प्रकरण 2 : त्रिकोण

संकल्पना चित्र

T2

तीन बाजू असलेली एकप्रतलीय बहुभुजाकृती

त्रिकोण

बाजूंवरुन होणारे त्रिकोणाचे प्रकार

- समभुज त्रिकोण
- समद्विभुज त्रिकोण
- विषमभुज त्रिकोण

कोनांवरुन होणारे त्रिकोणाचे प्रकार

- लघुकोन त्रिकोण
- काटकोन त्रिकोण
- विषमभुज त्रिकोण

त्रिकोणाच्या सेविअन्स (मध्यगा, शिरोलंब, त्याच्या कोनांचे दुभाजक इ.)

त्रिकोणाचे गुणधर्मः

i) तीन कोनांची बेरीज = 180

ii) त्रिकोणाचा बाह्यकोन व्याख्या

iii) दूरस्थ आंतरकोनांचे प्रमेय

समरूप त्रिकोणः

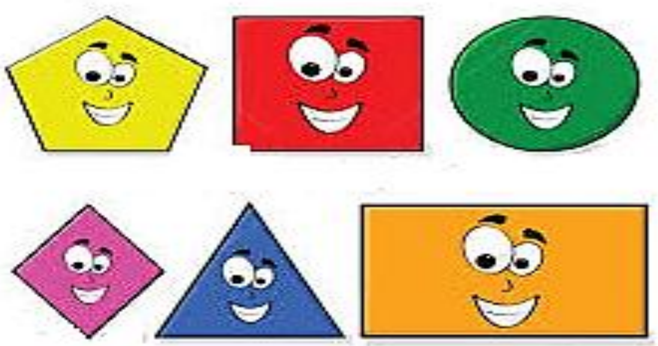
व्याख्या, समरूपतेच्या कसोट्या व त्यांचे गुणधर्म

बहुभुजाकृती

खालील गमतीशीर चित्रात काही आकार आहेत.त्यांच्या बाजूंवरून, कोनांवरून त्यांना भूमितीत आपण वेगवेगळी नावे देतो.

ती नावे तुम्ही सांगू शकाल ना?

यातील एक आकृती इतरांपेक्षा निराळी आहे ती कोणती? कशामुळे ?



उत्तर: चित्रात एक पंचकोन,तीन चौकोन, एक त्रिकोण व एक वर्तुळाकार आहेत. त्यातील वर्तुळाकार इतरांपेक्षा निराळा आहे कारण तो रेषाखंडांनी बध्द झालेला नाही.

यातील वर्तुळाकाराखेरीज इतर आकृत्यांना आपण बहुभुजाकृती म्हणतो.

त्यांपैकी सर्वात कमी बाजू असलेली बहुभुताकृती म्हणजे त्रिकोण!

काय महत्व आहे त्रिकोणाचे?

यश हा तुमच्या एव्हढाच एक मुलगा आहे. त्याला अनेक गोष्टींबद्दल खूप कुतुहल असते.

तो चौकसपणे आपल्या अनेक शंकांची उत्तरे शोधण्याचा प्रयत्न करीत असतो.

एकदा त्याच्या घरी आलेल्या एका मासिकात त्याने जगातील वेगवेगळ्या ठिकाणी असलेल्या काही प्रसिध्द पुलांचे फोटो पाहिले.

ते पाहताना त्याला लक्षात आले की, या सगळ्या पुलांच्या रचनेत एक साम्य्र आहे की,त्यात त्रिकोणी आकारच वापरलेले दिसत आहेत.

झालं! यशच्या डोक्यात विचारचक्र सुरू झाले.
का म्हणून त्रिकोणाला पुलांच्या रचनेत इतके महत्व आहे बरे?

काही ठिकाणी तर आयताकृतीमध्येही कर्ण जोडून त्रिकोणच का तयार केले आहेत?
कोणाला तरी हे विचारलेच पाहिजे.

मग वडलांच्या परवानगीने त्याने मासिकातले काही फोटो कापून घेतले.
ते पुढे पहा आणि ठरवा की, यशचे निरीक्षण बरोबर आहे का?

मग यशने इंटरनेटवर पुढील दोन websites बघितल्या. त्यात दाखविलेल्यांपैकी एका प्रकारे पुलाची प्रतिकृतीसुध्दा करून पाहिली. त्यातून त्याचे शंका निरसन तर झालेच, शिवाय त्याला शाळेच्या भूमितीच्या अभ्यासात त्रिकोणांना ,त्यांच्या गुणाधर्मांना एतके महत्व का असते तेही कळले व तो वर्गात भूमिती अधिक लक्षपूर्वक शिकू लागला.

यशने पाहिलेल्या websites कोणत्या ?
त्या तुम्हालासुध्दा बघायच्या आहेत?
त्यापैकी काही websites खाली दिल्या आहेत त्या अवश्य पहा.त्या इंग्र्जी भाषेत असल्या तरी त्यातल्या कृती पाहून तुम्हाला सहज कळतील.नक्की बघा.

https://www.youtube.com/watch?v=k8hG3xJitAg

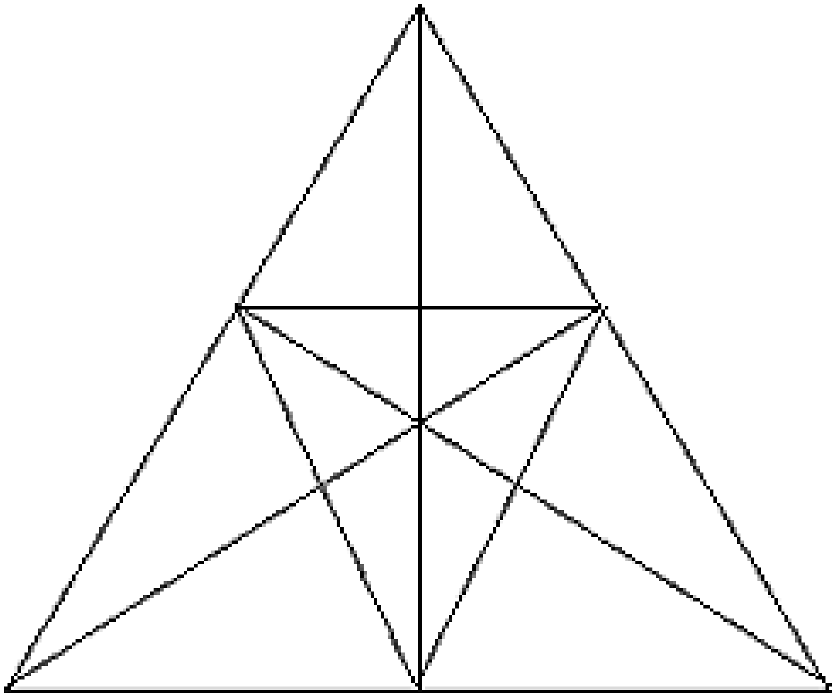
https://www.youtube.com/watch?v=b9niGbPGqs8

गंमत म्हणून पुढे एक कोडे दिले आहे तेही सोडवा.

त्रिकोण: विषयप्रवेश

डोके लढवा:

खालील आकृतीत एकूण किती त्रिकोण आहेत?



तुमच्या वहीमध्ये ही आकृती व्यवस्थितपणे काढून घ्या.

नंतर त्रिकोण मोजायला सुरूवात करा.
तुमचे उत्तर खालील चौकोनात लिहा.
करा प्रयत्न!

उत्तर:

त्रिकोणाची व्याख्या:

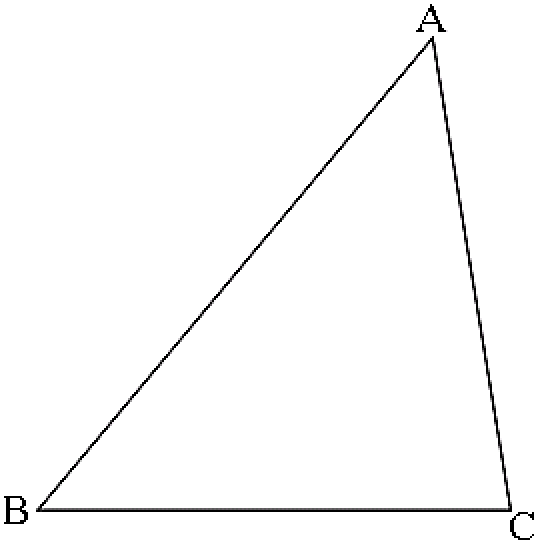
जर बिंदू A, B, C हे नैकरेषीय असतील तर रेख AB ,

रेख BC व रेख CA ह्यांच्या संयोग संचाला ΔABC म्हणतात.

त्रिकोण हा बिंदूसंच असतो.

बिंदू A, B, C ना ΔABC चे शिरोबिंदू म्हणतात.

तीन बाजू व तीन कोन हे त्रिकोणाचे सहा घटक असतात.



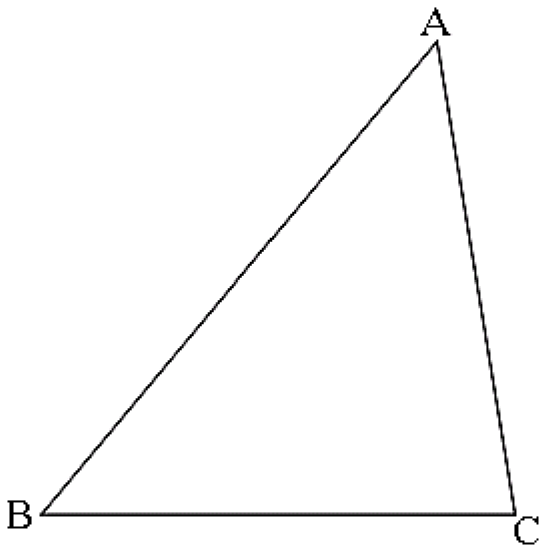
ΔABC चे सहा घटक :

1) बाजू AB 2) बाजू BC 3) बाजू CA

4) ∠ABC 5) ∠BCA 6) ∠CAB

प्रश्न: त्रिकोण <u>एकप्रतलीय</u> बिंदूंचा संच आहे का? असल्यास तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.

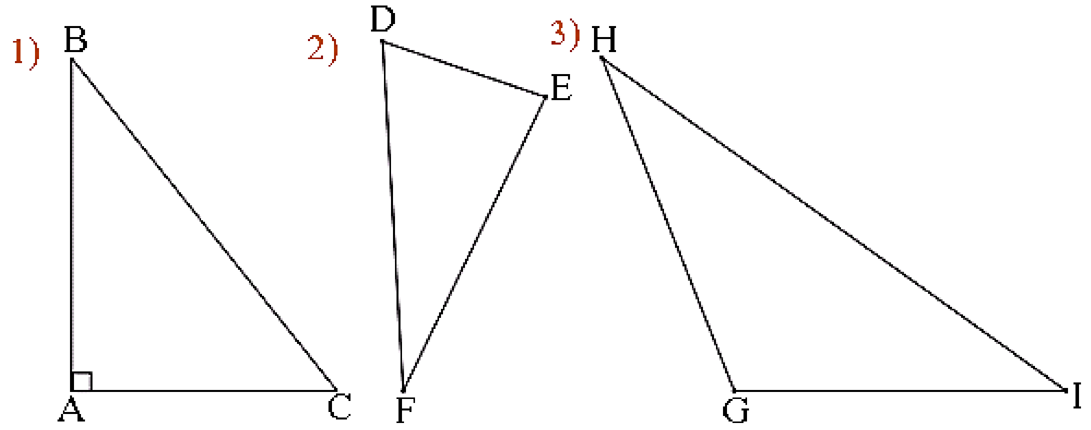
T2_L3_A1



त्रिकोणाचे शिरोबिंदू नैकरेषीय असतात यावरून पुढे विचार करा.

त्रिकोणांचे घटक:

त्रिकोणाच्या पुढील आकृत्या वहीत काढून घ्या व खालील तक्ता पूर्ण करा.



त्रिकोणाचे नाव	दिलेला कोन समाविष्ट करणाऱ्या दोन बाजू	दिलेल्या कोनासमोरील बाजू
1) ΔABC	$\angle ABC$: रेख AB व रेख BC	$\angle ABC \rightarrow$ रेख AC
2) ΔDEF	$\angle FDE$:........	$\angle FED \rightarrow$ ....
3) ΔGHI	$\angle HIG$:	$\angle GIH \rightarrow$ ....

उत्तर:-

त्रिकोणाचे नाव	दिलेला कोन समाविष्ट करणाऱ्या दोन बाजू	दिलेल्याकोनासमोरील बाजू
1) ΔABC	$\angle ABC$: रेख AB व रेख BC $\angle$	$\angle ABC \rightarrow$ रेख AC
2) ΔDEF	$\angle$FDE : रेख FD व रेख DE	$\angle$FED → रेख DF
3) ΔGHI	$\angle$HIG : रेख HI व रेख IG	$\angle$GIH → रेख GH

त्रिकोणांचे प्रकार :

बाजूंवरून होणारे त्रिकोणांचे प्रकार :

त्रिकोणांचे बाजूंवरून होणारे प्रकार तुम्हाला माहित आहेत.
त्यावरून खालील सारणी रिकाम्या जागा भरून पूर्ण करा.

त्रिकोणाचे वैशिष्ट्य	त्रिकोणाचा प्रकार
तीन बाजू एकरूप	
दोन बाजू एकरूप	
तीन बाजू असमान	

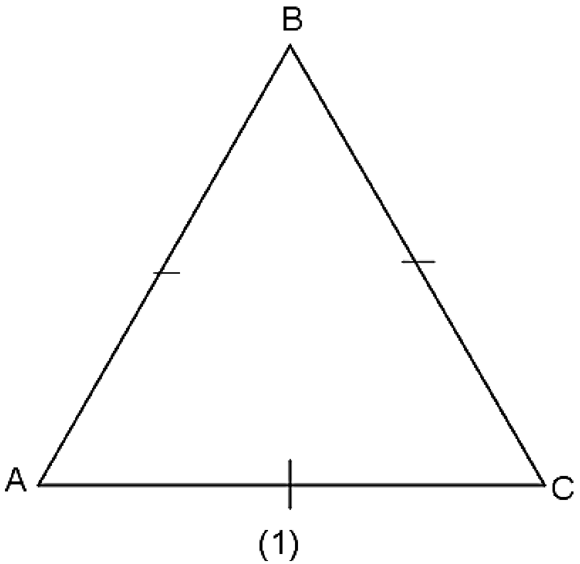
T2_L4_A2

कोनांवरून होणारे त्रिकोणांचे प्रकार:

त्रिकोणांचे कोनांवरून होणारे प्रकार तुम्हाला माहित आहेत. त्यावरून खालील सारणी रिकाम्या जागा भरून पूर्ण करा.

त्रिकोणाचा वैशिष्ट्य	त्रिकोणाचा प्रकार
तीनही लघुकोन	
एक कोन काटकोन	
एक कोन विशालकोन	

त्रिकोणाचा प्रकार ओळखणे:

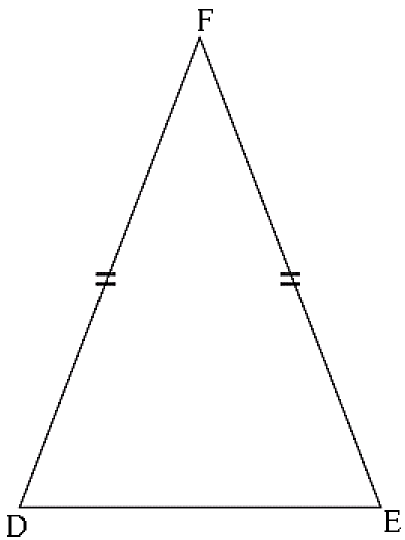


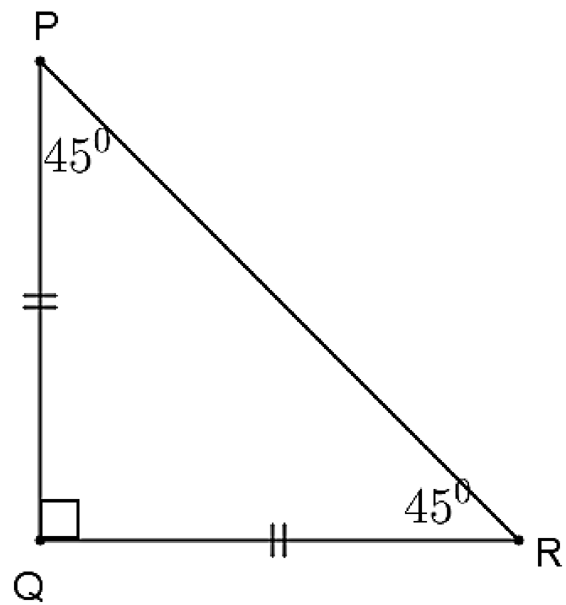
सोबतची आकृती काळजीपूर्वक पहा.
त्यावरून त्या त्रिकोणाचा बाजूंवरून व कोनांवरून होणारा प्रकार कोणता ते रिकाम्या चौकटीत लिहा.

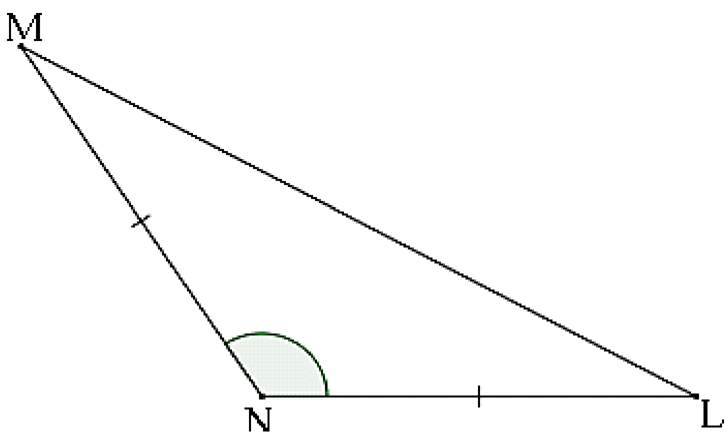
त्रिकोणाचे नाव:	बाजूंवरून होणारा प्रकार:	कोनांवरून होणारा प्रकार:
1) ΔABC		

त्रिकोणाचा प्रकार ओळखणे:

खालील प्रत्येक आकृती काळजीपूर्वक पहा.
त्यावरून त्या त्रिकोणाचा बाजूंवरून व कोनांवरून होणारा प्रकार कोणता ते त्याखालील रिकाम्या चौकटीत लिहा.



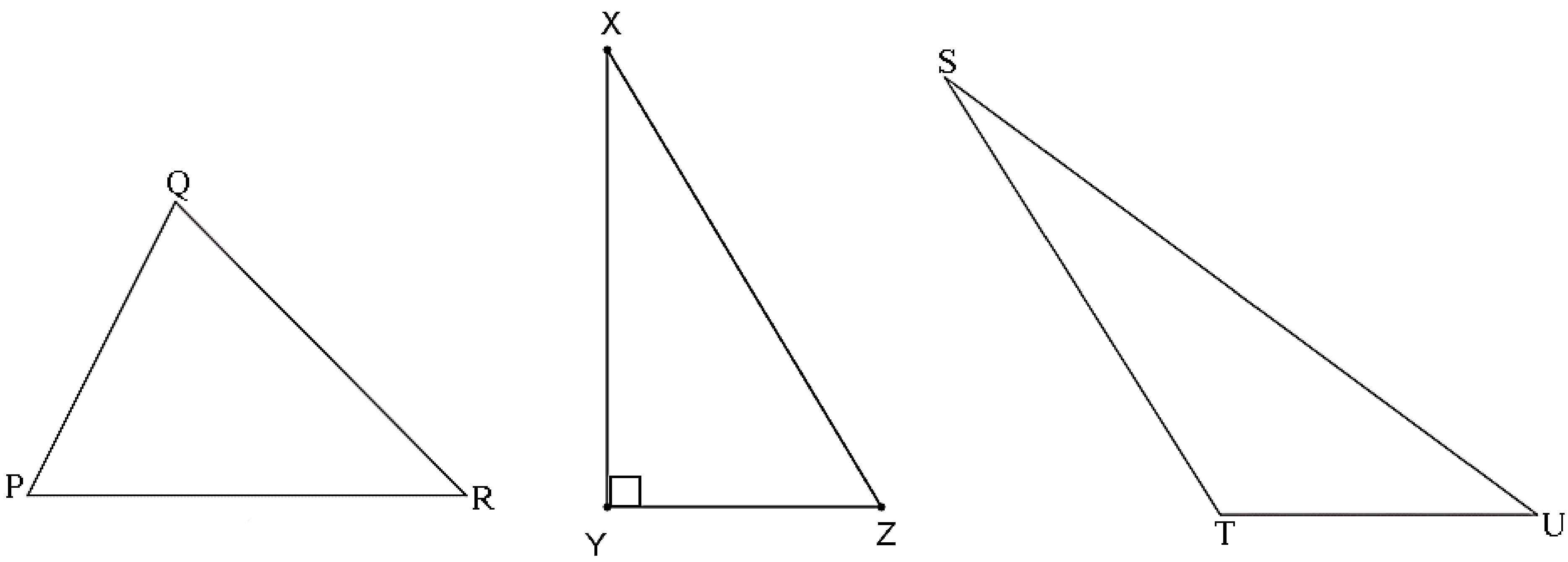




त्रिकोणाचे नाव:	बाजूंवरून होणारा प्रकार:	कोनांवरून होणारा प्रकार:
1) ΔDEF		
2) ΔPQR		
3) ΔLMN		

T2_L4_A3

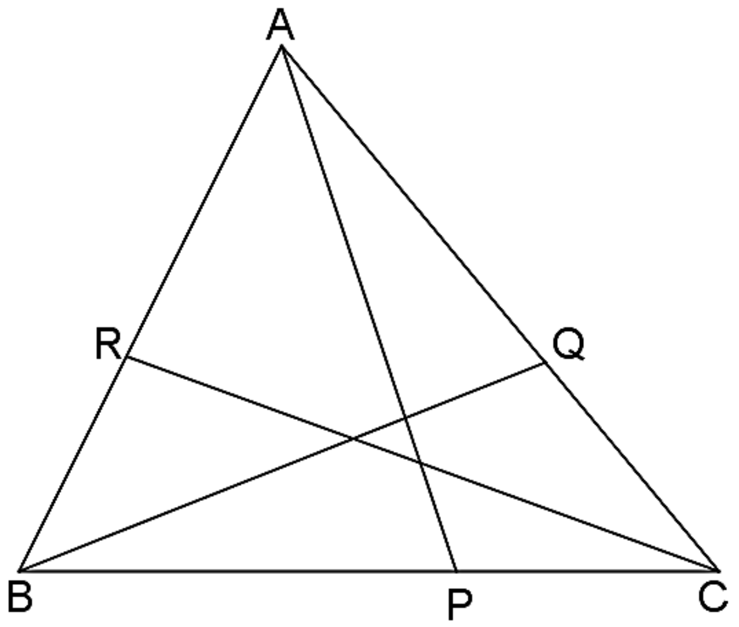
त्रिकोणाचा प्रकार ओळखणे:



त्रिकोणाचे नाव:	बाजूंवरून होणारा प्रकार:	कोनांवरून होणारा प्रकार:
1) ΔPQR		
2) ΔXYZ		
3) ΔSTU		

त्रिकोणाच्या सेविअन

सेविअन:- त्रिकोणाचा शिरोबिंदू आणि त्याच्या समोरील बाजूंवरील कोणताही एक बिंदू जोडणारा रेषाखंड म्हणजे एक सेविअन असते.



वरील आकृतीत $\triangle$ ABC च्या किती सेविअन्स आहेत? त्यांची नावे लिहा.

त्रिकोणाचा आंतरमध्य

T2_L5_A1

खालील कृती करा:-

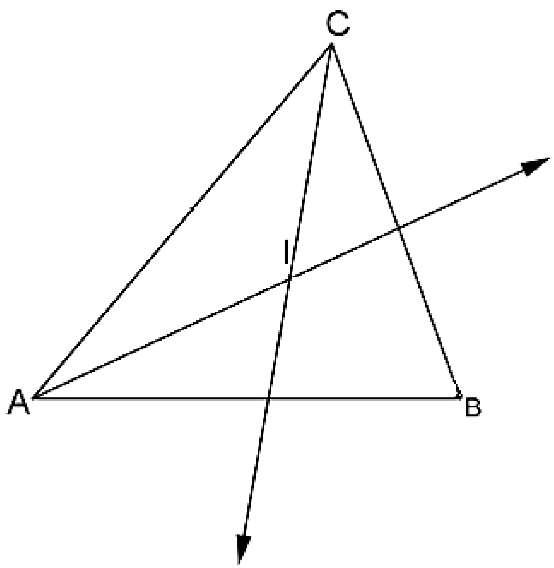
1) ΔABC असा काढा की, $m\angle CAB=50^0$, $m\angle ABC=70^0$, बाजू 5.5 सेमी.

∠CAB व ∠ACB यांचे कोन दुभाजक काढा.

त्यांच्या छेदनबिंदूला I नाव द्या.

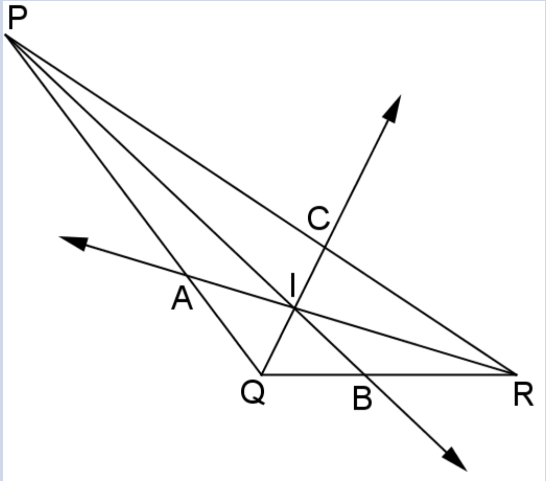
आता किरण BI काढा व∠BIC व ∠BIA चीमापे कोनदुभाजकाने ठरवा.

त्यावरून किरण BI बद्दल तुमचे निरीक्षण लिहा. त्यावरून I बिंदूबद्दल काय आढळले ते लिहा.



T2_L5_A1

आंतरमध्य

त्रिकोण	सेविअनचा प्रकार	संपात बिंदूचेनाव	गुणधर्म
	त्रिकोणाच्या प्रत्येक कोनाचा दुभाजक म्हणजे सेविअन असते व ते सेविअन्स एकसंपाती असतात.	आंतरमध्य I	I बिंदूचे प्रत्येक बाजू पासूनचे अंतर समान असते. [∴ I केंद्र व त्याचे बाजूपासूनचे लंबांतर = त्रिज्या घेऊन वर्तुळ काढल्यास त्रिकोणाचे आंतरवर्तुळ मिळते.]

त्रिकोणाचा गुरूत्वमध्य

T2_L5_A2

2) ΔPQR मध्ये, ∠PQR=80^0, QR=5सेमी, QP=7सेमी, घेऊन ΔPQR काढा.

बाजू QR वबाजू QP यांचे मध्यबिंदू अनुक्रमे A व B बिंदू घ्या.

रेख PA व रेख BR ह्या मध्यगा जोडा.

त्यांच्या छेदनबिंदूला G नाव द्या. नंतर बिंदू Q व G यांना जोडणारा किरण QG काढा.

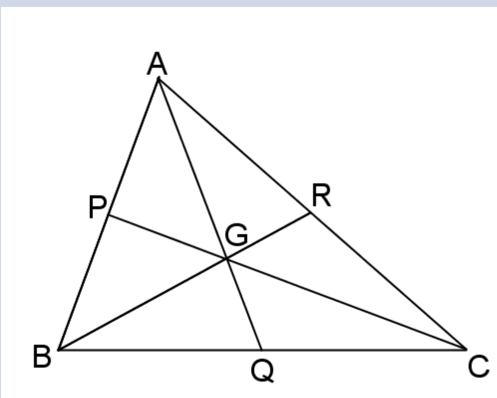
तो बाजू PR ला ज्या बिंदूत छेदतो त्याला C नाव द्या. PC व RC अंतरे मोजा.

त्यावरून C बिंदूचा रेख PR शी काय संबंध आहे तो पहा.

त्यावरून रेख QC बद्दल काय कळते?

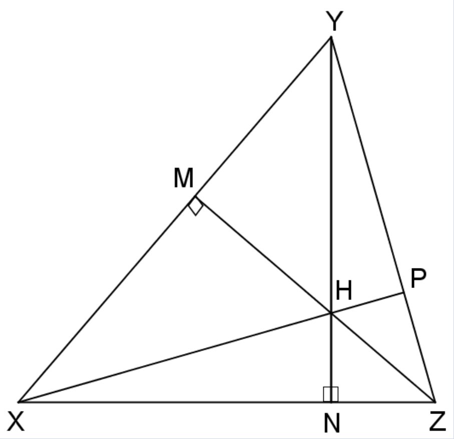
G बिंदूबद्दल काय आढळले ते लिहा.

T2_L5_A2

त्रिकोण	सेविअनचा प्रकार	संपात बिंदूचेनाव	गुण
	त्रिकोणाचा शिरोबिंदू व त्या समोरील बाजूचा मध्यबिंदू यांना जोडणाऱ्या सेविअनला त्रिकोणाची मध्यगा म्हणतात. त्रिकोणाच्या तीनही मध्यगा एकसंपाती असतात.	मध्यगासंपात गुरुत्वमध्य G	**G बिंदू प्रत्येक मध्यगेला 2: 1 गुणोत्तरात विभागतो.** $\frac{AG}{GQ}=\frac{BG}{GR}=\frac{CG}{GP}=\frac{2}{1}$

लंबसंपात

T2_L5_A3

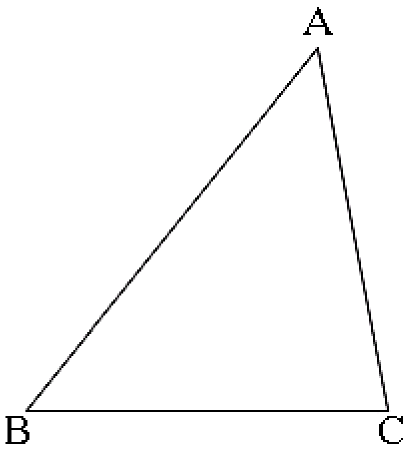
त्रिकोण	सेविअनचा प्रकार	संपात बिंदूचे नाव	गुणधर्म
	त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूतून संमुख बाजूवर किंवा तिला समाविष्ट करणाऱ्या रेषेवर काढलेल्या लंब रेषाखंडाला त्रिकोणाची उंची म्हणतात.	लंब संपात बिंदू H	....

प्रश्न: समभुज त्रिकोणात लंब संपात,गुरूत्वमध्य व आंतरमध्य रचनेने दाखवा.

तुमचे निरीक्षण नोंदवा.

त्रिकोणाचे गुणधर्म:

प्रमेय:



सिद्धतेचे विश्लेषण:

ΔABC हा कोणताही त्रिकोण आहे. त्याच्या तीन कोनांच्या मापांची बेरीज $\mathbf{180^0}$ दाखविण्यासाठी खालील प्रश्नांची उत्तरे शोधून काढा.

1) येथे तीन कोनांची बेरीज = $\mathbf{180^0}$ दाखवायची आहे. आपल्याकडे यासाठी एखादे प्रमेय किंवा गृहितक आहे काय?

उत्तर: नाही.

2) मग दोन कोनांची बेरीज 180^0 असते यासाठी गृहितक किंवा एखादे प्रमेय आहे का?

उत्तर:

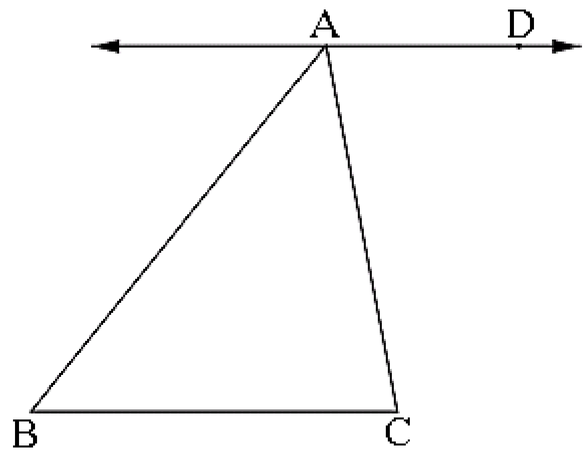
a) रेषीय जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज $=180^0$ हे गृहितक आहे.

b) दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यास तयार होणाऱ्या आंतरकोनांची जोडी पूरक असते (म्हणजेच त्यांच्या मापांची बेरीज 180^0 असते.) हे प्रमेय आहे.

3) पक्षामध्ये, दोन समांतर रेषा किंवा रेषीय जोडीतील कोन आहेत का?

उत्तर: नाही.

4) याचा अर्थ आपल्याला समांतर रेषां व त्यांची छेदिका यांमुळे तयार होणा-या आंतरकोनांचा गुणधर्म वापरला पाहिजे. त्यासाठी दिलेल्या आकृतीत रचना केली पाहिजे. म्हणून A बिंदूतून बाजू BC ला समांतर रेषा l काढू. तिच्यावर रेख AB च्या ज्या बाजूस C बिंदू आहे त्या बाजूस D बिंदू घेऊ.

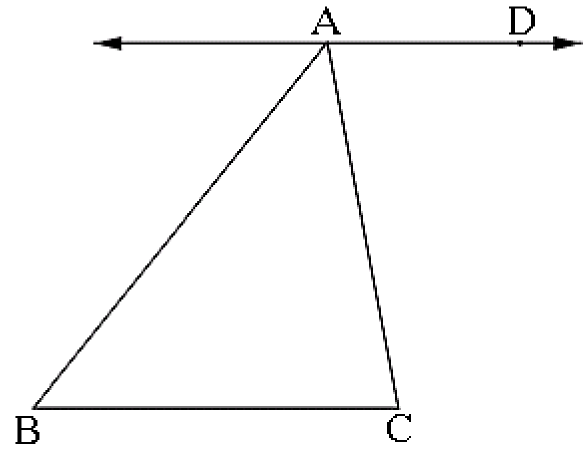


5) आता आकृतीत मिळालेल्या आंतरकोनांची जोडी कोणती?

उत्तर: ∠DAB व ∠ABC

6) $\angle DAB$ चे माप कोणत्या दोन कोनांच्या बेरजेने मिळेल?

उत्तर:m$\angle DAC + m\angle CAB = m\angle DAB$



7) याचे कारण काय?

उत्तर: कारण C बिंदू $\angle DAB$ च्या आंतरभागात आहे.

8) $\angle DAC$ व $\angle CAB$ पैकी कोणता कोन ΔABC चा आंतरकोन नाही?

उत्तर: $\angle \boldsymbol{DAC}$ हा $\Delta \boldsymbol{ABC}$ चा आंतरकोन नाही.

9) आकृतीमध्ये, आपण केलेल्या रचनेचा उपयोग करून $\angle DAC$ शी एकरूप कोन शोधा व कारणही ठरवा.

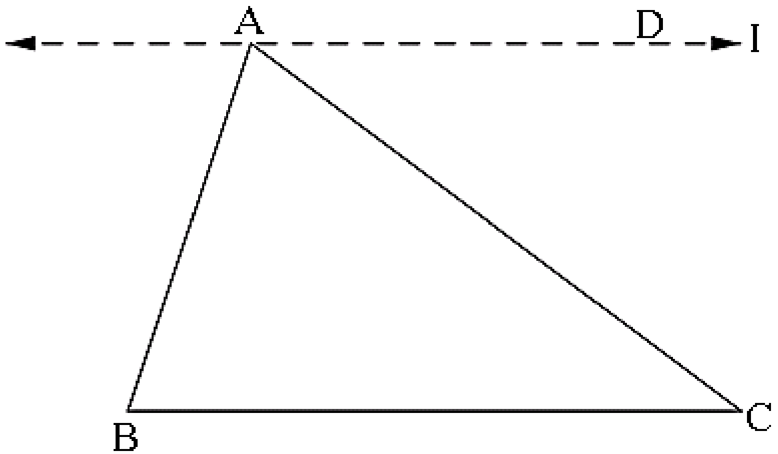
उत्तर: रेषा l ∥ बाजू BC … … (रचना)

∴ ∠DAC व ∠ACB हे त्यांना रेख AC ने छेदल्यामुळे तयार झालेले व्युत्क्रम कोन आहेत

∴ ∠DAC ≅ ∠ACB

आता या विश्लेषणाचा उपयोग करून पुढील सिद्धता रिकाम्या जागा भरून पूर्ण करा.

प्रमेयाची सिद्धता:



पक्ष: ΔABC हा कोणताही त्रिकोण आहे.

साध्य: $m\angle ABC + m\angle BCA + m\angle CAB = \mathbf{180^0}$

रचना: बिंदू A मधून जाणारी रेषा l अशी काढू की, रेषा l ∥रेख BCव तिच्यावर आकृतीत दाखविल्यानुसार D बिंदू घेऊ.

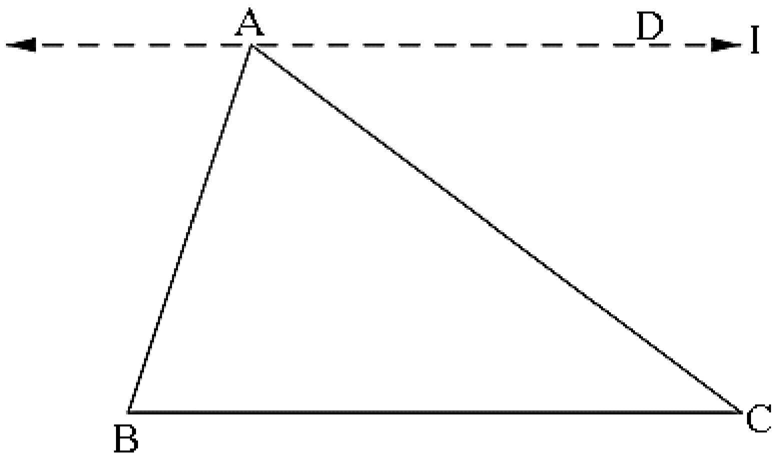
खालील सिद्धता पूर्ण करण्यासाठी रिकाम्या जागा भरा.

सिद्धता: 1)रेषा l ∥रेख BC आणि AC ही छेदिका आहे. (रचना)

$\therefore \angle \boldsymbol{DAC} \cong \angle$ ... ... (व्युत्क्रम कोन कसोटीचा व्यत्यास)

2)रेषा l ∥रेख BC आणि AB ही छेदिका आहे.

$\therefore \angle ABC$ + ∠DAB = ... (आंतरकोन कसोटीचा व्यत्यास)



3) $m\angle DAB = m\angle \dots\dots + m\angle \dots\dots..$ (कोनांच्या बेरजेचे गृहितक)

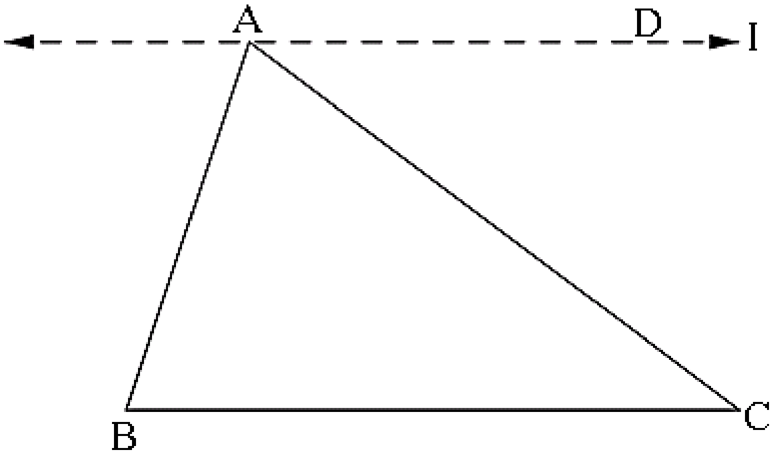
4) $m\angle$ABC + $(m\angle \dots\dots + m\angle \dots..) = \dots\dots\dots$ (विधान 1,2 व 3 वरून)

$\therefore m\angle$ABC + $m\angle \dots\dots..$ + $m\angle \dots\dots\dots. = \dots\dots\dots.$(विधान (I) वरून, $\angle \dots\dots \cong \angle \dots\dots$)

$\therefore m\angle$ABC + $m\angle BAC$ + $m\angle BCA = \dots\dots..$

निष्कर्ष:- एकाच त्रिकोणाच्या तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज ………… असते.

उत्तर:



पक्ष: ΔABC हा कोणताही त्रिकोण आहे.

साध्य: $m\angle ABC + m\angle BCA + m\angle CAB = \mathbf{180^0}$

रचना: बिंदू A मधून जाणारी रेषा l अशी काढू की,
रेषा l ‖रेख BC व तिच्यावर आकृतीत
दाखविल्यानुसार D बिंदू घेऊ.

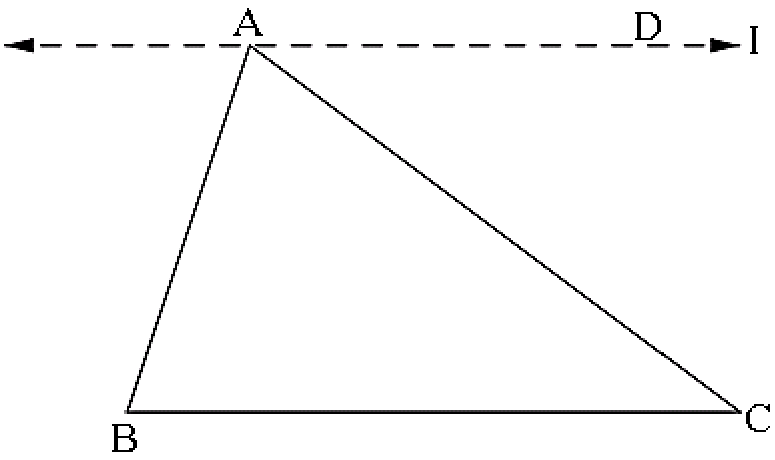
सिद्धता:

1)रेषा l ‖रेख BC आणि AC ही छेदिका आहे. (रचना)

$\therefore \angle DAC \cong \angle \boldsymbol{BCA}$ (व्युत्क्रम कोन कसोटीचा व्यत्यास)

2)रेषा l ‖रेख BC आणि AB ही छेदिका आहे.

$\therefore \angle ABC + \angle DAB = \mathbf{180^0}$ …….(आंतरकोन कसोटीचा व्यत्यास)



3) $m\angle DAB = m\angle DAC + m\angle BAC$ (कोनांच्या बेरजेचे गृहितक)

4) $m\angle ABC + (m\angle DAC + m\angle BAC) = 180$ (विधान 1,2 व 3 वरून)

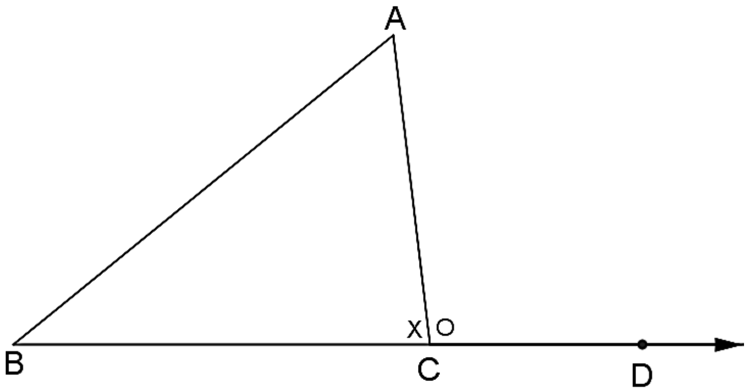
$\therefore m\angle ABC + m\angle BCA + m\angle BAC = 180$ (विधान (I) वरून, $\angle DAC \cong \angle \boldsymbol{BCA}$)

$\therefore m\angle ABC + m\angle BCA + m\angle BAC = 180$

निष्कर्ष:- एकाच त्रिकोणाच्या तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज 180 ◦ असते.

त्रिकोणाचा बाह्यकोनव त्याचे दूरस्थ आंतरकोन:

सोबतच्या आकृतीमध्ये, ∠BAC, ∠BCA, ∠CBA



ΔABCचे आंतरकोन आहेत.

∠ACD हा ∠BCA या आंतरकोनाशी रेषीय जोडी करतो.

व्याख्या: त्रिकोणाच्या आंतरकोनाशी रेषीय जोडी तयार करणाऱ्या कोनाला त्रिकोणाचा बाह्यकोन म्हणतात.

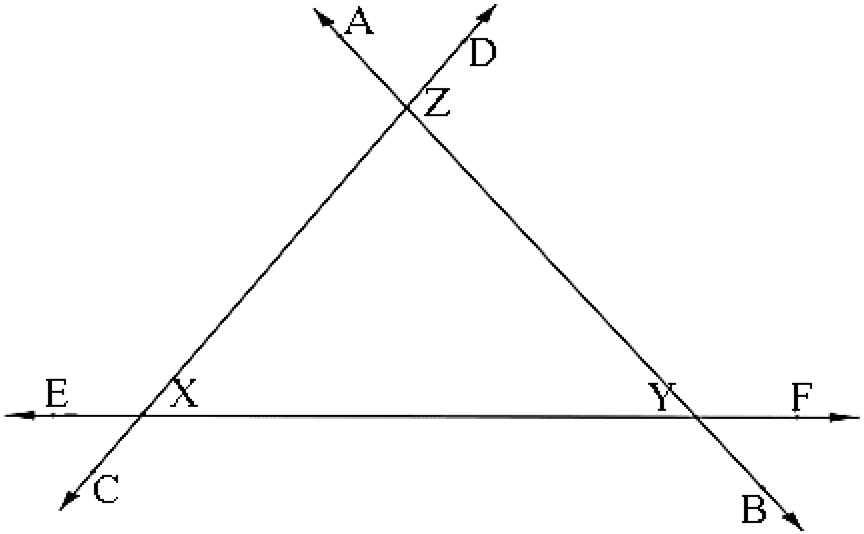
वरील आकृतीत, ∠ACD हा ΔABC चा बाह्यकोन आहे.

ΔABC चे $\angle ABC$ व $\angle CAB$ हे ∠ACD ह्या बाह्यकोनाशी **संलग्न कोन** नाहीत.

∴ $\angle ABC$ व $\angle CAB$ यांना ∠ACD चे **दूरस्थ आंतरकोन म्हणतात.**

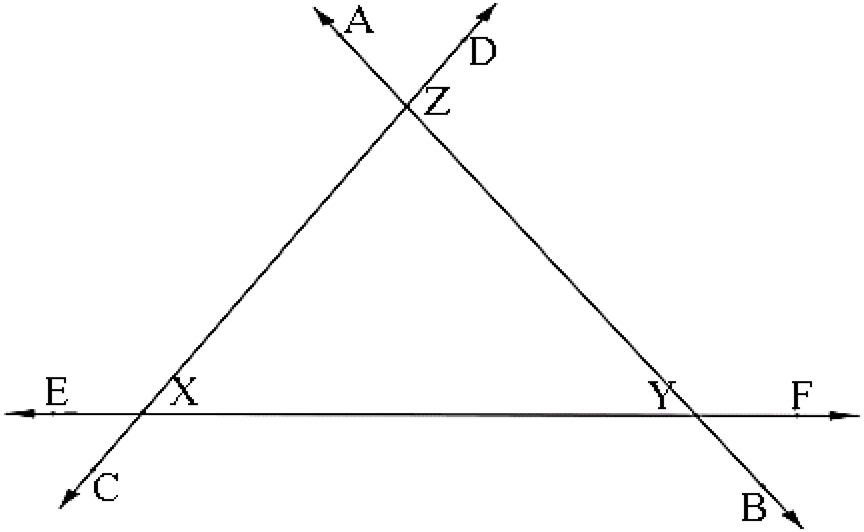
उदाहरण: खालील आकृतीचे निरीक्षण करा व खालील सारणी पूर्ण करा.

T2_L7_A1



ΔXYZ चे बाह्यकोन	त्या बाह्यकोनाचे दूरस्थ आंतरकोन
1) X बिंदूपाशी झालेले बाह्यकोन = ∠ZXE व ∠YXC	∠XZYव ∠XYZ
2) Yबिंदूपाशी झालेले बाह्यकोन = ……. व ……..	………व……..
3) Z बिंदूपाशी झालेले बाह्यकोन = …….. व …….	………व……..

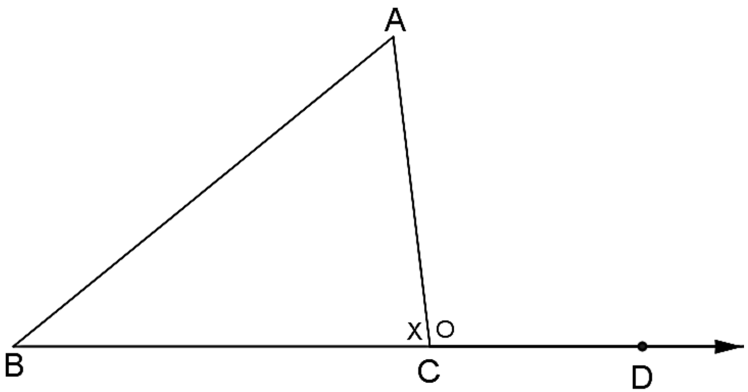
उत्तर:-



ΔXYZ चे बाह्यकोन	त्या बाह्यकोनाचेदूरस्थ आंतरकोन
1) X बिंदू पाशी झालेले बाह्यकोन = $\angle ZXE$ व $\angle YXC$	$\angle XZY$व $\angle XYZ$
2) Yबिंदू पाशी झालेले बाह्यकोन = $\angle ZYF$ व $\angle XYB$	$\angle YXZ$ व $\angle YZX$
3) Z बिंदू पाशी झालेले बाह्यकोन = $\angle DZY$ व ∠XZA	$\angle XYZ$ व ∠YXZ

दूरस्थ आंतरकोनाचे प्रमेय:

खालील आकृती बघून रिकाम्या जागा पूर्ण करा.



पक्ष: ΔABC हा कोणताही त्रिकोण असून

∠ACD हा त्याचा बाह्यकोन आहे.

∠BAC व ∠ABC हे त्याचे दूरस्थ आंतरकोन आहेत.

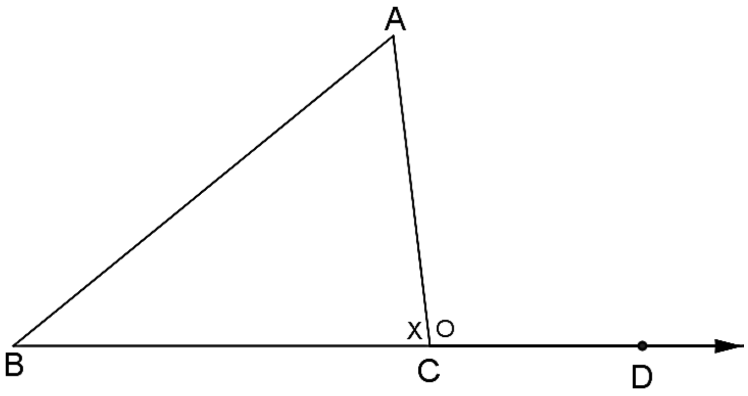
साध्य: $m\angle ACD = m\angle BAC + m\angle ABC$

सिद्धता:

1) दिलेल्या आकृतीत,……….हा ΔABC चा बाह्यकोन आहे.

∠ … … …. . व ∠………. हे ∠ ACD चे दूरस्थ आंतरकोन आहेत.

2) त्रिकोणाचा बाह्यकोन, त्रिकोणाच्या आंतरकोनाशी रेषीय जोडी करतो.



∴ m∠ACB + m∠ACD= ….. (…..गृहितक)

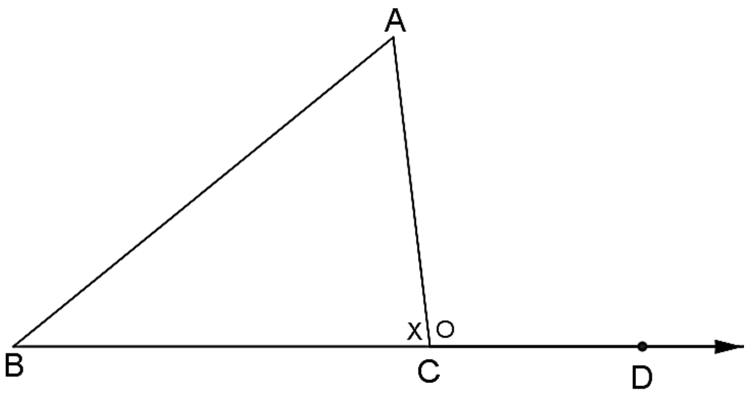
3)m∠BCA + m∠BAC + m∠ABC = … … . . (त्रिकोणाच्या तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज………असते.)

4) ∴ m∠ACB+ m∠ACD= m∠ ……+m∠ ……+m∠…. (विधान (1),(2) व (3) वरून)

∴ m∠ACD = ………… + ………. (दोन्ही बाजूंतून m∠ACB वजा करून)

निष्कर्ष:त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे माप त्याच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या मापांच्या ……..असते.

T2_L7_A2



पक्ष: ΔABC हा कोणताही त्रिकोण असून

∠ACD हा त्याचा बाह्यकोन आहे.

∠BAC व ∠ABC हे त्याचे दूरस्थ आंतरकोन आहेत.

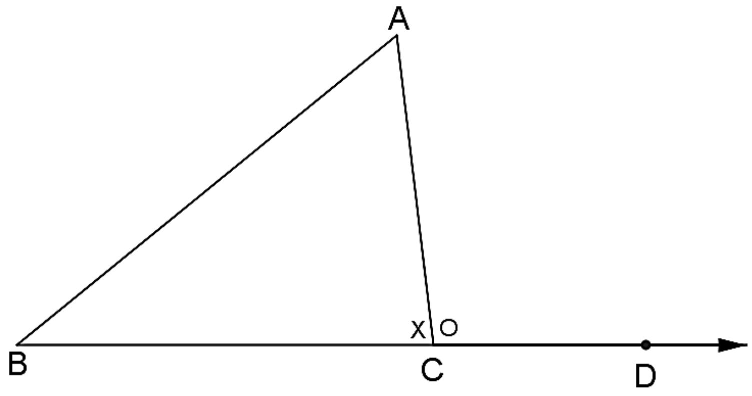
साध्य: m$\angle ACD$= m$\angle BAC$+ m$\angle ABC$

सिद्धता:

1) दिलेल्या आकृतीत,……….हा ΔABC चा बाह्यकोन आहे.

∠ … … …. . व ∠………. हे ∠ ACD चे दूरस्थ आंतरकोन आहेत.

2) त्रिकोणाचा बाह्यकोन, त्रिकोणाच्या आंतरकोनाशी रेषीय जोडी करतो.



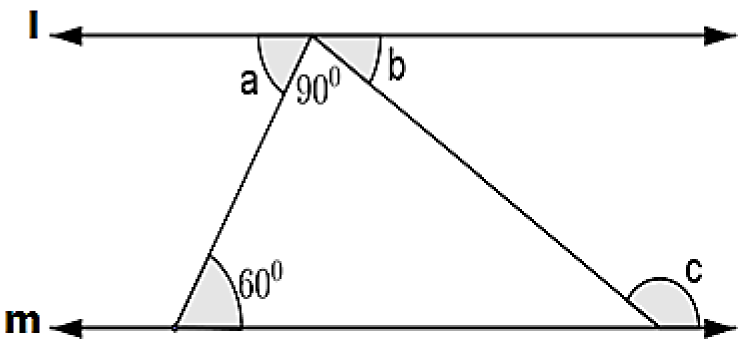
$\therefore$ m∠ACB + m∠ACD= 180(रेषीय जोडीतील कोनांचे गृहितक)

3)m∠ACB+ m∠BAC + m∠ABC =180(त्रिकोणाच्या तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज180 असते.)

4) $\therefore$ m∠ACB+ m∠ACD=m∠ACB + m∠BAC + m∠ABC(विधान (1),(2) व (3) वरून)

$\therefore$ m∠ACD = m∠BAC + m∠ABC(दोन्ही बाजूंतून m∠ACB वजा करून)

निष्कर्ष:त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे माप त्याच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या मापांच्या बेरजेइतके असते.



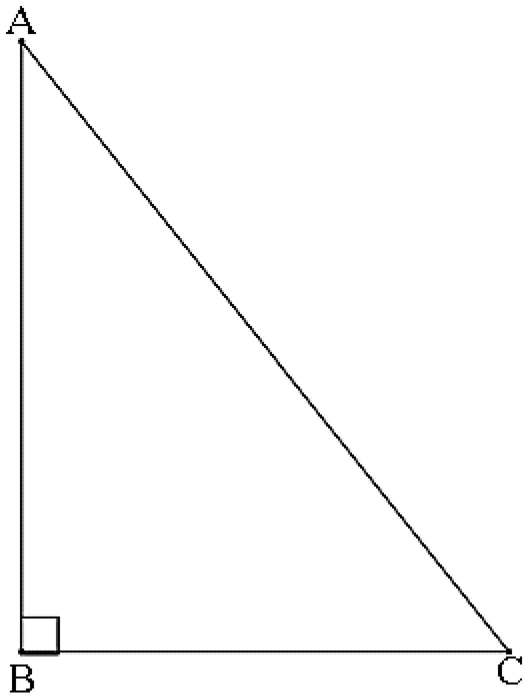
शेजारील आकृतीत, रेषा l ‖ रेषा m आहे.कोनांची मापे दिलेल्याप्रमाणे आहेत. त्यावरून a,b व c च्या किंमती काढा.

खालील वेब-साईटवर छान खेळ तुम्हाला सापडतील.
लगेच इंटारनेटवरून मिळवा व खेळातून शिकण्याचा आनंद मिळवा.

http://www.what2learn.com/home/examgames/maths/angles1/

www.transum.org/software/sw/starter_of_the_day/students/AnglesInTriangle/Quiz.asp

काही उपप्रमेये



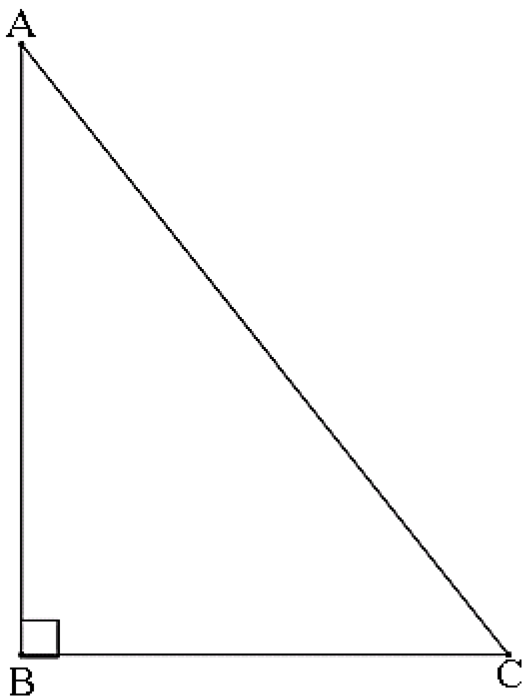
प्रश्न : एका त्रिकोणात दोन काटकोन असतील का?

पक्ष: ΔABC हा काटकोन त्रिकोण आहे.$m\angle ABC = 90^0$

साध्य: ΔABCमध्ये $\angle ABC$ खेरीज आणखी एकही कोन काटकोन नाही.

(येथे अप्रत्यक्ष सिद्धतेची रीत वापरू या. म्हणून जे साध्य आहे ते सत्य नाही असे मानू.)

सिद्धता: $\therefore$ ΔABC मध्ये, $\angle ABC$खेरीज आणखी एक कोन $\angle ACB = 90^0$ आहे असे मानू.......(I)



$\therefore \Delta ABC$ मध्ये,

$m\angle ABC + m\angle ACB + m\angle BAC = 180^0$

$\therefore 90^0 + 90^0 + m\angle BAC = 180^0$

$\therefore 180^0 + m\angle BAC = 180^0$

$\therefore m\angle BAC = 180^0 - 180^0$

$\therefore m\angle BAC = 0$

परंतु हे विधान विसंगत आहे कारण त्रिकोणाच्या कोणत्याही कोनाचे माप 0^0नसते.

$\therefore$ आपण मानलेले विधान (I) असत्य असले पाहिजे.

$\therefore \Delta ABC$ मध्ये $\angle ABC$ खेरीज एकापेक्षा अधिक कोन काटकोन असणार नाहीत.

निष्कर्ष: एका त्रिकोणात एकच काटकोन त्रिकोण असतो.

प्रश्न:- जर एखाद्या त्रिकोणात दोन कोनांची बेरीज तिसऱ्या कोनाच्या मापाएवढी असेल तर तो कोणत्या प्रकारचा त्रिकोण असतो?

पक्ष:- ΔABC हा असा त्रिकोण आहे की,

m$\angle BAC$ =m$\angle ACB + m\angle CBA$

साध्य: - ΔABC मध्ये, m$\angle BAC = 90^0$

सिद्धता:- त्रिकोणाच्या तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0असते…..(प्रमेय)

$\therefore$ ΔABC, मध्ये m$\angle BAC$ + (m$\angle ACB + m\angle CBA$)= 180^0

$\therefore$m$\angle BAC$ + m$\angle BAC$ = 180^0 (पक्षानुसार, m$\angle BAC$= m$\angle ACB + m\angle CBA$घालून)

$\therefore$2(m$\angle BAC$) =180^0

$\therefore$m$\angle BAC$=$\frac{180}{2}$

$\therefore$m$\angle BAC$= 90^0

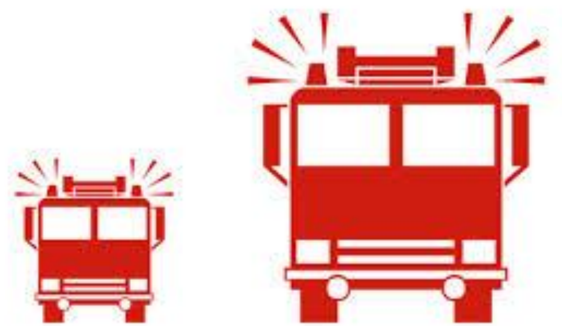
म्हणजे ΔABC हा काटकोन त्रिकोण असून $m\angle BAC = 90^0$

निष्कर्ष:

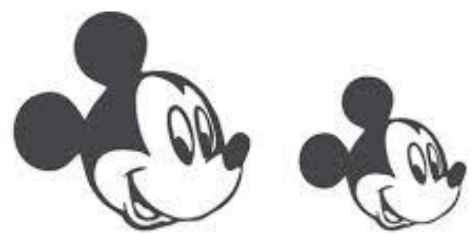
जर त्रिकोणात दोन कोनांच्या मापांची बेरीज तिसऱ्या कोनाच्या मापाएवढी असेल तर तो काटकोन त्रिकोण असतो.

समरूपता:

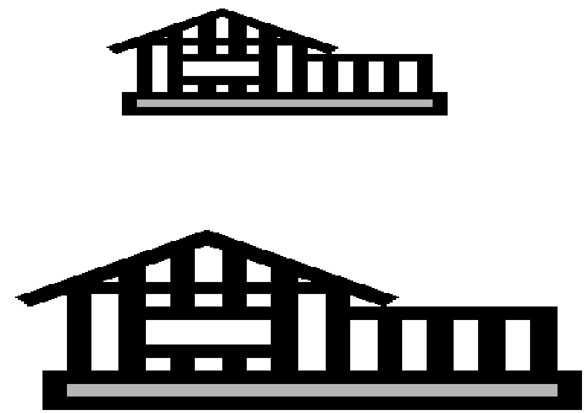
खालील प्रत्येक जोडीतील चित्रे पाहून त्यांचा **आकार (shape)** व **आकारमान (size)** यांबाबत तुमचे निरीक्षण नोंदवा.



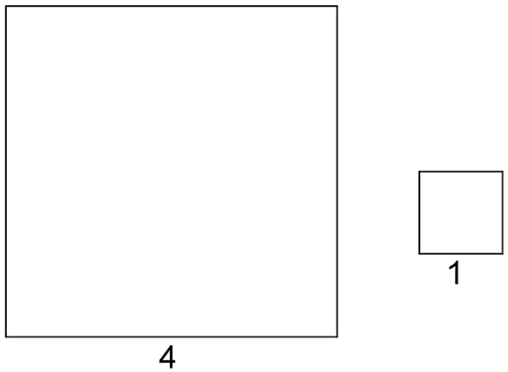
(1)



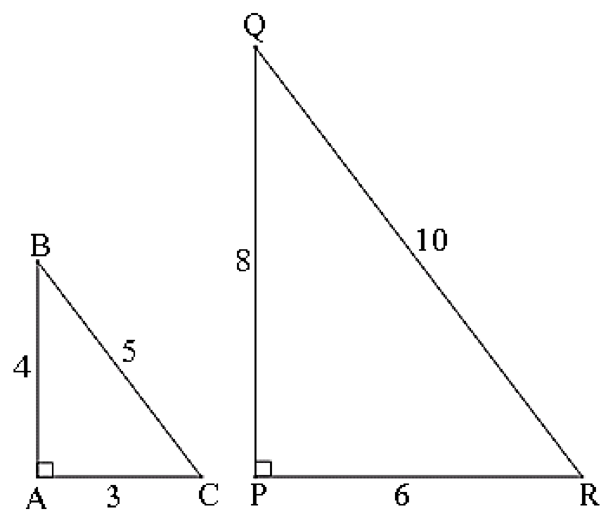
(2)



(3)



(4)



(5)

आकृत्यांमधील समरूपता:

या प्रत्येक जोडीतील **आकृत्यांचा आकार (shape)सारखा** आहे पण आकारमान (sizes) भिन्न आहे.

अशा आकृत्यांना भूमितीत समरूप आकृत्या म्हणतात. माणूस व त्याचा फोटो या समरूप आकृत्या असतात.

विचार करा:

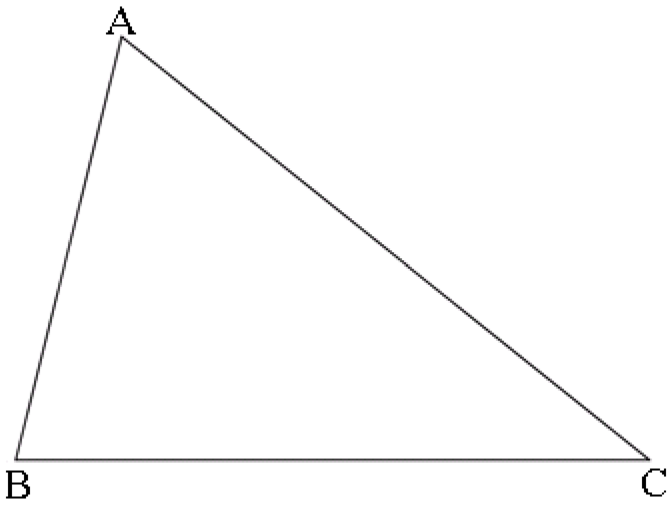
1) कोणताही देश आणि त्याचा तुमच्या भूगोलाच्या पुस्तकातील नकाशा या समरूप आकृत्या असतात का?
2) प्रत्येक त्रिकोण स्वत: शी समरूप असतो का?
3) कोणतीही दोन वर्तुळे, कोणते ही दोन चौरस समरूप असतात. यावरून कोणत्या प्रकारचे दोन त्रिकोण समरूप असतातच?

एकास एक संगती:

जर एखाद्या सिनेमागृहाबाहेर house full चा बोर्ड लागला असेल तर त्याचा अर्थ असतो की, आतमध्ये प्रत्येक खुर्चीवर एक प्रेक्षक असतो तसेच प्रत्येक प्रेक्षकासाठी एक खुर्ची असते. याला गणितामध्ये काय म्हणतात?

उत्तर: सिनेमागृहातील प्रेक्षकांचा संच व खुर्च्यांचा संच यात एकास एक संगती निर्माण झाली आहे असे म्हणतात.

समजा,∆ ABC व ∆ PQR हे कोणतेही दोन त्रिकोणआहेत.



∆ ABC व ∆ PQR यांच्या शिरोबिंदूंमध्ये सहा एकास एक संगती लावता येतात.

ABC ↔ PQR ही एकास एक संगती लावली असेल तर त्याचा अर्थ आपण

A या शिरोबिंदूची P या शिरोबिंदूशी,

Bया शिरोबिंदूची Q या शिरोबिंदूशी

C या शिरोबिंदूची R याशिरोबिंदूशी जोडी लावली असा आहे.

दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंच्या एखाद्या एकास एक संगतीमुळे त्यांच्या कोनांमध्ये व बाजूंमध्येही एकास एक संगती निर्माण होते.

एकासएक संगतीनुसार संगत घटक

जर त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंची संगती $ABC \leftrightarrow PQR$ अशी असल्यास त्यांच्या संगत कोनांच्या व बाजूंच्या जोड्या खालील प्रकारे असतात.

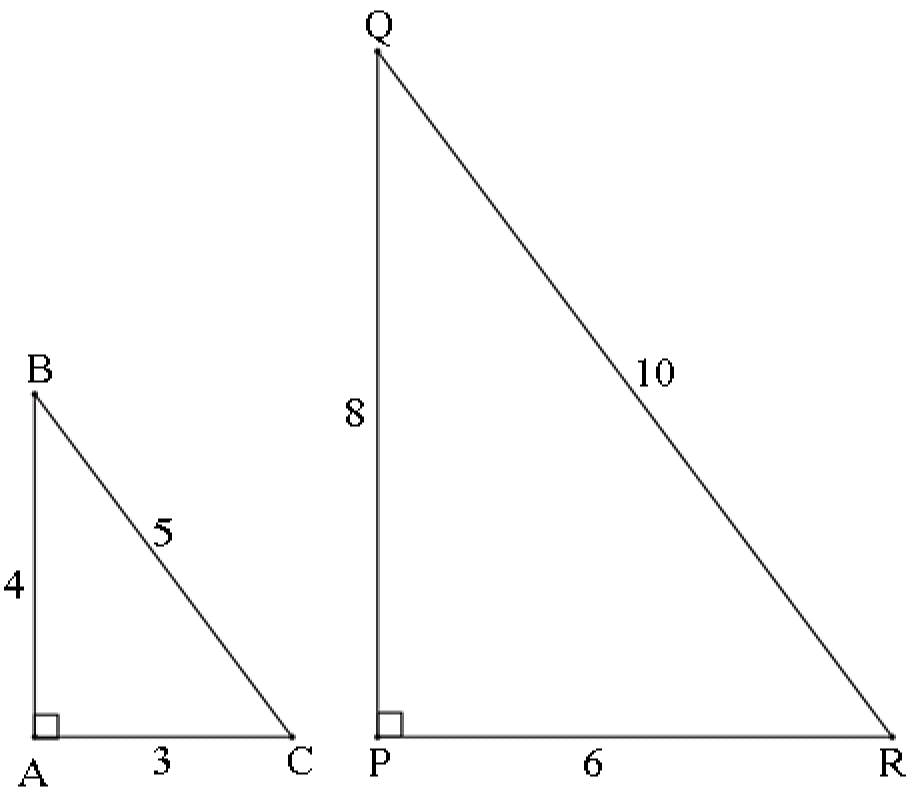
संगत शिरोबिंदू	संगत कोन	संगत बाजू
$A \leftrightarrow P$	$\angle A \leftrightarrow \angle P$	बाजू AB $\leftrightarrow$ बाजू PQ
$B \leftrightarrow Q$	$\angle B \leftrightarrow \angle Q$	बाजू BC $\leftrightarrow$ बाजू QR
$C \leftrightarrow R$	$\angle C \leftrightarrow \angle R$	बाजू AC $\leftrightarrow$ बाजू PR

वरील तक्त्यातील संगत शिरोबिंदू, संगत कोन व संगत बाजू यांना त्या त्रिकोणांचे **संगत घटक** म्हणतात.

T2_L9_A3

आता पुढील आकृत्यांचे निरीक्षण करा.

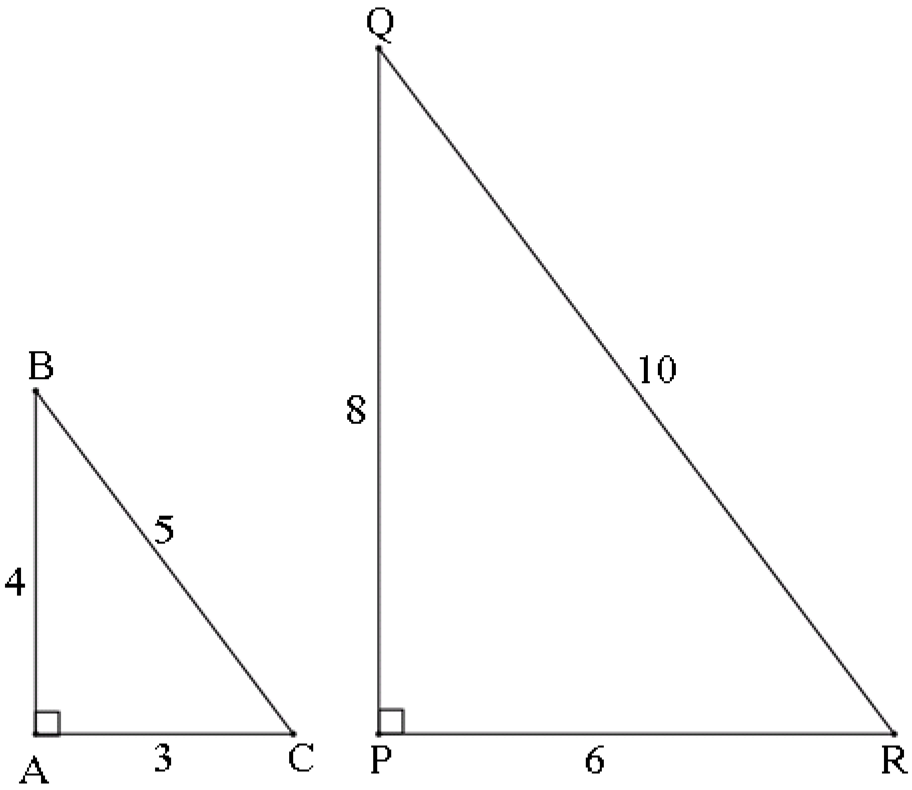
A B C ↔ P Q R या संगतीत असताना दोन्ही त्रिकोणांच्या संगत बाजू व संगत कोनांच्या जोड्या लिहा.



T2_L9_A3

उत्तर: $ABC \leftrightarrow PQR$ या एकास एक संगतीत,

संगत बाजू	संगत कोन
बाजू $AB \leftrightarrow$ बाजू PQ	$\angle A \leftrightarrow \angle P$
बाजू $BC \leftrightarrow$ बाजू QR	$\angle B \leftrightarrow \angle Q$
बाजू $AC \leftrightarrow$ बाजू PR	$\angle C \leftrightarrow \angle R$



पुढील रिकाम्या जागा पूर्ण करा.

$\frac{AB}{PQ}$ = ...(I)

$\frac{AC}{PQ}$ = ... (II)

$\frac{BC}{QR}$ = ...(III)

या तीन गुणोत्तरांच्या किंमतींबद्दलचे तुमचे निरीक्षण काय आहे?

T2_L9_A3

उत्तर:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{4}{8} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \ldots\ldots \text{(I)}$$

$$\frac{AC}{PQ} = \frac{3}{6} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \ldots\ldots \text{(II)}$$

$$\frac{BC}{QR} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \ldots\ldots \text{(III)}$$

निष्कर्ष:

त्यांच्या संगत बाजूंची सर्व गुणोत्तरे समान आहेत म्हणजेच त्या प्रमाणात आहेत.

त्रिकोणांच्या समरूपतेची व्याख्या:

जर दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूतील एखाद्या एकास एक संगतीत

i) संगत बाजू प्रमाणात असतील आणि

ii) संगत कोन एकरूप असतील

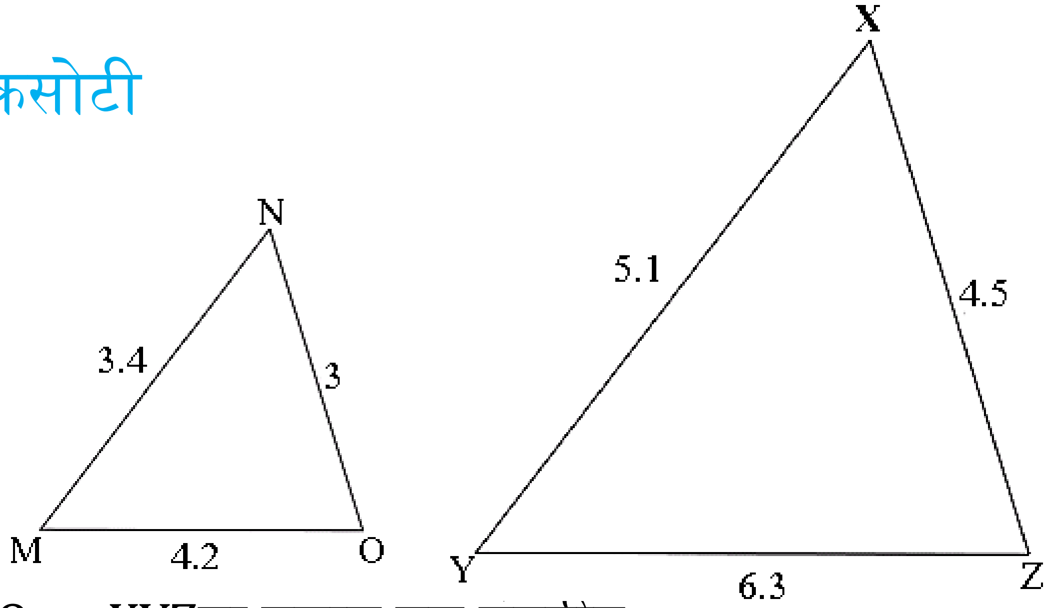
तर ते त्रिकोण परस्परांशी त्या संगतीत समरूप आहेत असे म्हणतात.

दोन त्रिकोण समरूप असण्यासाठी त्याच्या तिन्ही बाजू प्रमाणात असणे आणि तिन्ही संगत कोन एकरूप असणे आवश्यक असते. परंतु या सहा अटींपैकी तीन विशिष्ट अटींची पूर्तता झाल्यास उरलेल्या तीन अटींची पूर्तता होते, म्हणून ते दोन त्रिकोण समरूप आहेत का हे ठरवण्यासाठी त्या विशिष्ट पुरेशा अटी त्या त्रिकोणांच्या बाजू व कोनांनी पूर्ण केल्या आहेत किंवा नाही ते पहावे लागते.

या पुरेशा अटी म्हणजेच त्रिकोण समरूपतेची कसोटी होय.

त्रिकोण समरूपतेच्या कसोट्या:

1) बा-बा-बा समरूपता कसोटी

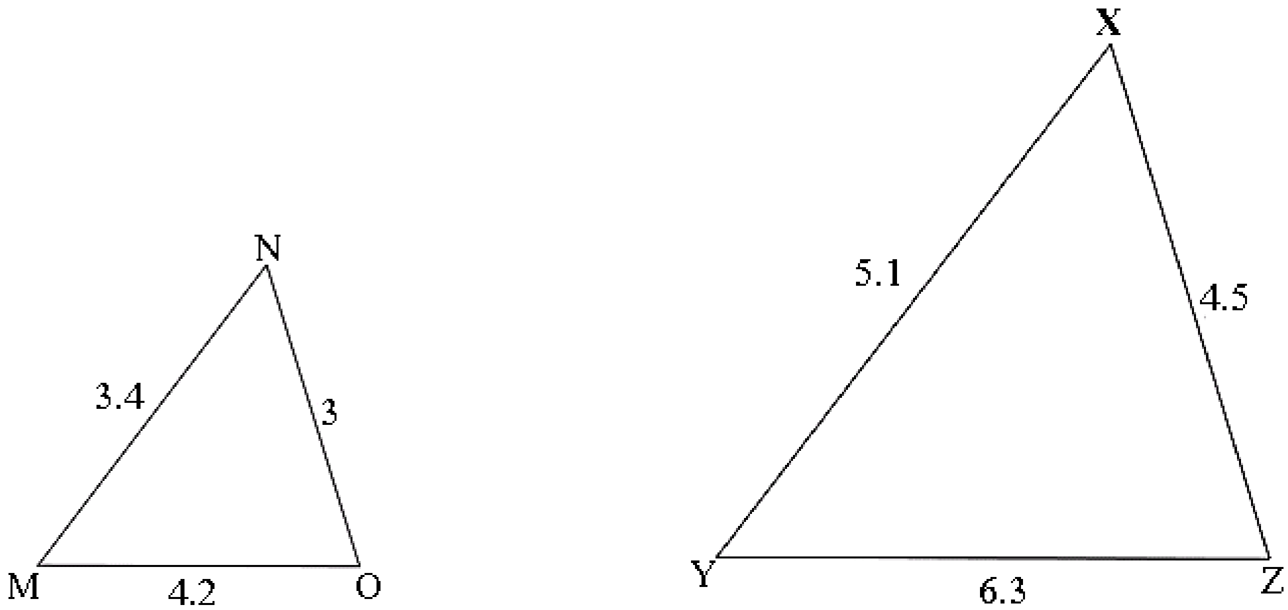


ΔMNO व ΔXYZ मध्ये, MNO ↔ XYZ या एकास एक संगतीत,

i) $\frac{MN}{XY} = \frac{3.4}{5.1} = \frac{2}{3}$

ii) $\frac{NO}{XZ} = \frac{3}{4.5} = \frac{2}{3}$

iii) $\frac{MO}{YZ} = \frac{4.2}{6.3} = \frac{2}{3}$



विधान (i), (ii) व (iii) वरून,

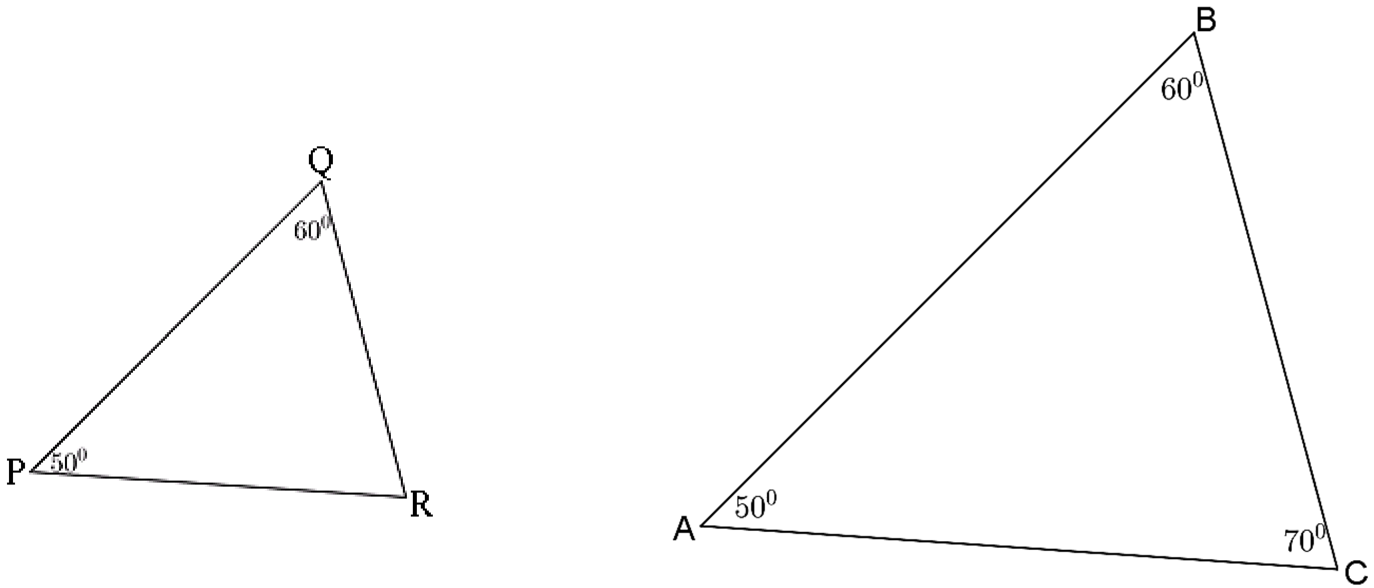
ΔMNO व ΔXYZ या दोन्ही त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंच्या दिलेल्या एकास एक संगतीनुसार त्यांच्या तिन्ही **संगत बाजू प्रमाणात** आहेत.

त्यामुळे त्यांचे संगत कोन एकरूप असतात.

($\therefore \angle MNO \cong \angle YXZ, \angle NMO \cong \angle XYZ, \angle MON \cong \angle YZX$.) ही नवीन माहिती कळतेव व्याख्येतील सर्व अटी पूर्ण होतात.

$\therefore$ **बा-बा-बा समरूपता** कसोटीनुसार, $\Delta MNO \sim \Delta YXZ$

2) को-को-को समरूपता कसोटी

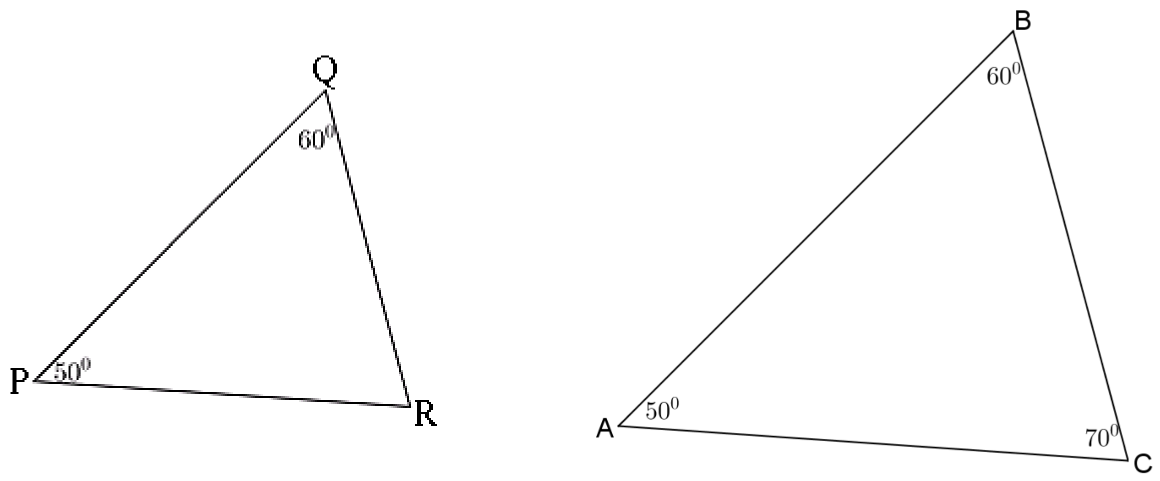


ΔPQR व ΔABC मध्ये, $PQR \leftrightarrow ABC$ या एकास एक संगतीत,

i) $m\angle QPR = m\angle BAC = 50^0$, $\therefore \angle QPR \cong \angle BAC$

ii) $m\angle PRQ = m\angle ACB = 70^0$, $\therefore \angle PRQ \cong \angle ACB$

iii) $m\angle RQP = m\angle CBA = 60^0$, $\therefore \angle RQP \cong \angle CBA$

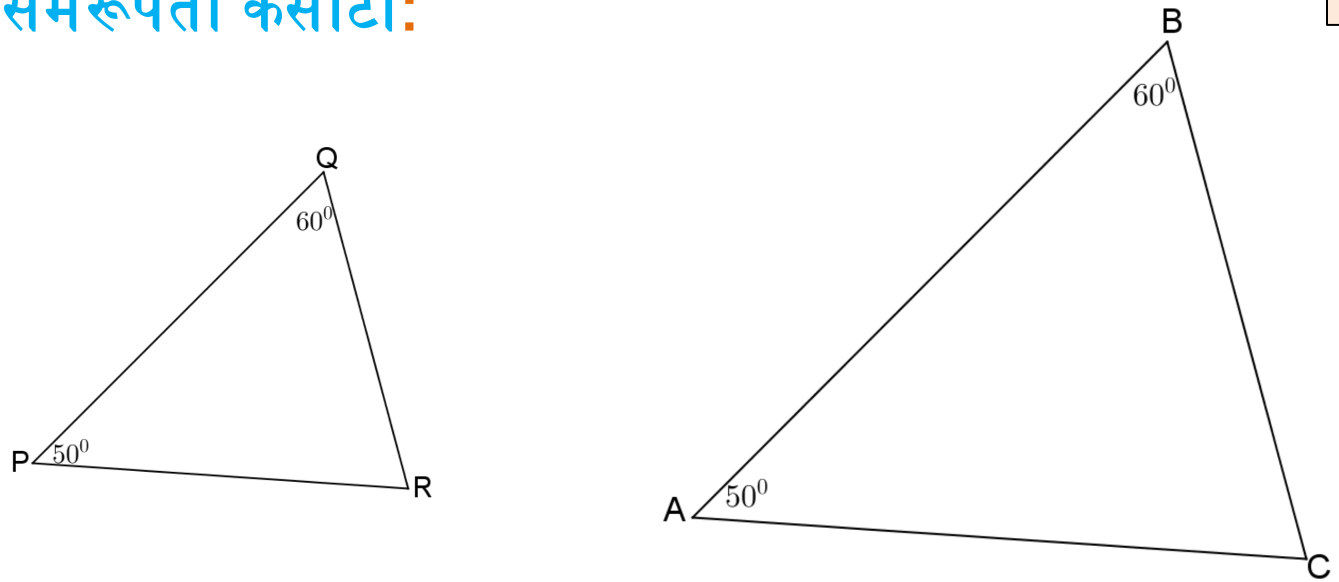


विधान (i) , (ii) व (iii) वरून,

ΔPQR व ΔABC या दोन्ही त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमधीलPQR ↔ ABC या एकास एक संगतीत ΔPQR या त्रिकोणाचे तीन कोन ΔABC च्या तीन संगत कोनांशी एकरूप आहेत.

त्यामुळे त्यांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात. $\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA}$ही नवीन माहिती कळते. व्याख्येतील सर्व अटी पूर्ण होतात म्हणून समरूपतेच्या व्याख्येनुसार ते त्रिकोण समरूप आहेत. ∴को-को-को समरूपता कसोटीनुसार, ΔPQR ~ΔABC

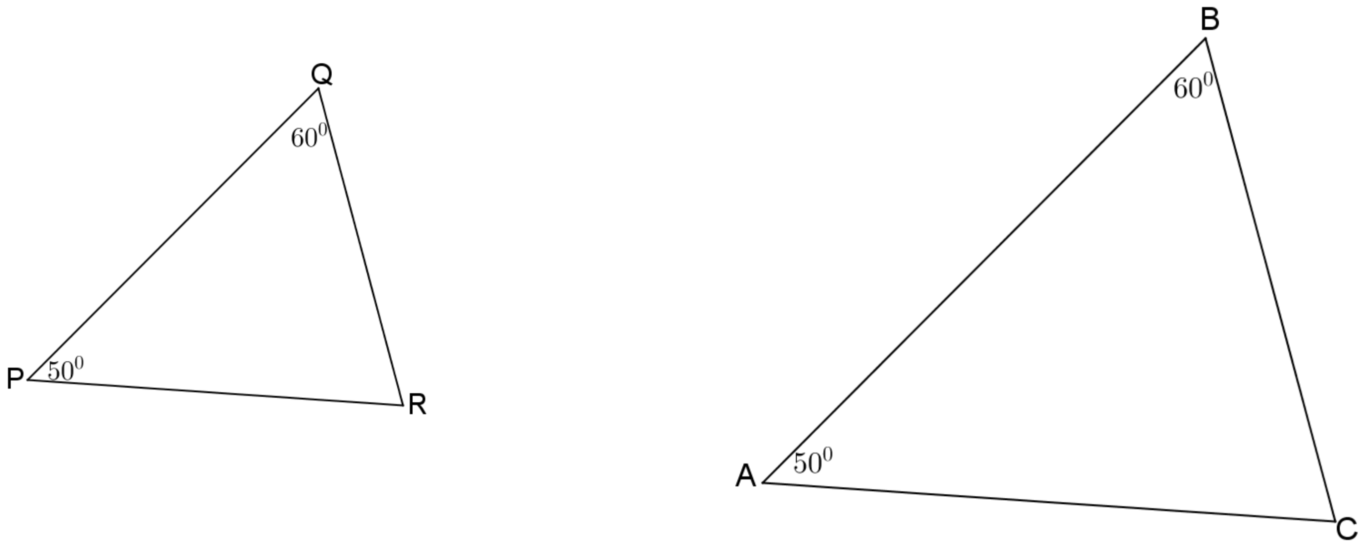
3) को-को समरूपता कसोटी:



ΔPQR व ΔABC मध्ये, $PQR \leftrightarrow ABC$ या एकास एक संगतीत ,

$$i)\ m\angle PQR = m\angle ABC = 60^0 \quad \therefore \angle PQR \cong \angle ABC$$

ii) $m\angle QPR = m\angle BAC = 50^0 \quad \therefore \angle QPR \cong \angle BAC$

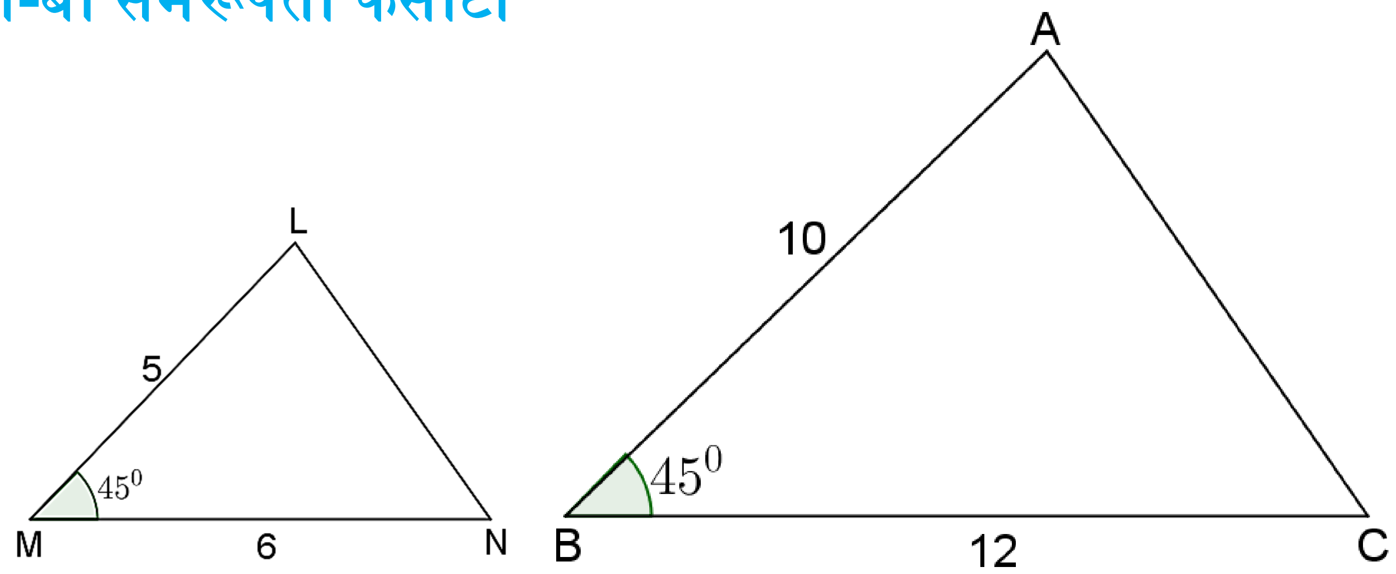


ΔPQR व ΔABC या दोन्ही त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूमधील दिलेल्या एकास एक संगतीत ΔPQR या त्रिकोणाचे दोन कोन ΔABC च्या दोन संगत कोनांशी एकरूप आहेत. म्हणून संगत कोनांची तिसरी जोडीसुद्धा एकरूप असते.(ह्याचे कारण सोपे आहे.शोधा.)

म्हणून त्यांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात.$\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA}$

ही नवीन माहिती कळते. व्याख्येतील सर्व अटी पूर्ण होतात म्हणून व्याख्येनुसार ते त्रिकोण समरूप आहेत. ∴**को-को समरूपता** कसोटीनुसार, $\Delta PQR \sim \Delta ABC$

4) बा-को-बा समरूपता कसोटी

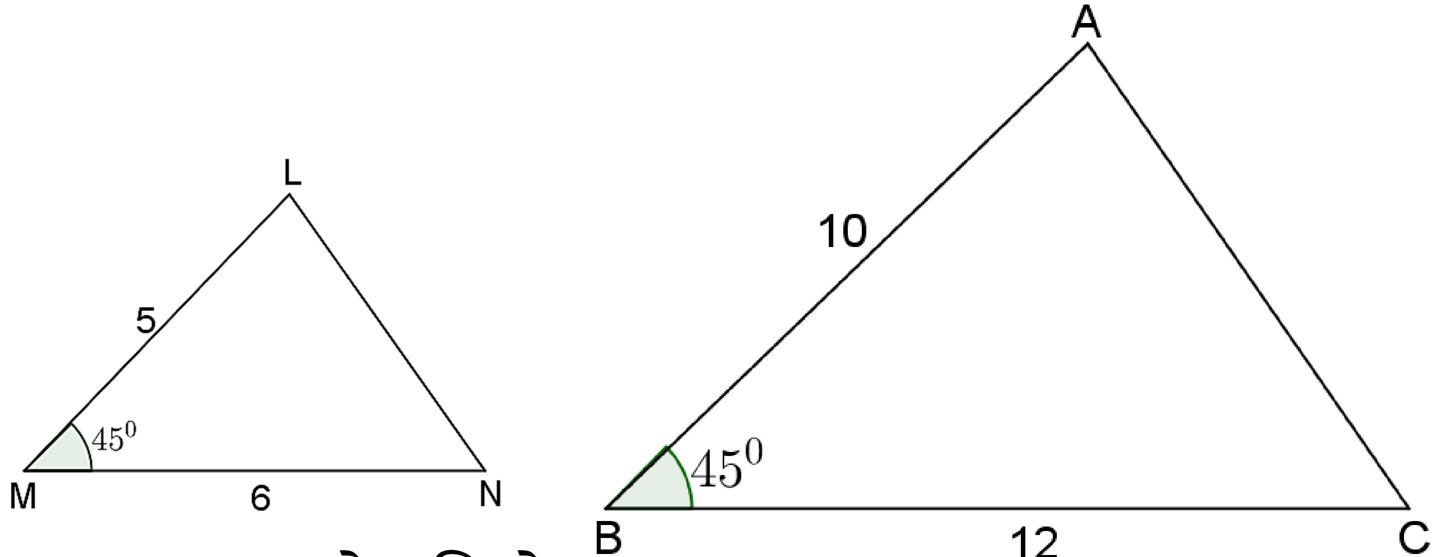


ΔLMN व ΔABC मध्ये, LMN ↔ ABC या एकास एक संगतीत,

i) $\frac{LM}{AB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

ii) $\frac{MN}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

iii) $m\angle LMN = m\angle ABC = 45^0 \therefore \angle LMN \cong \angle ABC$



ΔLMN व ΔABC या दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंच्या दिलेल्या एकास एक संगतीत ΔLMN त्रिकोणाच्या दोन बाजू व ΔABC त्रिकोणाच्या दोन संगत बाजू प्रमाणात असून त्या बाजूंनी समाविष्ट केलेला कोन एकरूप आहेत.

त्यामुळे ∠NLM ≅ ∠CAB, ∠LNM ≅ ∠ACB आणि $\frac{LN}{AC} = \frac{1}{2}$

ही नवीन माहिती कळते. त्यामुळे व्याख्येतील सर्व अटी पूर्ण होतात.

∴**बा- को- बा समरूपता** कसोटीनुसार, ΔLMN~ΔABC

त्रिकोणांच्या समरूपतेच्या कसोट्या:

1) **बा-बा-बा समरूपता कसोटी:**
दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमधील दिलेल्या एकास एक संगतीत जर एका त्रिकोणाच्या बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत बाजूंशी प्रमाणात असतील तर ते त्रिकोण समरूप असतात.

2) **को-को समरूपता कसोटी:**
दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमधील दिलेल्या एकास एक संगतीत जर एका त्रिकोणाचे दोन कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत कोनांशी एकरूप असतील तर ते त्रिकोण समरूप असतात.

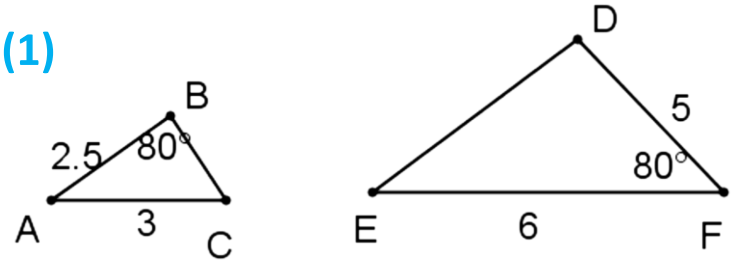
3) **बा-को-बा समरूपता कसोटी:**
दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमधील दिलेल्या एकास एक संगतीत जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू व दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत बाजू प्रमाणात असून त्या बाजूंनी समाविष्ट केलेले कोन जर एकरूप असतील तर ते त्रिकोण समरूप असतात.

Exercise:

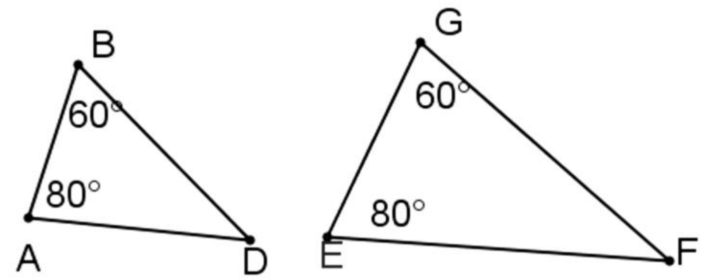
गट I) 2 गुणांचे प्रश्न:

1) त्रिकोणाच्या तीन कोनांची मापे 1: 2: 3 या प्रमाणात आहेत. त्या कोनांची मापे ठरवा. असा त्रिकोण तुमच्या कंपासपेटीत आहे का? त्याला कोनांवरून कोणते नाव दिले जाते?
2) समरूप त्रिकोणांच्या कसोटीत को-को-को कसोटी ऐवजी को-को कसोटी वापरणे योग्य होते याचे कारण शोधा.
3) खाली दिलेल्या त्रिकोणांच्या जोड्यातील त्रिकोण समरूप आहेत का? असल्यास कोणत्या कसोटीने व कोणत्या संगतीत?

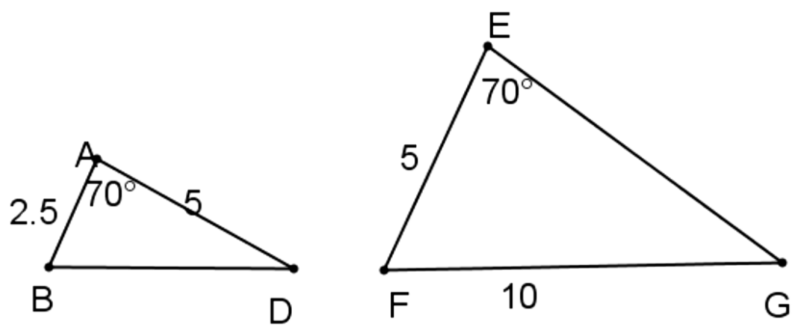
(1)



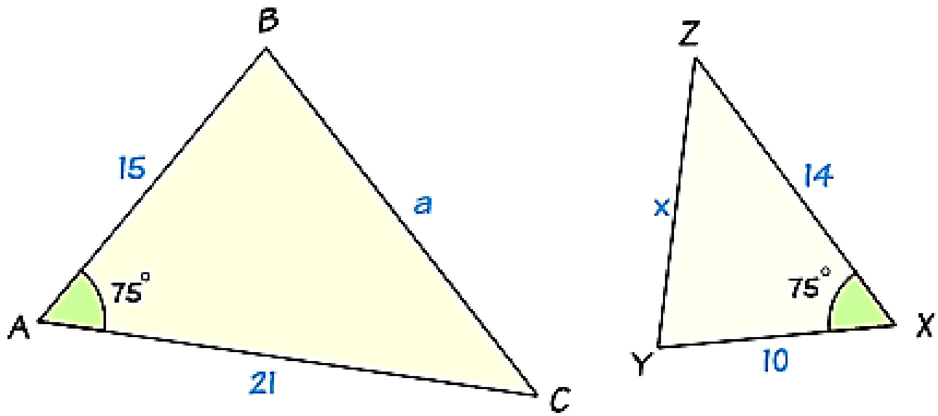
(2)



(3)



4) $\Delta BVG \sim \Delta MNL$ असून BVMN = 45, VG = 12, ML = 20 तर BG, MN, NL यांची लांबी ठरवा.



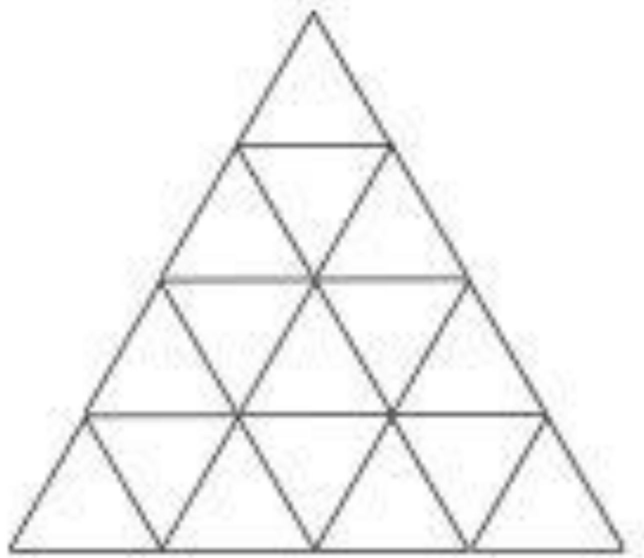
गट II) 3 गुणांचे प्रश्न:

1) खालील आकृती1 मध्ये एक समभुज त्रिकोण दाखवला आहे व त्याच्या शेजारील आकृती (2) मध्ये काही त्रिकोण आहेत.

त्यापैकी किती त्रिकोण आकृती 1 मधील समभुज त्रिकोणाशी समरूप आहेत?

(1)

(2)



T2_L11

2) a)बाजू 6 सेमी असलेला समभुज त्रिकोण, कंपास, पट्टी, पेन्सिल वापरून काढा. त्याच्या प्रत्येकबाजूचा लंबदुभाजक काढा. हे लंबदुभाजक त्याचे सेविअन्स आहेत का ते ठरवा.

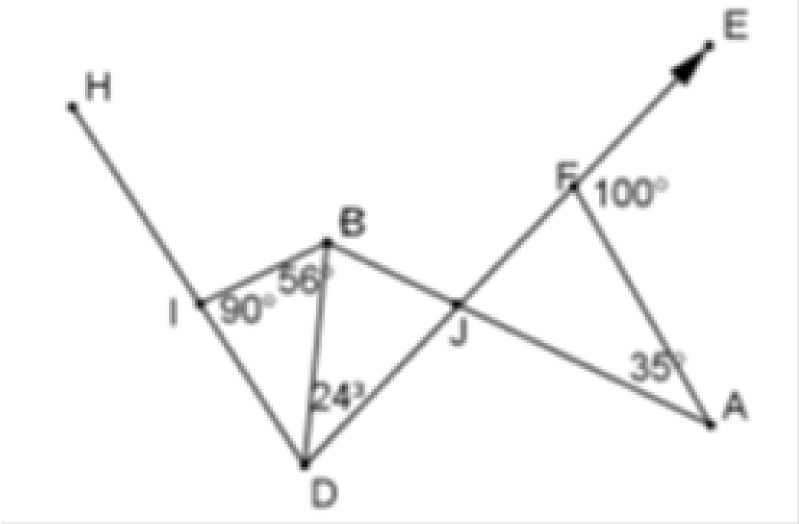
b)ΔPQR मध्ये, PQ = PR = 6 सेमी घ्या व QR = 8 सेमी घेऊन समद्विभुज त्रिकोणकाढा. त्याच्या कोणत्या बाजूचा लंबदुभाजक हा त्याचा सेविअन आहे व कोणत्या बाजूचालंबदुभाजक सेविअन नाही हे लिहा.

C)ΔDEF मध्ये DE = 6 सेमी, EF = 5 सेमी, DF = 8 सेमी घेऊन त्रिकोण काढा. याच्याही तीनबाजूंचे लंबदुभाजक काढून ते त्रिकोणाचे सेविअन आहेत का ते ठरवा.

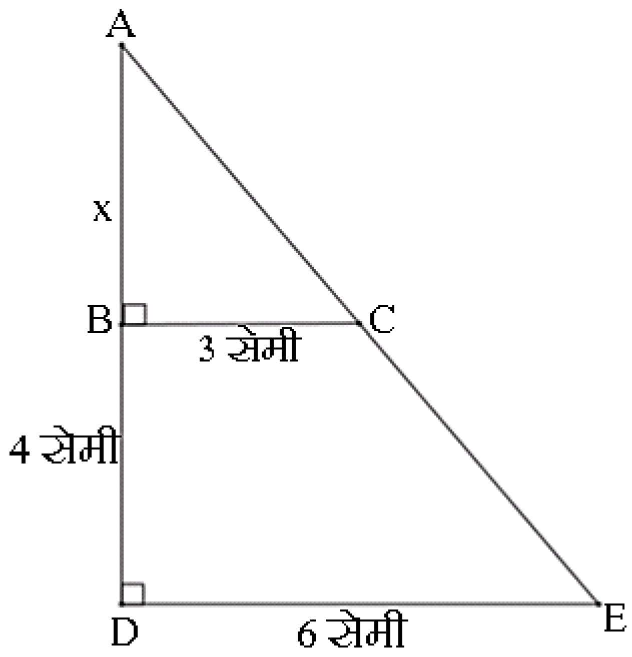
वरील तीन उदाहरणांचे निरीक्षण करून पुढील विधान पूर्ण करा.

त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक त्रिकोणाचे सेविअन्स ....

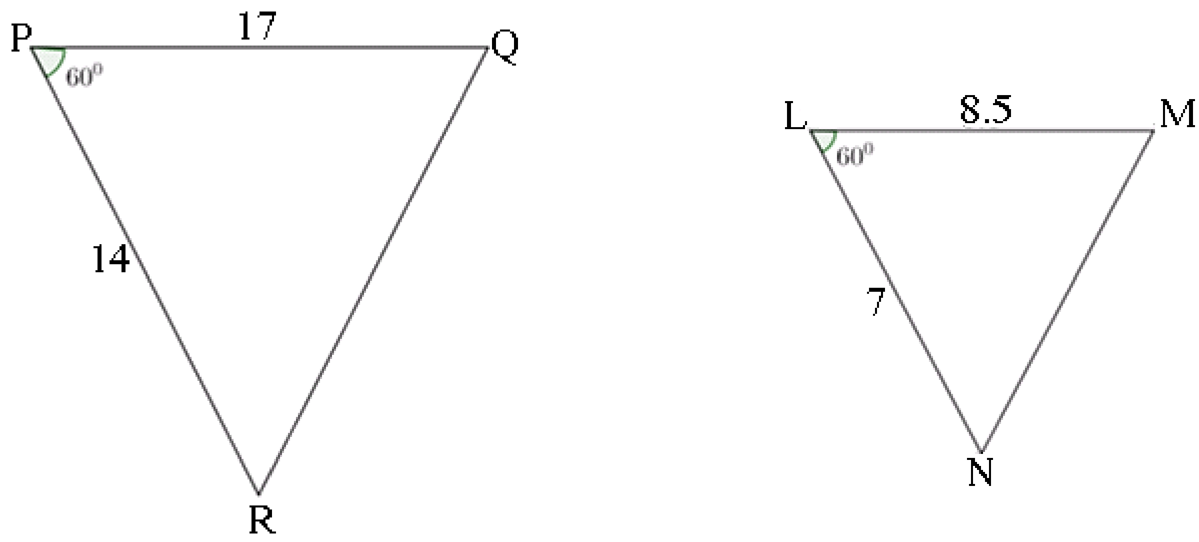
3) आकृतीत दिलेल्या कोनांच्या मापांवरून इतर सर्व कोनांची मापे सकारण लिहा.



4) आकृतीमध्ये दिलेल्या माहितीवरून x ची किंमत काढा.

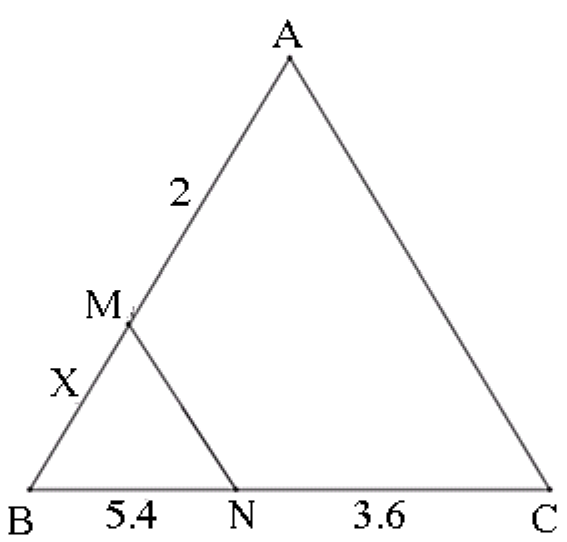


5) खालील आकृतीमध्ये दिलेल्या माहितीवरून ΔPQR व ΔLMN हे समरूप आहेत का? कोणत्या कसोटीने?कोणत्या एकास एक संगतीने?



गट III) 4 गुणांचे प्रश्न:

1)



सोबतच्या आकृतीमध्ये,

रेख MN ∥बाजू AC. (A-M-B, C-N-B).

BM=x, MA=2, BN=5.4, NC=3.6

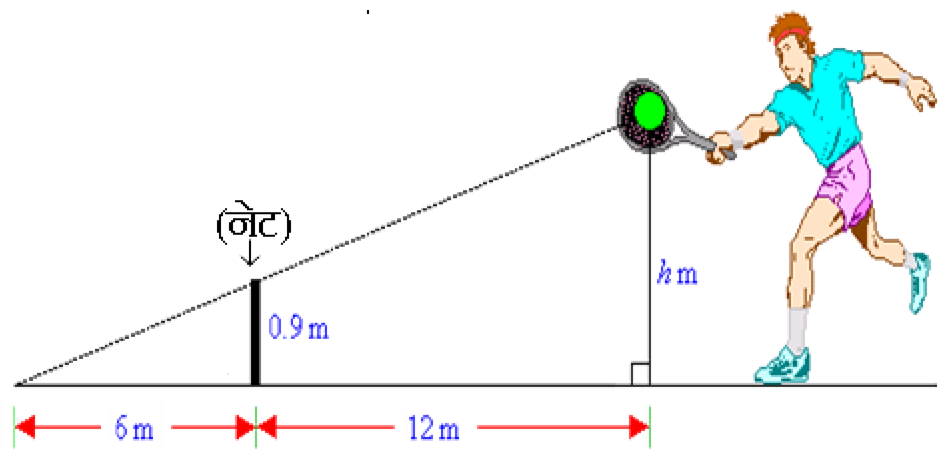
तरΔBMN~ΔBAC दाखवा व त्यावरुनx ची किंमत काढा.

2) खालील आकृतीत टेनिसपटू दाखविलेला आहे.'त्रिकोणांची समरूपता' या संकल्पनेचा उपयोग करून 'h' ची किंमत काढा.

i) दिलेल्या आकृतीतील दोन त्रिकोण समरूप दाखवा.

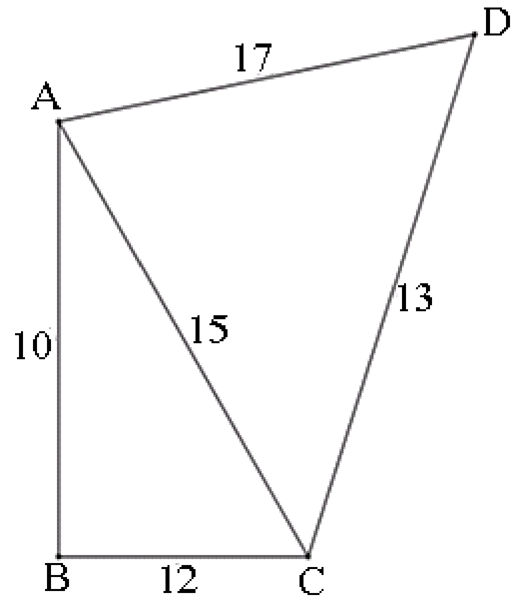
ii) एकास एक संगतीनुसार त्रिकोणाच्या संगत बाजूंचे गुणोत्तर लिहा.

iii) त्यामध्ये दिलेल्या किंमती घालून h ची किंमत ठरवा.

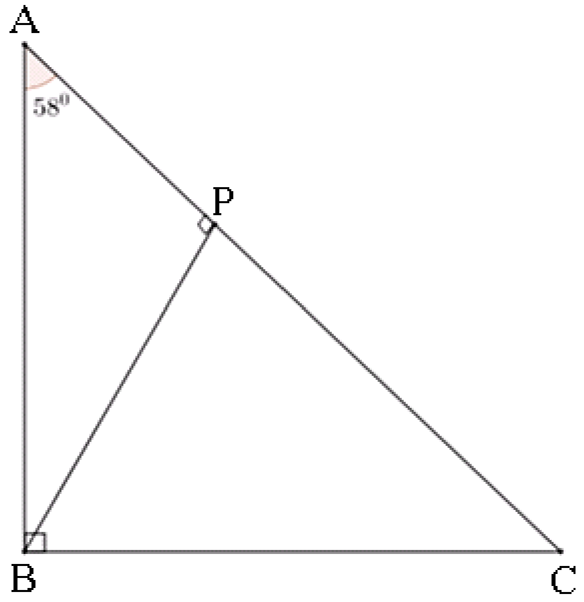


3) आकृतीत एक चौकोनी शेत ABCD आहे.

AB = 10 मी., BC = 12 मी., CD = 13 मी., AD = 17 मी. या शेताचा नकाशा 1 सेमी = 1मी. हे प्रमाण घेऊन काढा.



4)



आकृतीत ΔABC मध्ये $\angle ABC$ काटकोन असून रेख $BP \perp$ कर्णAC, $m\angle A = 58^0$ तर पुढील कोनांची मापे ठरवा.

i) $\angle ACB$ ii) $\angle ABP$ iii) $\angle PBC$

व त्यावरून दाखवा की,

a) $\Delta APB \sim \Delta ABC$ b) $\Delta BPC \sim \Delta APB$ c) $\Delta BPC \sim \Delta ABC$

Assessment

1) त्रिकोणाच्या दोन लघुकोनांच्या मापांची बेरीज तिसऱ्या कोनाच्या मापाइतकी असेल तर तो....... त्रिकोण असतो.

a) समभुज

b) काटकोन

c) लघुकोन

d) विशालकोन

2) जर एका काटकोन त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप असतील तर त्याच्या लघुकोनांची मापे प्रत्येकी ......असतात.

a) 45

b) 30

c) 60

d) नक्की सांगता येणार नाही.

3) त्रिकोणाच्या सहा बाह्यकोनांपैकी जास्तीत जास्त ....बाह्यकोन लघुकोन असू शकतात.

a) 6

b) 4

c) 2

d) एकही नाही.

4) $\Delta PQR \sim \Delta ABC$ असून $\angle P = 50^0$, $\angle B = 70^0$असल्यास $\angle R$ चे माप......असते.

a) 60

b) 50

c) 70

d) 120

T2_L12

5) जर त्रिकोणाच्या तीन कोनांची मापे 1: 2 :3 या गुणोत्तरात असतील तर त्यांच्या सर्वात लहान कोनाचेमाप =...... असते.

a) 1^0

b) 30^0

c) 60^0

d) 90^0