उत्तर: सत्य पर्याय 3) रेषा AB व रेषा CD समांतर नाहीत कारण दिलेले व्युत्क्रम कोन एकरूप नाहीत.

41.समांतर रेषांच्या कसोट्यांचे व्यत्यास

T1_L17

यानंतर आपण शिकणार आहोत ती प्रमेये म्हणजे वरील तीन कसोट्यांचे व्यत्यास.

’मूळचे प्रमेय व त्याचा व्यत्यास यांच्या विधानांमध्ये जर किंवा जेव्हा ....तर किंवा तेव्हा...... यातील विधानांची अदलाबदल झालेली असते म्हणजे थोडक्यात पक्ष व साध्य यांची अदलाबदल झालेली असते.

त्यामुळे आता जे व्यत्यास शिकणार त्यामध्ये दोन समांतर रेषा व त्यांची छेदिका दिलेली असेल तर तयार होणाऱ्या संगत कोनांच्या जोड्या, व्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या व आंतरकोनांच्या जोड्या यांचे गुणधर्म सिद्ध करावयाचे आहेत. त्यामुळे त्यांची नावेसुद्धा ’व्युत्क्रम कोन कसोटीचा व्यत्यास’, संगत कोन कसोटीचा व्यत्यास’.......अशी आहेत.

त्यापूर्वी थोडी वेगळी व गणिताच्या इतिहासातील क्रांतीकारक माहिती पाहू.

आता तुम्हाला 'युक्लिडची भूमिती व त्यातील गृहितके यांबद्दल थोडी – थोडी माहिती झालेली आहेच. युक्लिडच्या गृहितकांपैकी पाचवे गृहितक आहे.

ते **'समांतर रेषेच्या एकमेत्वाचे गृहितक ' :**

'दिलेल्या रेषेला तिच्याबाहेरील दिलेल्या बिंदूतून एक व एकच समांतर रेषा काढता येते.'

19 व्या शतकापर्यंत 'युक्लिडीयन भूमिती' म्हणजे जगातील कधीही न बदलणारं सत्य असं मानलं जात असे.

पण नंतर युक्लिडच्या 'समांतर रेषेच्या एकमेवत्वाच्या गृहितका' ला अनेकांनी आक्षेप घेतले.

काहींनी हे गृहितक बदलून नवीन भूमिती (नॉन- युक्लिडियन जॉमेट्री) रचली.

युक्लिडच्या भूमितीला आव्हान देणारे काही प्रमुख गणितज्ञ होते गाऊस, लोबॅचेव्हस्की व बोल्याई आणि रिमान. त्यांच्यामुळे भूमितीच्या तीन नवीन शाखा तयार झाल्या आणि नंतर त्या सर्वमान्यसुद्धा झाल्या.

निकोलस लॉबॅचेव्हस्की

बोल्याई

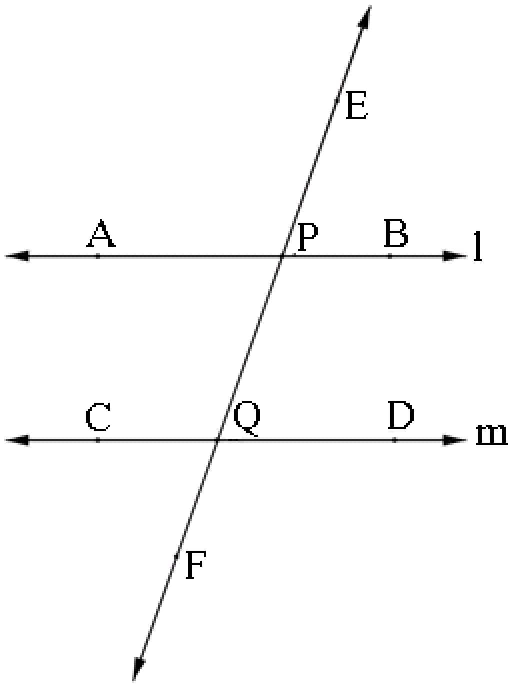
रिमान

निकोलस लोबॅचेव्हस्की व बोल्याई यांच्या भूमितीत 'कोणत्याही रेषेला तिच्या बाहेरील बिंदूतून एकापेक्षाजास्त समांतर रेषा काढता येतात.' या भूमितीमधील काही प्रमेये युक्लिडच्या भूमितीमधीलच आहेत आणि इतर पूर्णपणे निराळी! या भूमितीनुसार त्रिकोणाच्या तीन कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 पेक्षा कमी असते.

याउलट ’रिमान’ या गणितज्ञाच्या भूमितीत ’दिलेल्या रेषेला तिच्या बाहेरील बिंदूतून एकही समांतर रेषा काढता येत नाही. या भूमितीनुसार त्रिकोणाच्या तीन कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 पेक्षा जास्त असते.

1854 मध्ये रिमान या जर्मन गणितज्ञाने विद्यापीठातील आपल्या भाषणातून जी भूमितीलोकांसमोर मांडली त्यातून गणिताच्या क्षेत्रात जी खळबळ माजली ती अद्याप शांत झाली नाही असे मत काहीजण मांडतात. या सर्व क्रांतीकारी विचारांमुळे, तत्वज्ञानामुळे विज्ञानामध्ये आईनस्टाईनची ‘रिलेटिव्हिटि थीअरी’सिद्ध होण्यास मदत झाली आणि विज्ञानाच्या क्षेत्रातही आमूलाग्र बदल घडले.

व्युत्क्रम कोन कसोटीचा व्यत्यास:



पक्ष: रेषा AB ∥ रेषा CD

छेदिका EF ही रेषा AB वरेषा CD ला अनुक्रमे

बिंदू P व Q मध्ये छेदते.∠APQ व∠DQP

हे तयार झालेले व्युत्क्रम कोन आहेत.

साध्य: ∠APQ ≅ ∠DQP

सिद्धता: ∠APQ व ∠DQP हे एकरूप नाहीत असे मानू.

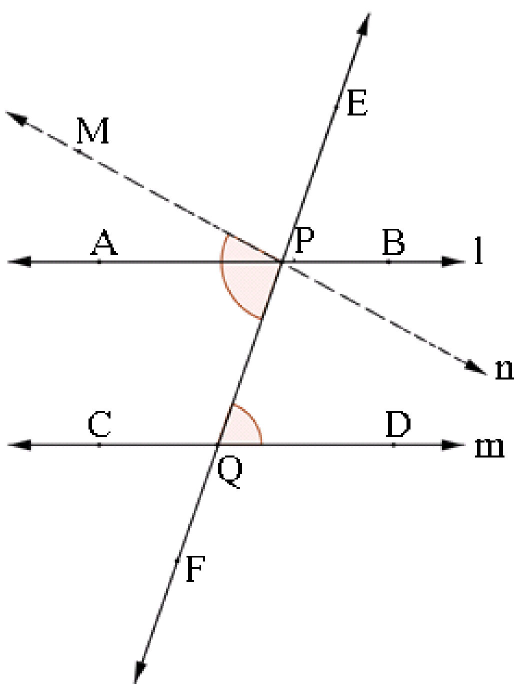
समजा, ∠APQ हा ∠DQP पेक्षा लहान आहे.

∴ किरण PQ च्या P ह्या आरंभबिंदूशी किरण

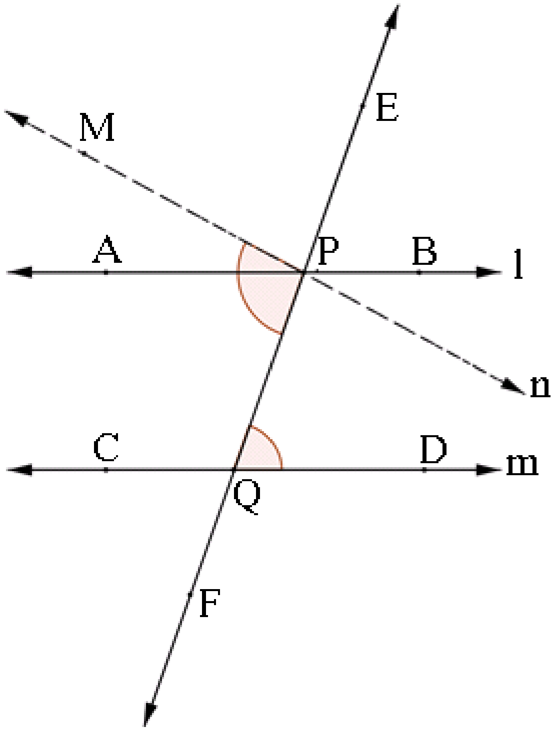
PM हाअसा काढू की,

∠QPM ≅ ∠DQP ..(कोन रचनेचे गृहितक)

आता रेषा PM (रेषा n) काढू.



रिकाम्या जागा भरून राहिलेली सिध्दता पूर्ण करा.



i)∠QPM व ∠DQP हे रेषा PM व रेषा ......यांना रेषा EF ने छेदल्यामुळे तयार झालेले.........कोन असून∠QPM ≅ ∠DQP .

ii) ∴ रेषा PM ∥रेषा CD .... (.......... कसोटी)

iii)परंतु रेषा AB ∥ रेषा CD ..... (........................)

iv) रेषा AB वरही P बिंदूआहे.

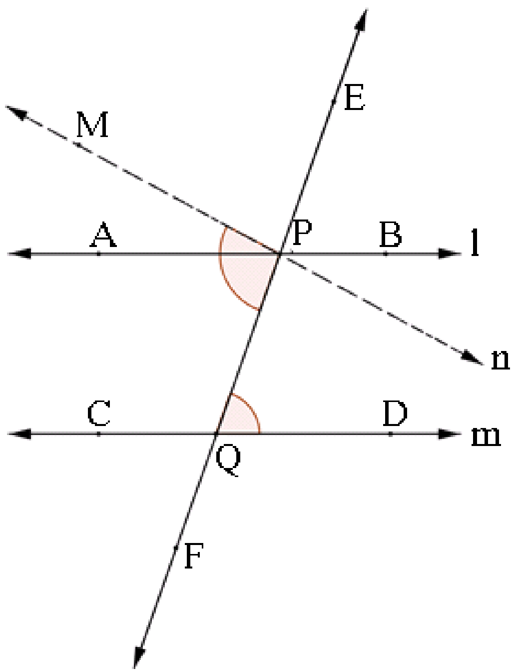
∴रेषा CD ला तिच्याबाहेरील P बिंदूतून जाणाऱ्या रेषा PM व रेषा ....या दोन रेषा समांतर आहेत.

परंतु हे विधान 'युक्लिडच्या समांतर रेषेच्या एकमेवत्वाच्या गृहितका' शी विसंगत आहे.

∴ आपले मानलेले विधान:∠APQ व ∠DQP हे एकरूप नाहीत हे असत्य आहे.

∴ ∠APQ ≅ ∠DQP हे सत्य असले पाहिजे.

उत्तरे:



i)∠QPM व ∠DQP हे रेषा PM व रेषा CD यांना रेषा EF ने छेदल्यामुळे तयार झालेलेव्युत्क्रम कोन आहेत.

ii) ∴ रेषा PM ∥रेषा CD .... (व्युत्क्रम कोन कसोटी)

iii)परंतु रेषा AB ∥ रेषा CD ..... (पक्ष)

iv) रेषा AB वर P बिंदूआहे.

याचा अर्थ रेषा CD ला तिच्याबाहेरील P बिंदूतून जाणाऱ्या रेषा PM व रेषा AB या दोन रेषा समांतर आहेत.

परंतु हे विधान 'युक्लिडच्या समांतर रेषेच्या एकमेवत्वाच्या गृहितका' शी विसंगत आहे.

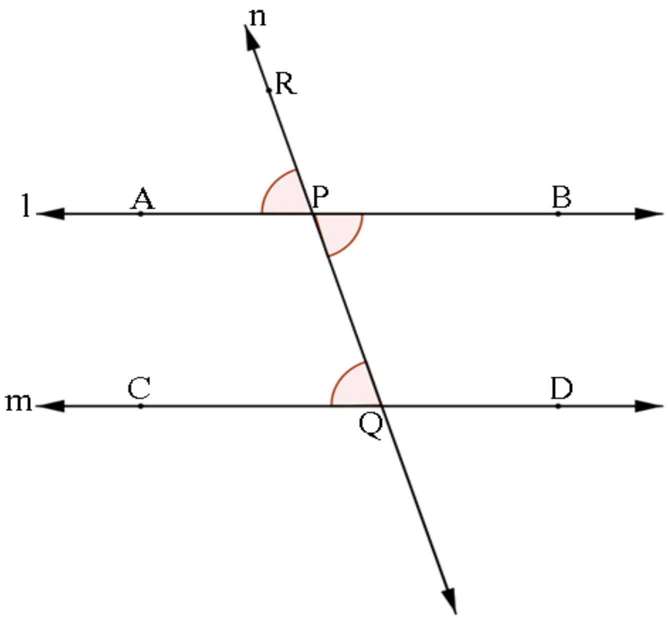
∴ आपले मानलेले ∠APQ व ∠DQP हे एकरूप नाहीत हे विधान असत्य आहे.

∴ ∠APQ ≅ ∠DQP हे सत्य असले पाहिजे.

निष्कर्ष: दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणारे व्युत्क्रम कोन एकरूप असतात.

संगत कोन कसोटीचा व्यत्यास:

T1_L17_A2



पक्ष: रेषा l ∥ रेषा m या रेषांना रेषा n ही छेदिका अनुक्रमे P व Q बिंदूत छेदते.

∠APR व ∠CQP हे तयार झालेले संगत कोन आहेत.

∠BPQ व ∠PQC हे व्युत्क्रम कोन आहेत.

साध्य: ∠APR ≅ ∠CQP

सिद्धता: रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

1) रेषा l ∥रेषा……. …. (पक्ष)

2) ∠BPQ ≅ ∠……… ….(व्युत्क्रम कोन कसोटीचा व्यत्यास)

3) परंतु ∠BPQ ≅ ∠ … … … ……(विरूद्ध कोनांचे प्रमेय)

4) ∴ ∠APR ≅ ∠…….. ………(विधान 3 व 4 वरून)

उत्तरे :

सिद्धता:

1) रेषा l ∥ रेषा m ....(पक्ष)

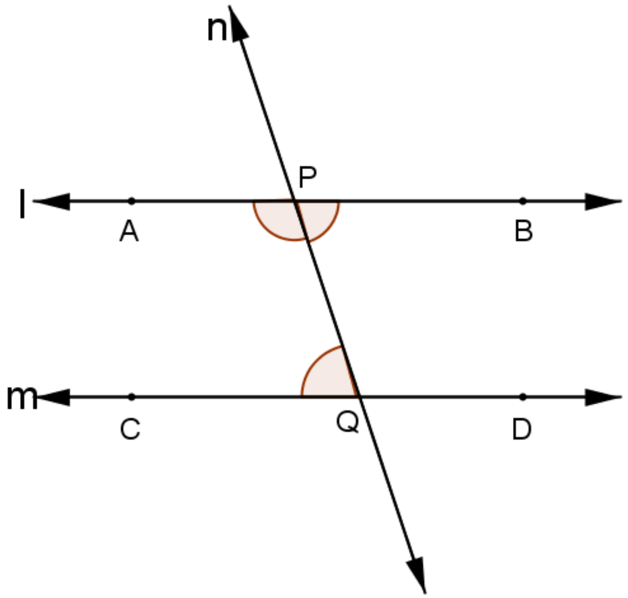
2) ∠BPQ ≅ ∠PQC ... ...(व्युत्क्रम कोन)

3) परंतु ∠BPQ ≅ ∠APR ... .(विरूद्ध कोनांचे प्रमेय)

4) ∴ ∠APR ≅ ∠PQC ....(विधान 3 व 4 वरून)

निष्कर्ष : दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणारे **संगत कोन एकरूप** असतात.

आंतरकोन कसोटीचा व्यत्यास:



पक्ष: रेषा l ∥ रेषा m या रेषांना रेषा n ही छेदिका

अनुक्रमे P व Q बिंदूत छेदते.

∠APQ व ∠PQC हे तयार झालेले आंतरकोन आहेत.

∠BPQ व ∠PQC हे व्युत्क्रम कोन आहेत.

साध्य: $m\angle APQ + m\angle PQC = 180^0$

सिद्धता: रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

1) रेषा l ∥रेषा …(पक्ष)

2) $\angle BPQ \cong \angle$……… (व्युत्क्रम कोन कसोटीचा व्यत्यास)

3) $m\angle BPQ$ + $m\angle$… … = 180^0 (रेषीय जोडीतील कोन)

4) $\therefore$ $m\angle APQ + m\angle$… .= 180^0 (विधान 2व 3वरून)

उत्तर:-

सिद्धता:

1) रेषा l ‖रेषा **m** ...(पक्ष)

2) $\angle BPQ \cong \angle$**PQC** ....(व्युत्क्रम कोनकसोटीचा व्यत्यास)

3) परंतु $m\angle BPQ$ + m∠**APQ** = 180^0 .... (रेषीय जोडीतील कोन)

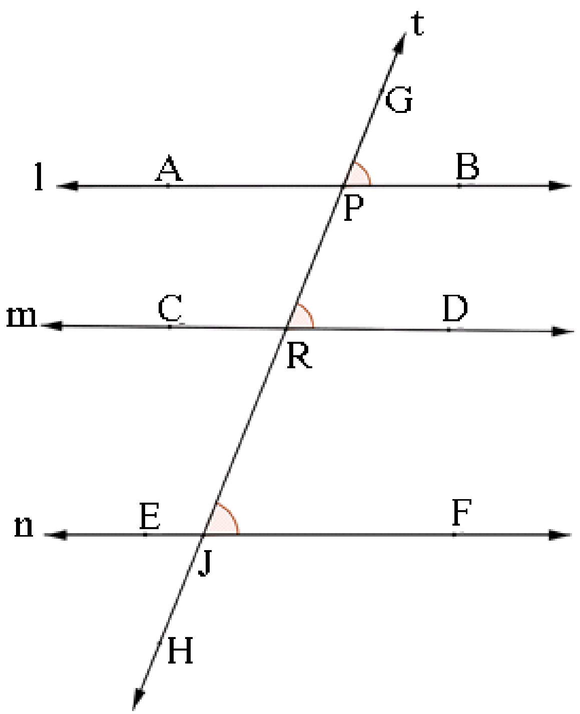
4) ∴ m∠**PQC** + $m\angle$APQ= 180^0 ...(विधान 2व 3वरून)

निष्कर्ष :दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणाऱ्या आंतरकोनाची जोडी **पूरक** असते.

थोडी गंमत: खालील link इंटरनेटवरून open करा व समांतर रेषांच्या कोनांचे खेळ खेळा.

http://www.what2learn.com/home/examgames/maths/angles2/

उपप्रमेय I :



पक्ष: रेषा l , रेषा m व रेषा n या रेषा एकप्रतलीय असून

रेषा l ∥रेषा m व रेषा l ∥रेषा n

रेषा t ने रेषा l,m,n यांना छेदल्यामुळे तयार झालेले कोन

∠GPB, ∠PRD व ∠RJFहे आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आहेत.

साध्य : रेषा m ∥ रेषा n

सिद्धता : रिकाम्या जागा भरुन सिद्धता पूर्ण करा.

1) रेषा l ∥रेषा m असून त्यांची रेषा ....छेदिका आहे. (पक्ष)

2) ∴ ∠GPB ≅ ∠...... (संगत कोन कसोटीचा व्यत्यास)

3) तसेच रेषा l ∥ रेषा .....

रेषा l व रेषा n ची रेषा ....छेदिका आहे.(पक्ष)

∴ ∠……. ≅ ∠RJF……… (…………………….)

4) ∴ ∠……. ≅ ∠RJF (विधान 3व 4 वरून)

5) परंतु हे रेषा m व रेषा n यांना रेषा t ने छेदल्यामुळे तयार झालेले ....कोन आहेत.

∴रेषा m ∥रेषा n (………कोन कसोटी)

उत्तर:

सिद्धता :

1) तसेच रेषा l ∥रेषा .....

2) रेषा l व रेषा n ची रेषा ....छेदिका आहे. (पक्ष)

3) ∴ ∠....... ≅ ∠RJF .... (.......................)

4) ∴ ∠....... ≅ ∠RJF (विधान 3 व 4 वरून)

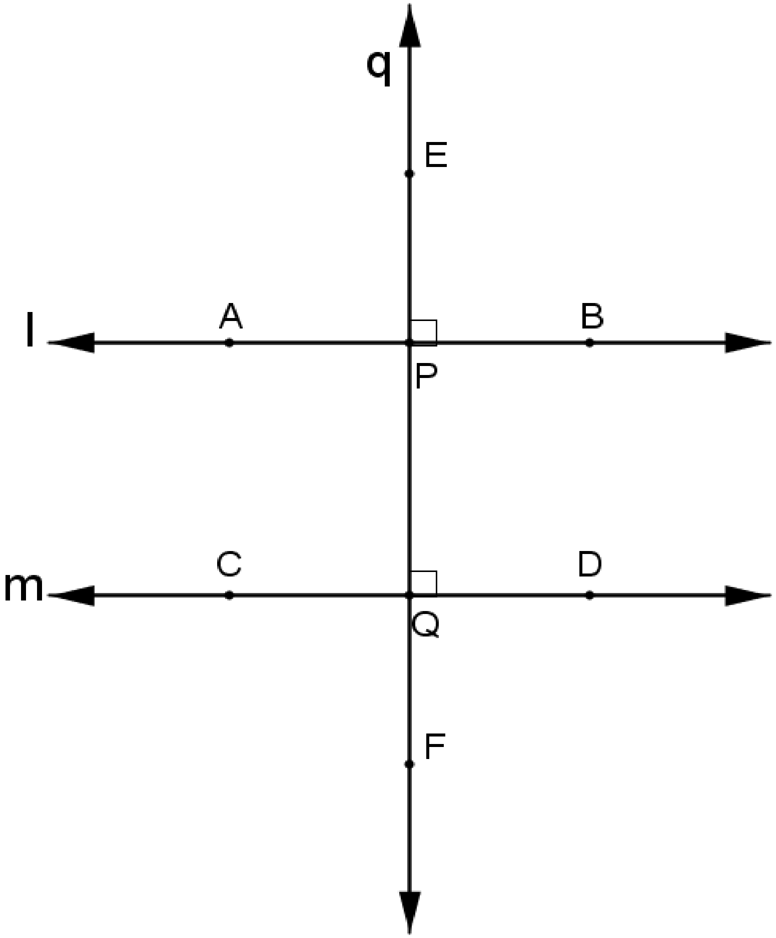
5) परंतु हे रेषा m व रेषा n यांना रेषा t ने छेदल्यामुळे तयार झालेले ....कोन आहेत.

∴रेषा m ∥रेषा n (.........कोन कसोटी)

निष्कर्ष :

जर दोन रेषा त्याच प्रतलातीलतिसऱ्या एकाच रेषेला समांतर असतील, तर त्या रेषा परस्परांना समांतर असतात.

उपप्रमेय II :



पक्ष : रेषा q ⊥ रेषा l व रेषा q ⊥ रेषा m

साध्य : रेषा l ∥ रेषा m

सिद्धता : रिकाम्या जागा भरुन सिद्धता पूर्ण करा.

1) रेषा q ⊥ रेषा l (……………..)

∴ m∠ …..= 90^0

2) त्याचप्रमाणे रेषा q ⊥ रेषा…..

∴ m∠…..= 90^0

3) ∴ m∠…..= m∠….. (विधान 1 व 2 वरून)

4) परंतु हे रेषा l व रेषा m ला रेषा q ने

छेदल्यामुळे तयार झालेले …….कोन आहेत.

∴ रेषा l ∥ रेषा m (……कोन कसोटी)

उत्तरे:

सिद्धता :

1) रेषा q ⊥रेषाl ......(पक्ष)

$\therefore m\angle EBP = 90^0$

2) त्याचप्रमाणे रेषा q ⊥रेषाm

$\therefore m\angle PQD = 90^0$

3) $\therefore m\angle EBP = m\angle PQD$ .. (विधान 1व 2वरून)

4) परंतू हे रेषा l व रेषा m ला रेषा q ने छेदल्यामुळे तयार झालेले संगत कोन आहेत.

∴रेषा l ‖रेषा m .....(संगतकोन कसोटी)

निष्कर्ष : जर एक रेषा त्याच प्रतलातील दोन रेषांना लंब असेल तर त्या दोन रेषा परस्परांना समांतर असतात.

Exercise

गट I) 1 गुणांचे प्रश्न:

1) रिकाम्या जागा पूर्ण करून खालील विधाने पुन्हा लिहा. (प्रत्येकी 1 गुण)

i) तीन किंवा अधिक एकप्रतलीय रेषा एका बिंदूतून जात असतील तर त्या रेषांना ....म्हणतात.

ii) दिलेल्या सर्व बिंदूंना समाविष्ट करणारी एक आणि एकच रेषा असेल तर त्या सर्व बिंदूंना ....म्हणतात.

iii) छेदणा-या दोन प्रतलांचा छेद ....असतो.

iv) प्रत्येक रेषाखंडास ....मध्यबिंदू असतात.

v) प्रतलातील रेषा प्रतलाचे ....अर्धप्रतलात विभाजन करते.

2) खालील विधाने सत्य किंवा असत्य ते लिहा. (प्रत्येकी 1 गुण)

i) तीन नैकरेषीय बिंदू दोन रेषा निश्चित करतात.

ii) परस्परांना छेदणाऱ्या दोन रेषा एकमेकींस छेदू शकत नाहीत.

iii) जे गुणधर्म सत्य मानले जातात त्यांना गृहीतके असे म्हणतात.

3) जर बिंदू P, Q, R एकरेषीय असून d(P, Q) = 17, d(P, R) = 10, d(R, Q) = 7

तर कोणता बिंदू इतर दोन बिंदूंच्या दरम्यान आहे?

4) (प्रत्येकी 1 गुण)

i) एका कोनाचे माप त्याच्या कोटिकोनाच्या दुप्पट असेल तर त्या कोनाचे माप किती?

ii) एका कोनाचे माप त्याच्या पूरक कोनाच्या मापाच्या चौपटीपेक्षा 30^0ने अधिक आहे.

तर त्या कोनाचे माप काढा.

गट II) 2 गुणांचे प्रश्न:

1) खाली दिलेल्या विधांनांवरुन त्यासाठी योग्य आकृत्या काढा. **(प्रत्येकी 2 गुण)**

i) दोन छेदणाऱ्या रेषा.

ii) दोन भिन्न बिंदूंनी निश्चित केलेली रेषा.

iii) दोन छेदणा-या प्रतलांचा छेद संच.

iv) दोन समांतर प्रतले.

v) रेषा l आणि प्रतल E यांना एक आणि एकच P बिंदू सामाईक आहे.

vi) प्रतल H आणि प्रतल G या दोन प्रतलांचा छेद रेषा k आहे.

vii) a, b, c, d, e या रेषा बिंदू P मधून जातात.

2) खालील बाबतीत बिंदू A, बिंदू B, बिंदू C मध्ये दरम्यानता आहे किंवा नाही हे ठरवून दरम्यानता असल्यास ती लिहा.

d(A,B)=4, d(B,C)=1, d(A,C)=5

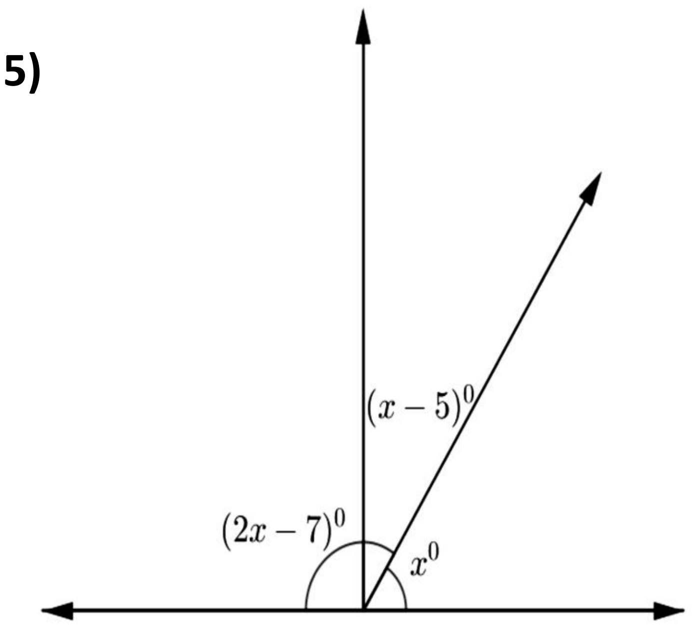
3) d(P,Q)=8, d(Q,R)=5 व d(P,R)=6 या उदाहरणातील बिंदूंच्या जागांबद्द्ल काय समजते?

4) खालील वर्णनावरुन त्यासाठी योग्य आकृत्या काढा.

i) दोन कोन परस्परांचे कोटिकोन असून लगतचे आहेत.

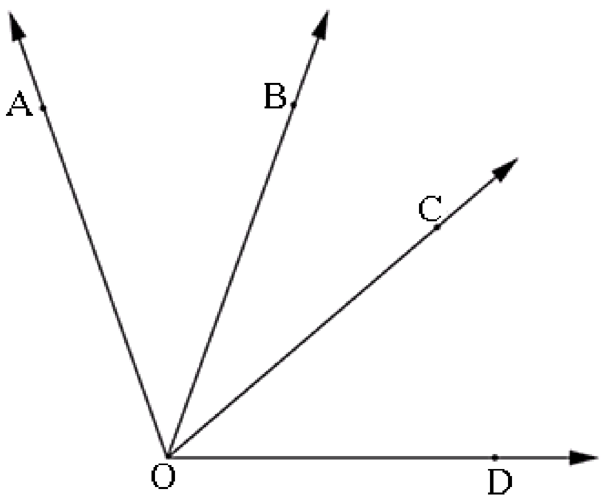
ii) दोन कोन परस्परांचे पूरक असून लगतचे आहेत. ह्या कोनांना आपण आणखी कोणत्या प्रकारचे कोन म्हणतो?

5)



आकृतीमध्ये दिलेल्या माहितीवरून x ची किंमत काढा.

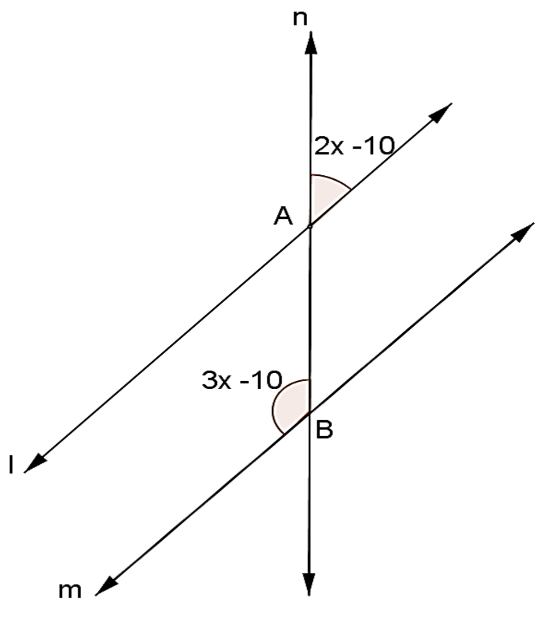
6)



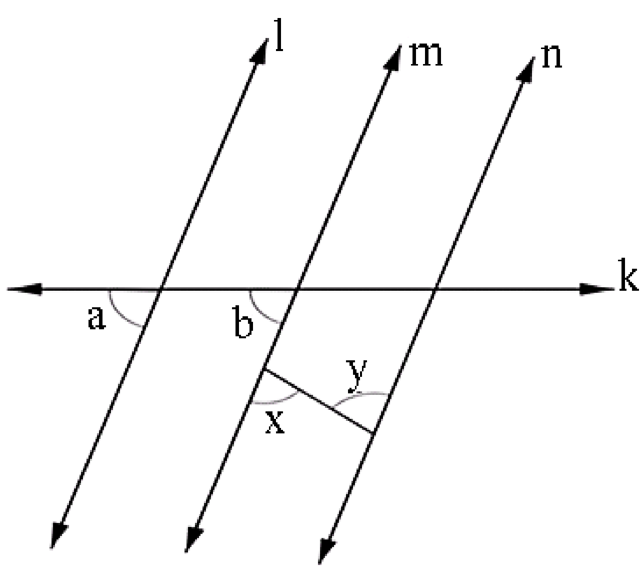
दिलेल्या आकृतीत जर ∠AOC ≅ ∠BOD,

m∠AOB = 34^0 , m∠BOD = 54^0आणि

∠AOB≅ ∠COD तर ∠BOC =?



7) सोबतच्या आकृतीत, रेषा l ‖रेषा m असून रेषा n ही छेदिका त्यांना अनुक्रमे A व B बिंदूत छेदते. आकृतीत दिलेल्या कोनांच्या मापांवरून X ची किंमत काढा.



8)आकृती मध्ये, ∠a ≅ ∠b आणि ∠x ≅ ∠y सिद्ध करा की,रेषा l ‖रेषा n

गट III) 3 गुणांचे प्रश्न :

1)

कोनाचे माप	त्याच्या कोटिकोनाचे माप	त्याच्या पूरक कोनाचे माप	त्याच्या विरुद्ध कोनाचे माप
45^0			
	r^0		
		$(90+x)^0$	

2) दिलेले एक प्रतल व दिलेली एक रेषा ह्यांच्यातील संबंध दाखविणाऱ्या वेगवेगळया शक्यता किती असतील यावर विचार करा. त्या प्रत्येकासाठी योग्य आकृती काढा व त्यांच्यातील संबंध प्रत्येक आकृतीच्या खाली लिहा.

गट IV) 4 गुणांचे प्रश्न:

1) **'दरम्यानता'** ही संकल्पना वापरून रेषाखंड AB व किरण AB हे बिंदूसंच गुणधर्म पद्धतीने लिहा.

2) समजा, ∠P व ∠Q हे परस्परांचे कोटिकोन आहेत.

∴ त्यांच्या मापांची बेरीज =.........(व्याख्या)

म्हणजेच m∠P+ m∠Q **=……(I)**

तसेच समजा, ∠Q व ∠R हे परस्परांचे कोटिकोन आहेत.

∴ m∠Q + m∠R =………. **(II)**

आता समीकरण **(I)**व **(II)**वरून नवीन समीकरण लिहा.

..........+..........=............+............

या समीकरणांच्या दोन्ही बाजूंची पदे पहा व त्यावरून मिळणारी नवीन समानता लिहा.

आता या समीकरणावरून पुढील विधान पूर्ण करा :-

एकाच लघु कोनाचे दोन कोटिकोन................असतात.

अशाच प्रकारे एकाच कोनाच्या दोन पूरककोन..............असतात असा नियम मिळवा.

Assessment

1) एका रेषेवर P ↔ -4 आणि Q ↔ 4 असल्यास d(P,Q) = ……

a) 0 b) -8 c) -8 d) 8

2) एका रेषेवर d(A, B) = 5 व A ↔ 3 व B बिंदू A च्या डावीकडे आहे तर B चा निर्देशक = ….

a) 8 b) -8 c) -2 d) 2

3) जर रेषेवर P-M-Q अशी दरम्यानता असेल तर बिंदू P, बिंदू Q आणि M सारखे सर्व बिंदू यांच्यासंचाला ………………..म्हणतात.

a) किरण PQ b) रेख PQ c) किरण QP d) रेषा PQ

4) पुढीलपैकी ………….हा कोन 50^0मापाच्या कोनाचा सहअवसानी कोन आहे.

a) 310^0 b) -310^0 c) 130^0 d) -50

5) रेषा l ∥रेषा m असून रेषा n ही त्याच प्रतलातील आहे. जर रेषा n ⊥रेषा l तर पुढीलपैकी............हे विधान सत्य आहे.

a) रेषा n ⊥रेषा m

b) रेषा n ∥रेषा m

c) रेषा n ही रेषा m ला काटकोनात छेदत नाही.

d) रेषा n व रेषा m ह्या एकप्रतलीय नाहीत.