प्रकरण 3 : त्रिकोणांची एकरूपता

संकल्पना चित्र

पूर्वज्ञान: रेषाखंडाची एकरूपता, कोनांची एकरूपता, त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूमधील एकास एक संगती, त्रिकोणांची एकरूपतेची संकल्पना.

त्रिकोणांच्या एकरूपतेची व्याख्या:

त्रिकोणांच्या एकरूपतेचे गुणधर्म:

i) परावर्तनता
ii) सममिमता
iii) संक्रमकता

त्रिकोणांच्या एकरूपतेच्या कसोट्या:

1) बा – को – बा कसोटी
2) बा – को – को कसोटी
3) बा – बा – बा कसोटी
4) कर्ण भुजा प्रमेय

त्रिकोण एकरूपतेच्या कसोट्यांचे उपयोजन:

i) समव्दिभुज त्रिकोणाचे प्रमेय:-
ii) समद्विभुज त्रिकोणाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास:-
iii) $30^0 - 60^0 - 90^0$ मापाचा त्रिकोण व त्याच्या बाजूंमधील गुणधर्म व व्यत्यास:-

त्रिकोणातील असमानता संबंध:-

1) त्रिकोणाच्या मोठ्या बाजूसमोरील कोन
2) त्रिकोणाच्या मोठ्या कोनासमोरील बाजू
3) त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या लांबीची बेरीज ही तिसऱ्या बाजूंच्या लांबीपेक्षा जास्त असते.
4) काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णाचा गुणधर्म:-
5) लघुतम रेषाखंडाचे प्रमेय:-

प्रकरण 3
त्रिकोणांची एकरूपता

ऑक्टोबर **1659** ! स्वराज्यावर फार मोठे संकट अफझलखानाच्या रूपाने आलेले होते.

विजापूरहून खानाने प्रचंड फौजेनिशी महाराष्ट्राकडे कूच केलेले होते.

महाराजांनी प्रतापगडावर राहूनच खानाला जावळीच्या खो-यात अंगावर घ्यायचे ठरविले.

कान्होजी जेध्यांनी बारा मावळातून मावळ्यांचे सैन्य एकत्र केले.

महाराजांनी कान्होजींसमवेत मसलत केली. जावळीच्या त्या निबिड अरण्यात जमा झालेल्या

मावळ्यांच्या तुकड्या प्रतापगडावर पोहोचण्यास अधीर झाल्या होत्या.

त्यांना आणखी स्फुरण यावे म्हणून राजांनी आपली एक योजना कान्होजींना सांगितली.

प्रतापगडाच्या तीन दिशांना महाराजांनी तीन जागा एकाच सपाटीवरील निवडल्या.

प्रतापगडाच्या पायथ्यापासून त्या सारख्याच अंतरावर होत्या.

तिथून मावळ्यांच्या तीन तुकड्या एकाचवेळी निघणार होत्या.

एका तुकडीतील मावळ्यांना इतर तुकड्यांबद्दल माहिती नव्हती. योग्य दिवस ठरला.

कान्होजींची तीन विश्वासू माणसे योजलेल्या तीन ठाण्यांवर पोचली.

त्यांनी बरोब्बर योग्य वेळेला इशारा दिला आणि फौजा प्रतापगडाकडे निघाल्या.

प्रत्येकजण अतिशय अधीरतेने, झपाट्याने महाराजांकडे लवकरात लवकर जाण्यास त्या

घनदाट अरण्यातून निघाला होता. काही काळ गेला आणि काय आश्चर्य!

तीनही तुकड्या वेगवेगळ्या मार्गांनी एकाच वेळी गडावर पोहोचल्या आणि नेमके

त्याचवेळेस राजे त्यांना सामोरे आले.सगळेजण हर्षभरीत झाले.

कृष्णा-कोयनेच्या खो-यात महाराजांच्या मावळ्यांनी केलेला जयजयकार घुमला.

असा होता हा ‘ जाणता राजा’! (ही गोष्ट काल्पनिक आहे.)

हे सारे शिवाजीमहाराजांनी कसे घडवून आणले**?** तुम्हाला समजून घ्यायचे आहे**?**

त्यासाठी आणखी काही संकल्पना प्रथम समजल्या पाहिजेत.

खालील आकृत्यांमधील जोड्या पहा.

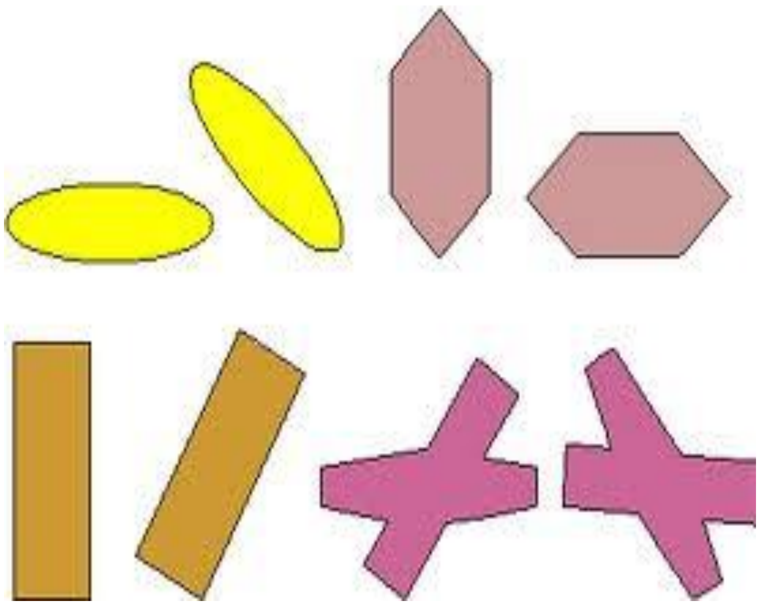
त्यांचे फक्त आकार(Shape) सारखे आहेत की, आकारमान(size)? की दोन्ही?

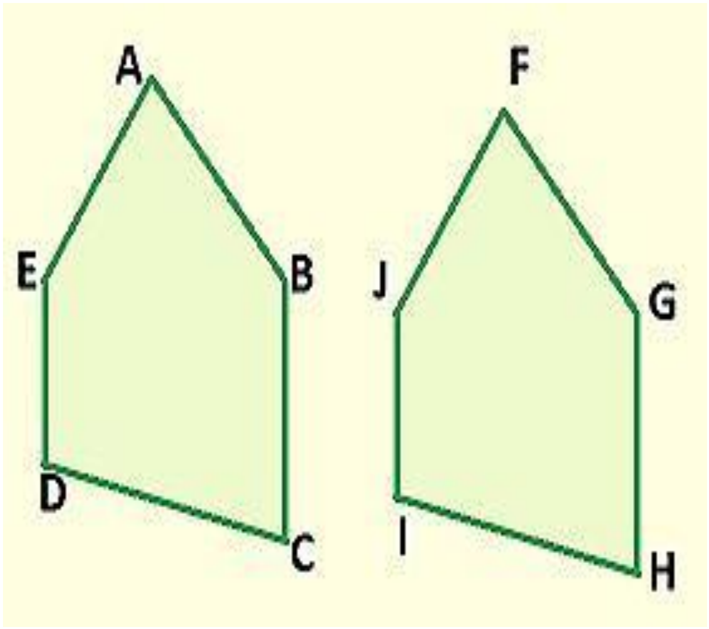
बरोबर, या प्रत्येक जोडीतील आकृत्यांचे आकार तसेच आकारमान दोन्ही समान आहेत.

समजा, यातील एक आकार उचलून दुस-यावर विशिष्ट प्रकारे ठेवला तर काय ते एकमेकांशी जुळतील का? कल्पना करून ठरवा.

होय. ते एकमेकांशी तंतोतंत जुळतील.
अशा आकृत्यांना एकरूप आकृत्या म्हणतात.

आता भूमितीतील एकरूप आकृत्यांच्या जोड्या पहा.

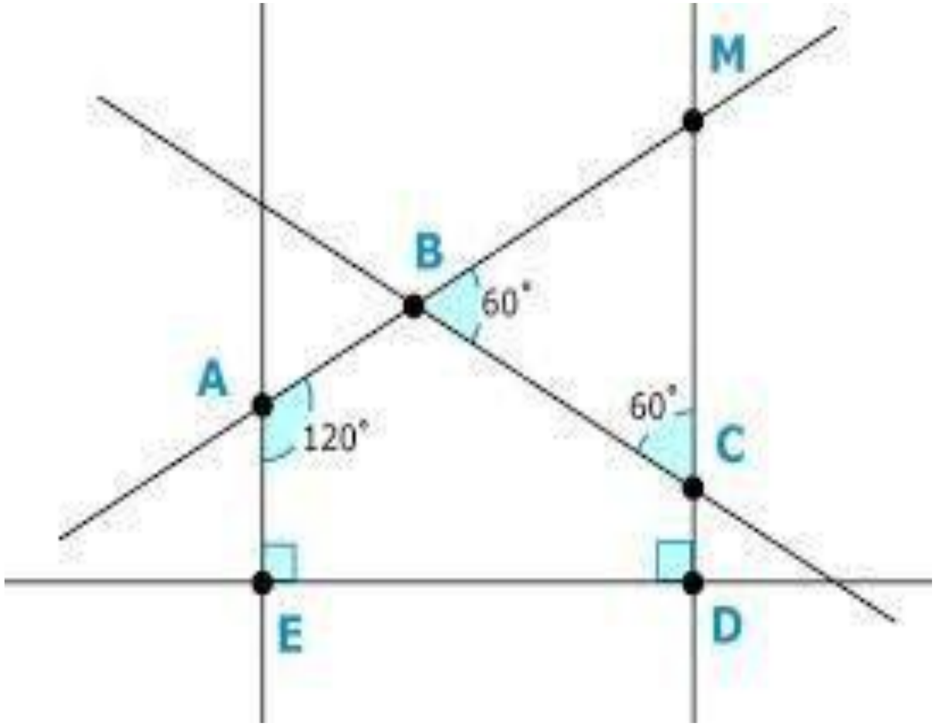




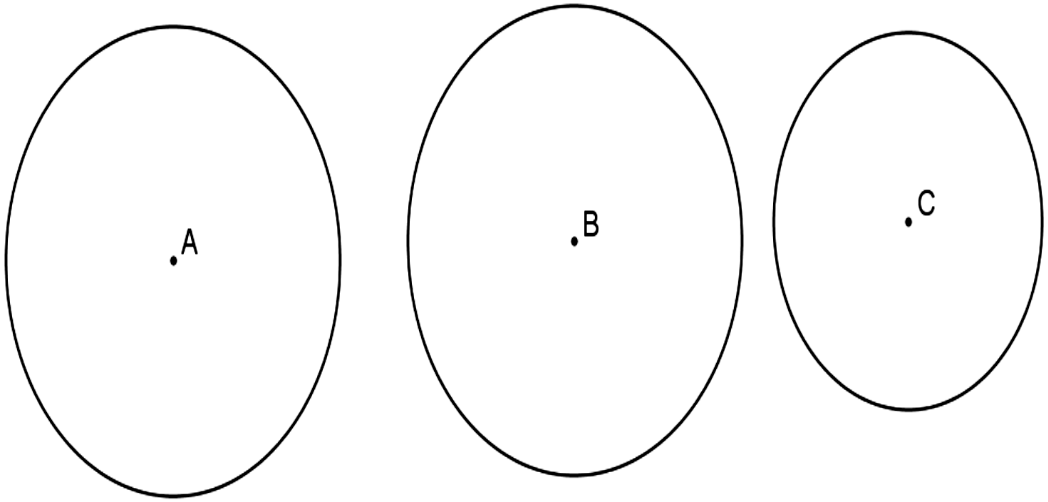
खालील आकृत्यांतील कोणत्या आकृत्या एकरूप आहेत व कोणत्या नाहीत ते निरीक्षणाने ठरवा.

रेषाखंड

2) कोन:

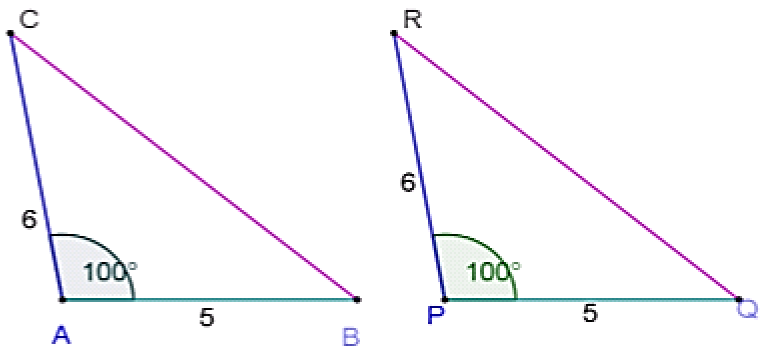


3) एकरूप वर्तुळे:

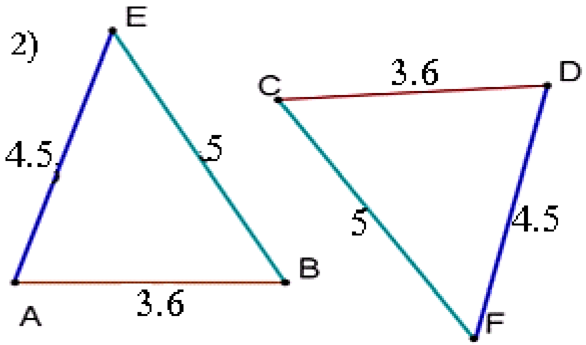


खालील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे दोन त्रिकोण काढा व या जोड्यांमधील दोन्ही त्रिकोण ट्रेस पेपरवर काढा आणि त्या आकृत्या एकमेकांवर ठेवा त्या आकृत्या एकमेकांवर तंतोतंत जुळतात का ते पहा.

1)



2)



(Answer should be see after click)

वरील दोन्ही आकृत्यां मधील त्रिकोण एकरूप आहेत कारण ते एकमेकांवर ठेवले तर ते एकमेकांशी तंतोतंत जुळले.

आकृती (1) मधील त्रिकोणांची जोडी जेंव्हा B बिंदू Q वर, A बिंदू P वर, C बिंदू R वर ठेवल्यावरच एकमेकांशी तंतोतंत जुळले.

आकृती (2) मधील त्रिकोणांची जोडी जेंव्हा A बिंदू D वर, B बिंदू C वर, E बिंदू F वर ठेवल्यावरच एकमेकांशी तंतोतंत जुळले.

एक आकृती दुस-या आकृतीवर ठेवणे हे प्रत्येक वेळी शक्य होणार नाही.

म्हणून आकृत्यांचे आकार व मापे समान असण्याचा पडताळा घेण्यासाठी दुस-या पध्दतीचा विचार करावा लागतो.

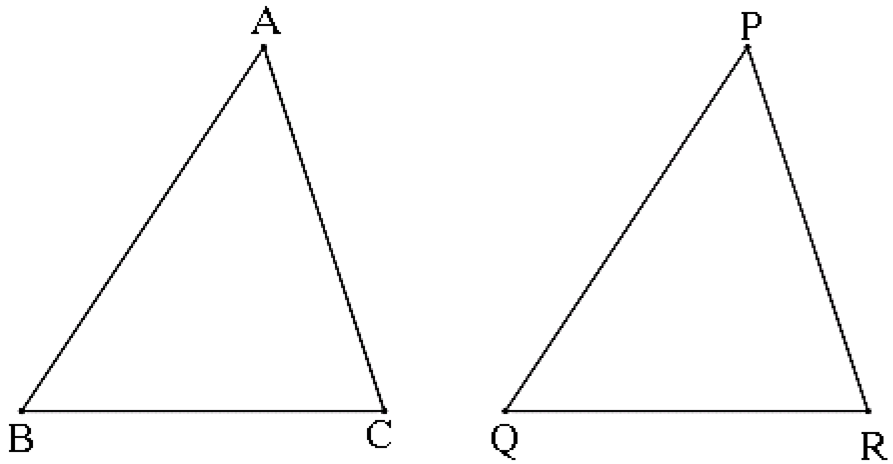
आपण समरूपता शिकलो तेव्हा त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंतील एकास एक संगती याबद्दल शिकलो आहोत. तीच संकल्पना येथेही वापरणार आहोत कारण दोन त्रिकोण एकमेकांवर 6 वेगवेगळ्या प्रकारे ठेवता येतात.

त्यालाच आपण शिरोबिंदूंमधील एकास एक संगती म्हणतो हे तुम्हाला माहित आहे.

जर ΔABC आणि ΔPQR हे दिलेले दोन त्रिकोण असतील तर त्यांच्या शिरोबिंदूंमध्ये, सहा प्रकारे एकास एक संगती लावता येतात. त्या संगती खालीलप्रमाणे:

ABC ↔ PQR, ABC↔ PRQ, ABC↔QPR,

ABC ↔ QRP, ABC↔ RPQ, ABC ↔ RQP



व्याख्या:

जर दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंमधील सहा एकास एक संगतीपैकी किमान एका, एकास एक संगतीमध्ये, एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू व तीन कोन (सहा घटक) अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत बाजू व संगत कोनांशी एकरूप असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.

जर ΔABC हा ΔPQR शी $ABC \leftrightarrow QRP$ यासंगतीत तंतोतंत जुळत असेल तर, $\Delta ABC \cong \Delta QRP$ असे लिहितात.

तसेच जेंव्हा दोन त्रिकोण एकरूप असतात तेंव्हा एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू व तीन कोन हे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन संगत बाजू व संगत कोनांशी एकरूप असतात.

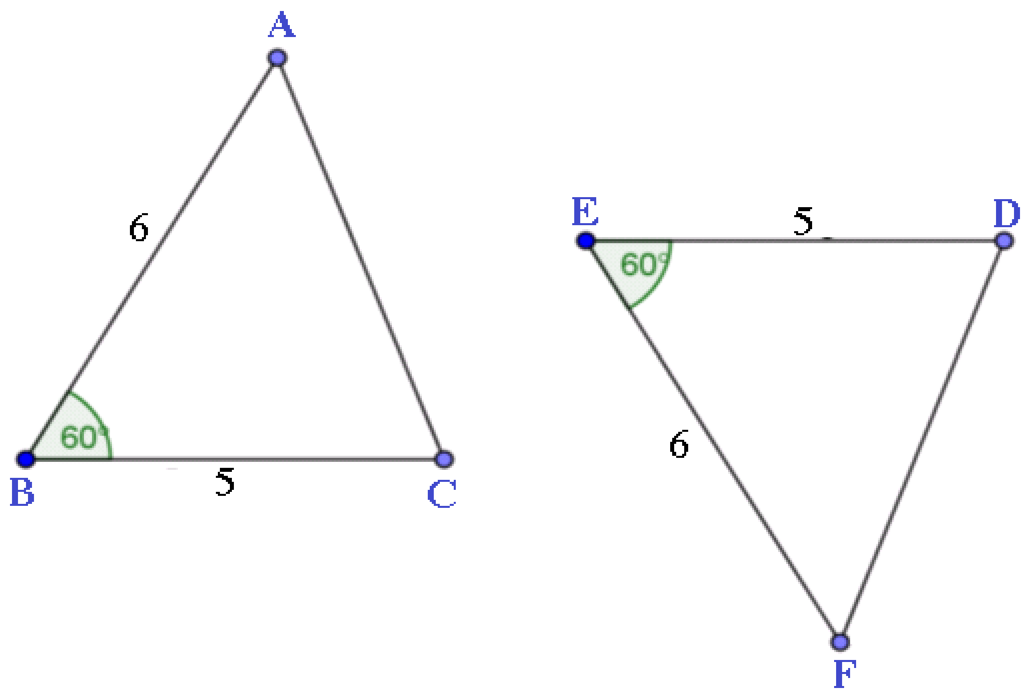
ही व्याख्या कळल्यावर अनेक विद्यार्थ्यांप्रमाणे तुमच्याही मनात आले असेल की, दोन त्रिकोणांबद्दल इतकी माहिती नेहमी कशी मिळणार?

आणि समजा मिळालीच, तर त्यातून एकरूपतेखेरीज त्या त्रिकोणांबद्दल आणखी नवीन काय कळणार? तुमची शंका रास्त आहे.

त्रिकोणांच्या एकरूपतेच्या कसोट्या:

1) बा – को – बा एकरूपता कसोटी :

त्याच्या उत्तरासाठी चला जरा काही सोप्या कृती करु. त्यामुळे **त्रिकोणांच्या कमीत कमी किती घटकांची माहिती** मिळाली की, त्यांचे उरलेले घटक एकरूप असतातच हे तुम्हाला कळेल. एकरूपतेसाठी आवश्यक माहिती त्यामुळे व्याख्येपेक्षा कमी होईल.



वर दाखविल्याप्रमाणे त्रिकोण कागदावर काढून घ्या व ते बाजूंवरून व्यवस्थितपणे कापून घ्या.

a) हे त्रिकोण एकमेकांवर वेगवेगळ्या संगतीत ठेऊन पहा.

ते कोणत्या एकास एक संगतीत तंतोतंत जुळले त्याची नोंद करा.

b) बाजू AC, FD यांची लांबी मोजा.

c) ∠BAC, ∠FDE तसेच ∠BCA, ∠FED यांची मापे मोजा.

d) आता या त्रिकोणांच्या एकरूप घटकांची प्रथम बाजूंच्या जोड्या व नंतर कोनांच्या जोड्या याप्रमाणे यादी करा.

e) व्याख्येनुसार, हे त्रिकोण एकरूप आहेत का याबद्दलचे तुमचे निरीक्षण लिहा.

यामध्ये दोन बाजूंची लांबी व त्यांनी समाविष्ट केलेला कोन यांची मापे समान घेतली व त्रिकोण काढले.

त्यांचे इतर सर्व घटक एकरूप असल्याचा आपण पडताळा घेतला.

म्हणजेच हे त्रिकोण एकरूपतेच्या व्याख्येतील सर्व अटी पूर्ण करतात.

जरी तुम्ही बाजू तसेच समाविष्ट केलेले कोन यांची मापे बदलली तरीसुध्दा त्रिकोण एकरुप मिळतात का हे करून पाहू शकता.

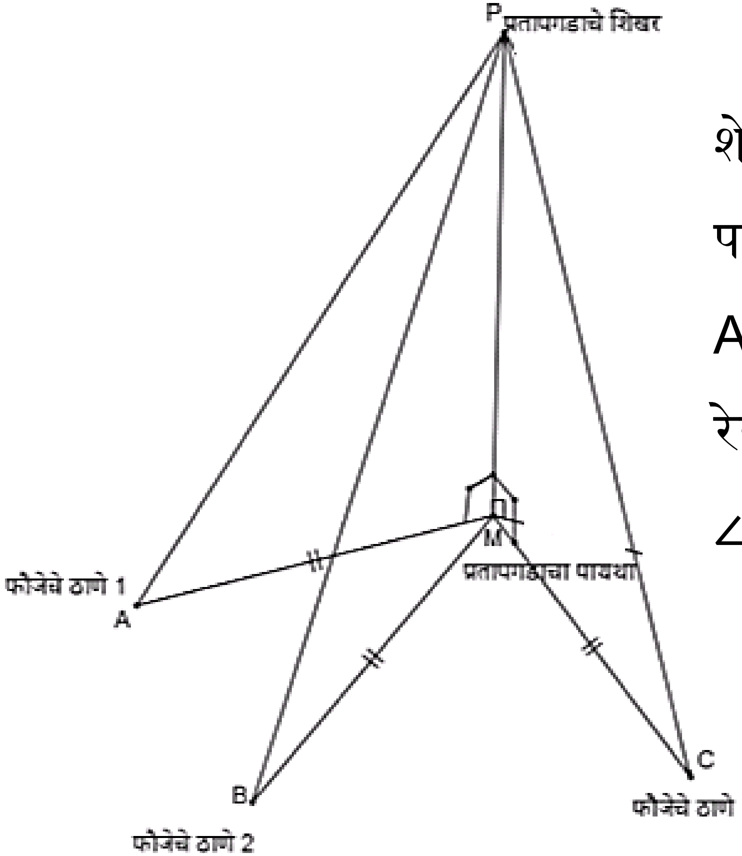
हेच पुन्हा पुन्हा सत्य असल्याचे दिसून आल्याने ती एकरूपतेची कसोटी ठरली.

तिचे नाव **'बा – को – बा एकरूपता कसोटी'** आहे

अशा आणखी तीन वेगळया कसोट्या आहेत. त्या **'बा – को – बा एकरूपता कसोटी'** च्या आधारे सिद्ध करता येतात. पण याच नावाची कसोटी समरूप त्रिकोणांसाठीही आहे.

मग दोन्हीतील फरक कळावा म्हणून आपण या कसोटीचे नाव **'बा – बा – बा एकरूपता कसोटी'** असे वापरू.

आता तुम्हाला सुरुवातीच्या शिवाजी महाराजांच्या गोष्टीतील सर्व मावळे वेगेवेगळया ठिकांणाहून एकाच वेळी निघून शिखरावर एकाच वेळी कसे काय पोहोचले या प्रश्नाचे उत्तर सापडेल.



शेजारील आकृतीत रेख PM हा प्रतापगडाचे शिखर आणि पायथ्याचा बिंदू यांना जोडणारा असून M बिंदूपासून A, B, C ही तीन ठाणी समान अंतरावर आहेत.

रेख PM हा रेख AM, रेख BM, रेख CM ला लंब आहे.

$\angle PMA = \angle PMB = \angle PMC = 90^0$

ΔPMA , ΔPMB , ΔPMC हे बा-को-बा एकरूपता कसोटीने एकरूप आहेत.

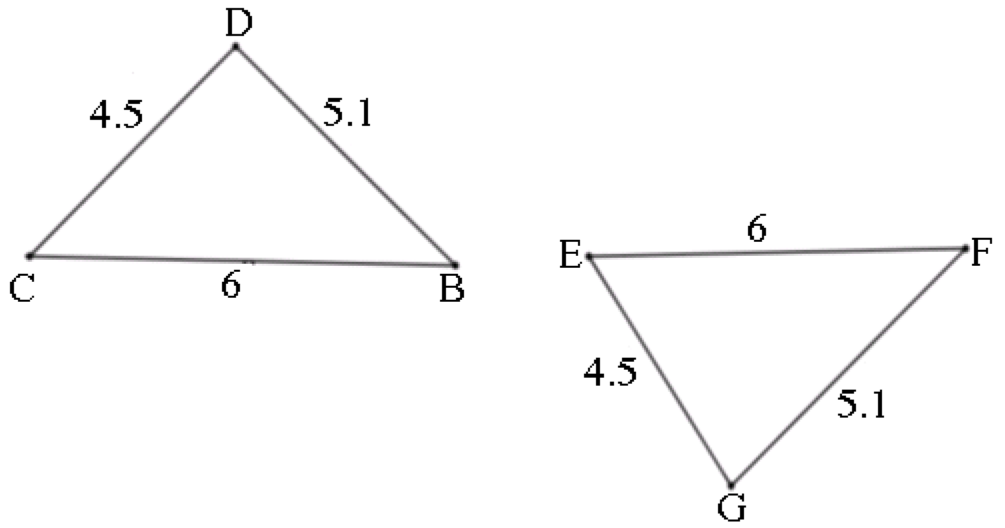
त्यामुळे त्यांच्या संगत बाजू एकरूप असल्याने **PA =PB = PC**

(कोणतेही तीन बिंदू नेहमीच एकप्रतलीय असतात हे तुम्हाला माहित आहेच.)

∴सर्वांना समान अंतर चढावे लागले. तसेच त्यांची गती समान असणार.

(ही गोष्ट काल्पनिक आहे.)

2) बा – बा – बा एकरूपता कसोटी :



वर दाखविल्याप्रमाणे दोन त्रिकोण कागदावर काढून घ्या व ते व्यवस्थितपणे कापून घ्या.

हे त्रिकोण एकमेकांवर वेगवेगळ्या संगतीत ठेऊन पहा.

ते कोणत्या एकास एक संगतीत तंतोतंत जुळले त्याची नोंद करा.

आता कोनमापकाच्या साहाय्याने दोन्ही त्रिकोणातील सहा कोनांची मापे मोजा व त्यांपैकी एकरूप कोनांच्या जोड्यांची यादी लिहा.

या कृतीतून आपल्याला काय कळले? यावर विचार करा.

हे त्रिकोण एकरूप आहेत हे पटले का?

त्रिकोण काढताना कोणते तीन घटक एकरूप घेतले यावरुन कसोटीचे नाव काय असेल ते तुम्हाला सुचले का?

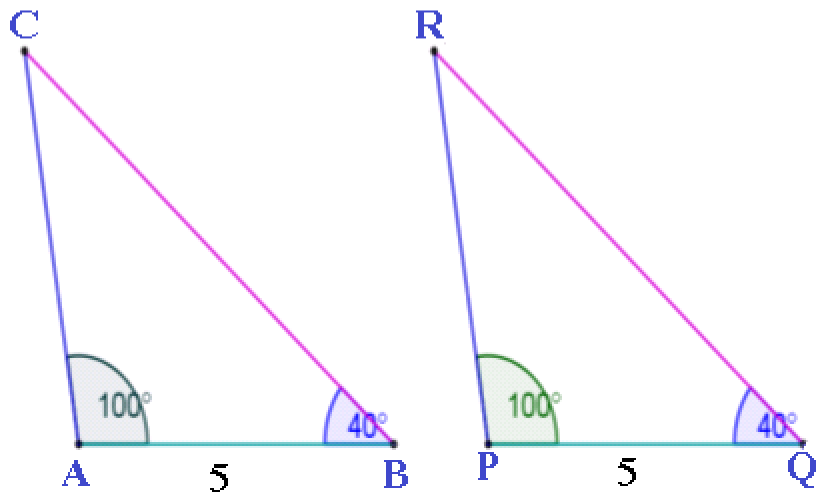
हे तुम्हाला सुचलेले नाव बरोबर आहे.

पण याच नावाची कसोटी समरूप त्रिकोणांसाठीही आहे.

दोन्हीतील फरक कळावा म्हणून आपण या कसोटीचे नाव

’बा-बा-बा एकरूपता कसोटी’ असे यापुढे लिहू.

3) को – बा – को एकरूपता कसोटी :



वर दाखविल्याप्रमाणे दोन त्रिकोण कागदावर काढून घ्या व ते व्यवस्थितपणे कापून घ्या.

हे त्रिकोण एकमेकांवर वेगवेगळ्या संगतीत ठेऊन पहा.

ते कोणत्या एकास एक संगतीत तंतोतंत जुळले त्याची नोंद करा.

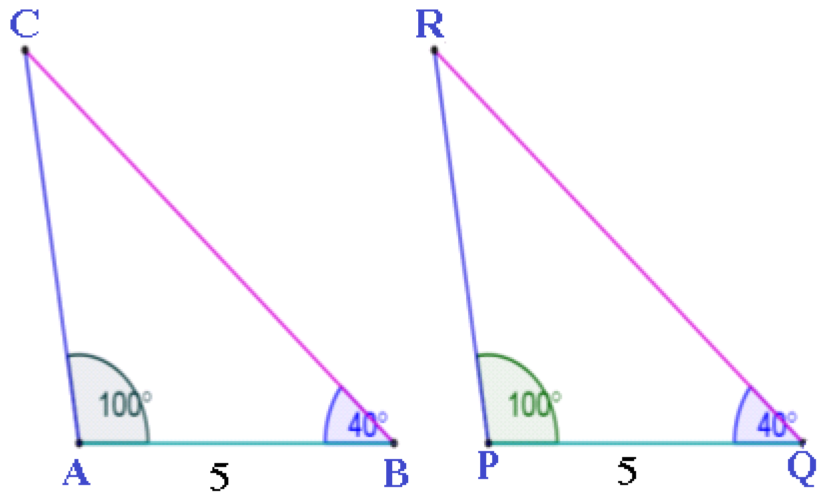
या त्रिकोणांच्या उरलेल्या बाजूंची लांबी मोजा.

तिसऱ्या जोडीतील कोनांची मापे मोजण्याची आवश्यकता नाही .

कारण ते कोन न मोजताही त्यांची मापे तुम्हाला कळलीच असतील.

येथेही त्रिकोण एकरूपतेच्या अटी पूर्ण करतात असे आढळले का?

को – बा – को व बा – को – को एकरूपता कसोटी :



म्हणून ही नवीन कसोटी कळाली . तिचे नाव ’को – बा – को’ कसोटी’

या कसोटीवरुनच आणखी एक कसोटी मिळते. वरील आकृत्यांमधील तिसऱ्या कोनांची जोडी एकरूप असते. हे आपण मागील प्रकरणात पाहिलेच आहे.

जर दिलेल्या बाजूच्या लगतच्या आणखी एका कोना ऐवजी समोरच्या कोनाचे माप दिले तरीही त्रिकोण एकरुप असतात. तिचे नाव ’ बा – को – को कसोटी’

या कसोट्यांपैकी ’ बा- को- बा कसोटी’ ही कसोटी गृहितक म्हणून निवडली तर तिच्या सहाय्याने इतर कसोट्यांनुसार त्रिकोण एकरूप सिद्ध करता येतात.

एकरूपतेच्या कसोट्या व प्रमेय:

त्रिकोण एकरुपतेसाठी पुरेशा अटी म्हणजेच त्रिकोण ' एकरूपेच्या कसोट्या' आहेत.

1) त्रिकोण एकरूपतेची बा –को -बा कसोटी:

दिलेल्या 'संगती' नुसार जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू व त्यामधील कोन अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत बाजू व त्यामधील समाविष्ट कोन यांच्याशी एकरूप असतात. तर ते दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

2) त्रिकोण एकरूपतेची को – बा – को कसोटी:

जर दिलेल्या संगतीनुसार एका त्रिकोणाचे दोन कोन व त्यामधील समाविष्ट बाजू अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन संगत कोन व त्यामधील समाविष्ट बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.

3) त्रिकोण एकरूपतेची बा – को – को कसोटी:

दिलेल्या संगतीनुसार, एका त्रिकोणाचे दोन कोन व त्यामध्ये समाविष्ट नसणारी बाजू अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन संगत कोन व त्यामध्ये समाविष्ट नसणारी संगत बाजू याच्याशी एकरूप असतात, तेव्हा ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.

4) त्रिकोण एकरूपतेची बा – बा – बा कसोटी:

दिलेल्या संगतीनुसार जर एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन संगत बाजूंशी एकरूप असतात तर ते दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

5) कर्ण-भुजा प्रमेय:

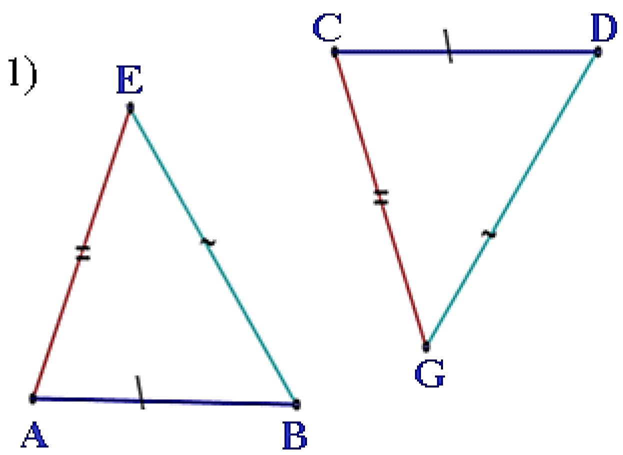
जर एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू हे घटक दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व संगत बाजू यांच्याशी एकरूप असतील तर ते दोन काटकोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

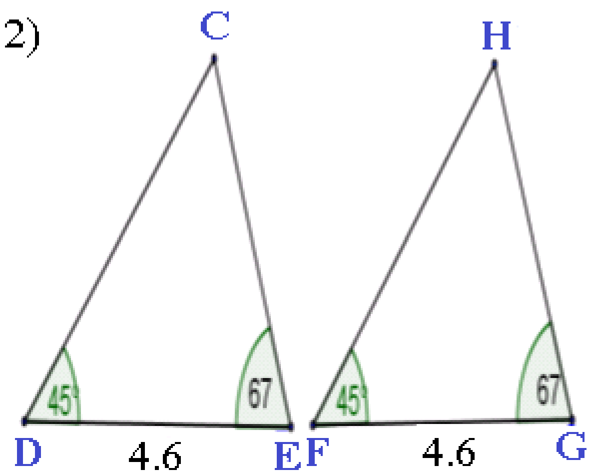
कसोट्यांवर आधारित उदाहरणे:

खाली दिलेल्या प्रत्येक जोडीतील त्रिकोण एकरूप आहेत.

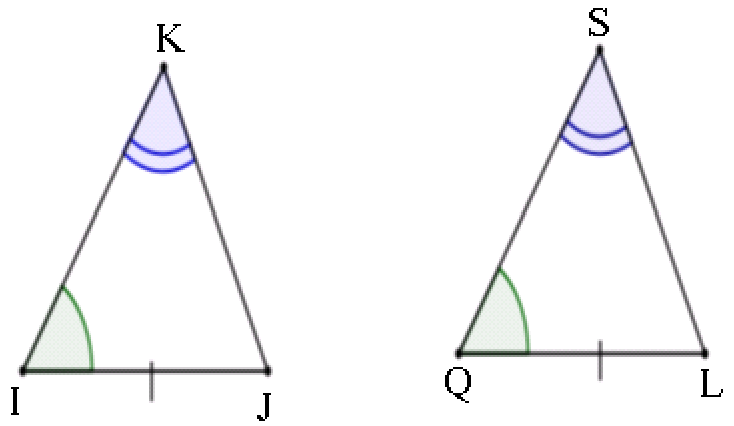
तुम्ही फक्त प्रत्येक ठिकाणी कोणती कसोटी आधार म्हणून निवडणार ते लिहा.

व लिहिताना लक्षात ठेवा की त्यांच्या शिरोबिंदूतील एकास एक संगती योग्य असली पाहिजे.

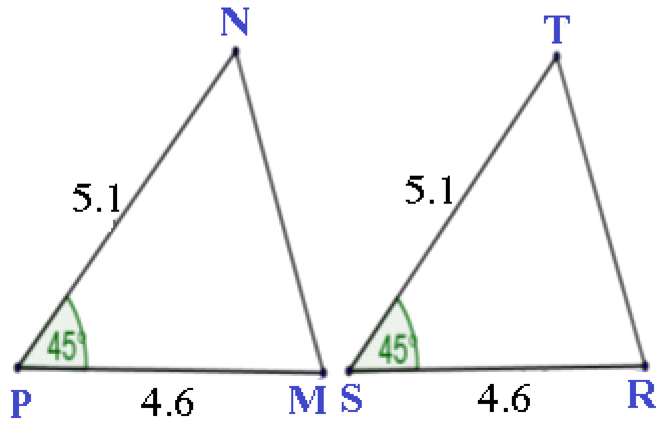




3)



4)



कसोट्यांवर आधारित उदाहरणांची उत्तरे:

i) $\Delta BAE \cong \Delta DCG$ .....(बा -बा-बा एकरूपता कसोटी)

ii) $\Delta DEC \cong \Delta FGH$ ......(को-बा-को कसोटी)

iii) $\Delta IJK \cong \Delta QLS$ ....(बा-को- को कसोटी)

iv) $\Delta MPN \cong \Delta RST$ ....(बा-को-बा एकरूपता कसोटी)

कोणत्याही कसोटीनुसार किंवा प्रमेयानुसार दोन त्रिकोण एकरूप आहेत हे कळले तर त्याचा काय उपयोग करता येईल?

त्यामुळे व्याख्येवरून आपल्याला त्या त्रिकोणांचे इतर घटक ही एकरूप आहेत ही माहिती कळते. हा फार मोठा उपयोग होतो.

त्रिकोणांच्या एकरूपतेचे गुणधर्म

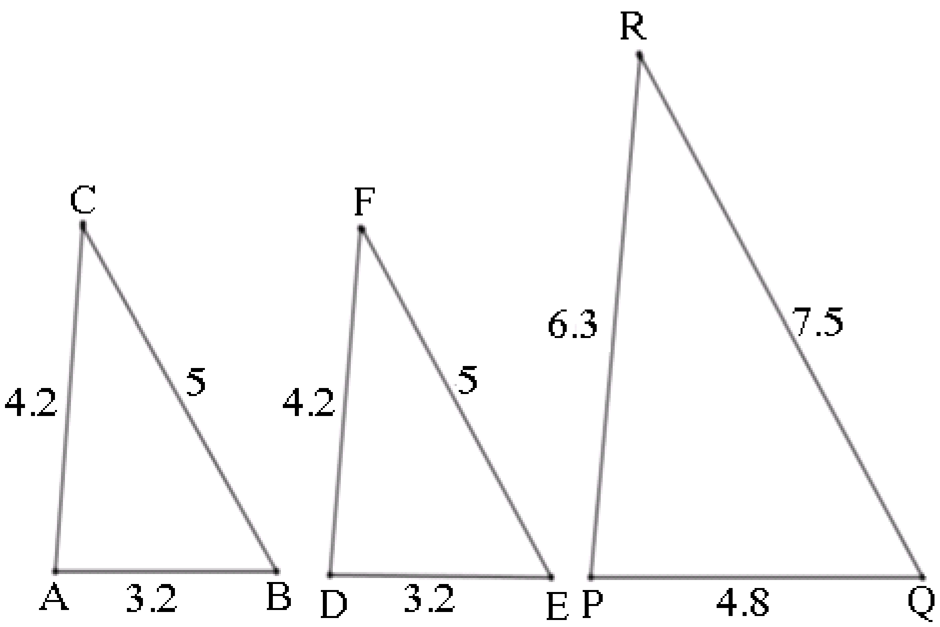
हे गुणधर्म समरुपतेच्या गुणधर्मांप्रमाणेच आहेत.

1) **परावर्तनता:** प्रत्येक त्रिकोण स्वतःशी एकरूप असतो.

2) **सममितता :** जर पहिला त्रिकोण दुस-या त्रिकोणाशी एकरूप असेल तर दुसरा त्रिकोण पहिल्या त्रिकोणाशी एकरूप असतो.

3) **संक्रमकता:** जर पहिला त्रिकोण दुस-या त्रिकोणाशी एकरूप असेल व दुसरा त्रिकोण तिसऱ्या त्रिकोणाशी एकरूप असेल तर पहिला त्रिकोण हा तिसऱ्या त्रिकोणाशी एकरूप असतो.

त्रिकोणांची समरुपता व एकरूपता :



शेजारील आकृतीत दाखविलेल्या त्रिकोणांपैकी कोणते त्रिकोण एकरूप आहेत व कोणते त्रिकोण समरूप आहेत ते ठरवा.

एकरूप व समरूप त्रिकोणांच्या व्याख्या बघू.

जर दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतील तर,

i) त्यांच्या संगत बाजू एकरूप असतात.

आणि

ii) त्यांचे संगत कोन एकरूप असतात.

जर दोन त्रिकोण परस्परांशी समरुप असतील तर,

i) त्यांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात.

आणि

ii) त्यांचे संगत कोन एकरूप असतात.

या दोन व्याख्यांमधील साम्य कोणते? व फरक कोणता?

मागील आकृत्या पुन्हा पहा.

व जर दोन संख्या समान असतील तर त्यांच्या मधील गुणोत्तर = ?

यावर विचार करा व पुढील सारणी पूर्ण करा.

अ.क्र.	त्रिकोणांशी संबंधित बाबी	समरूप त्रिकोण	एकरूप त्रिकोण
1	आकार	....	....
2	आकारमान	....	....
3	संगत कोन	....	....
4	संगतबाजू	....	....
5	संगत बाजूंच्या गुणोत्तरांची किंमत	....	....

T3_L3_A1

उत्तरे:

अ.क्र.	त्रिकोणांशी संबंधित बाबी	समरूप त्रिकोण	एकरूप त्रिकोण
1	आकार	सारखा	सारखा
2	आकारमान	भिन्न	समान
3	संगत कोन	एकरूप	एकरूप
4	संगतबाजू	प्रमाणात	एकरूप
5	संगत बाजूंच्या गुणोत्तरांची किंमत	समान पण 1 असणे आवश्यक नाही	समान पण 1 असणे आवश्यक असतेच.

संगत कोनांच्या जोड्या एकरूप असतात ही अट दोन्हीं मध्ये सामाईक आहे.

जर दोन त्रिकोण एकरूप असतील तर ते समरुप असतातच कारण ते समरूपतेच्या व्याख्येतील दोन्ही अटी पूर्ण करतात.

पण दोन त्रिकोण समरुप असतील तर ते एकरूप असतीलच असे नाही.

(कारण त्यांच्या संगत बाजूंच्या लांबींच्या गुणोत्तराची किंमत 1 असेलच असे नाही.)

हे आपल्याला अगदी साध्या प्रकारेही सुचू शकते.

कसे?

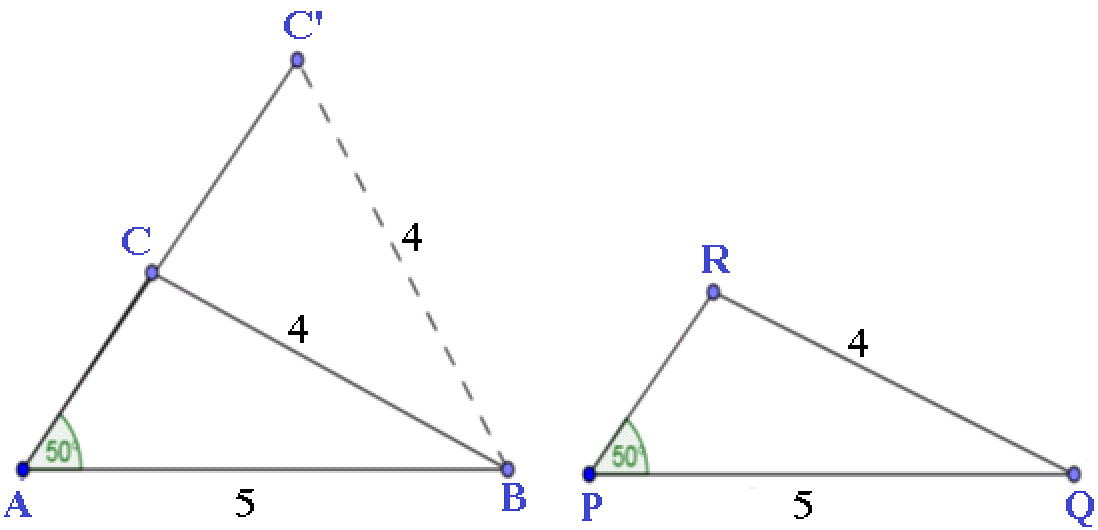
समरूपतेचे चिन्ह व एकरूपतेची चिन्ह यादृष्टीने सूचक आहेत.

कशी? करा विचार.

T3_L3_A2

बा – बा – को अशी कसोटी का नसते ?

अनेक मुलांना बा- बा- कसोटी का नसते हा प्रश्न पडतो. त्यासाठी आपण एक रचना करून पाहू.



ΔABC व ΔPQR मध्ये,

AB = PQ = 5 सेमी

BC = QR = 4 सेमी

$\angle BAC = \angle QPR = 50°$

प्रथम AB = 5 सेमी तसेच PQ = 5 सेमी काढून घ्या.

आता ΔPQR मध्ये, P बिंदूशी 50°मापाचा कोन करणारा किरण काढा. नंतर ΔABC मध्ये A बिंदूशी 50° मापाचा कोन करणारा किरण काढा. Q केंद्र व 4 त्रिज्येने वरील किरणाला छेदणारा कंस काढा छेदनबिंदूला R नाव द्या.

आता B केंद्र व 4 त्रिज्येने वरील किरणाला छेदणारा कंस काढा.

असे सांगितल्यावर काय झाले ते आकृतीत दाखविले आहे.

त्यावरून तुम्हाला काय समजले ?

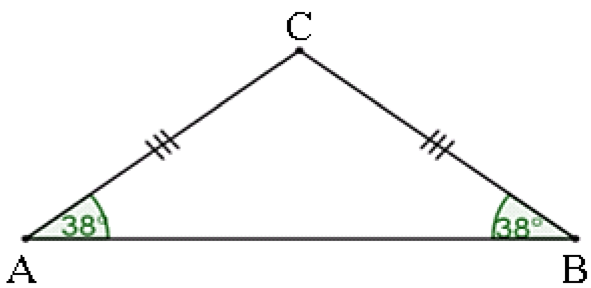
जर दोन भिन्न बिंदू मिळाले तर त्याचा अर्थ दोन त्रिकोण दिलेल्या अटी पूर्ण करणारे आहेत. पण हे दोन्ही त्रिकोण म्हणजे ΔABC व ΔABC’ हे ΔPQR शी एकरूप आहेत काय? नाही. फक्त ΔABC हा एकच त्रिकोण ΔPQR शी एकरूप आहे व ΔABC’ हा ΔPQR शी एकरूप नाही.

यावरून बा-बा-को एकरूपता कसोटी का नसते हे तुम्हाला कळले का?

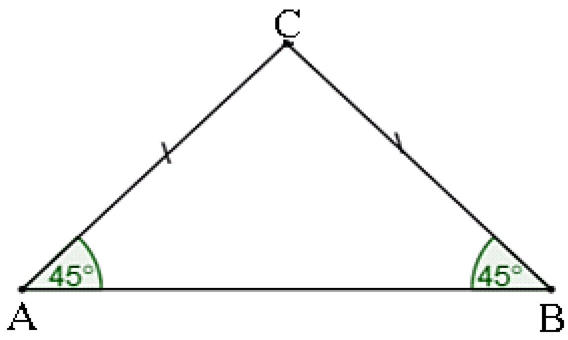
ओळख समद्विभुज त्रिकोणाशी:

खालील आकृत्यांच्या एकरूप बाजू सारख्या खुणांनी दाखविल्या आहेत.

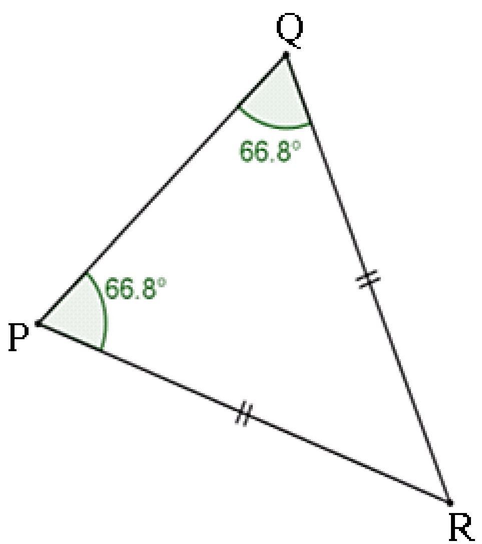
1)



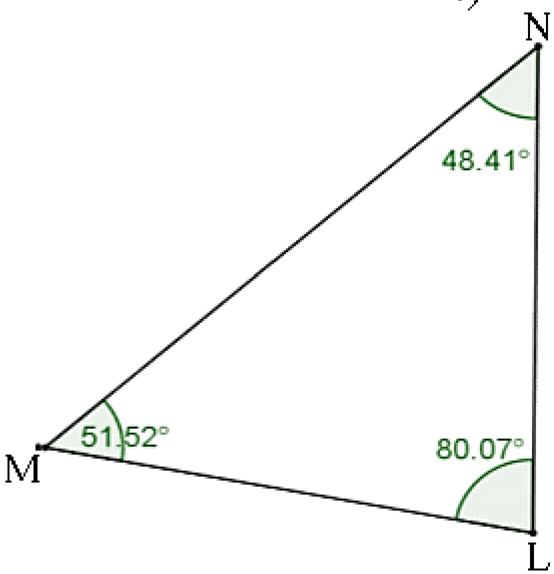
2)



3)



4)



मागील आकृत्यांमधील पहिल्या तीन त्रिकोणांच्या बाजूंचे वैशिटय कोणते दिसते?

बरोबर, पहिल्या तीन त्रिकोणांच्या दोन बाजू एकरूप आहेत म्हणजेच ते समद्विभुज त्रिकोण आहेत.

आता त्यांच्या कोनांचे निरीक्षण एकरूप बाजूंच्या संदर्भात करा. तुम्हाला काय आढळते?

त्यांच्या ज्या बाजू एकरूप आहेत त्यांच्या समोरील कोनांची मापे समान आहेत,म्हणजेच ते एकरूप आहेत.

हा गुणधर्म तुम्हाला पूर्वीपासूनच माहित आहे.

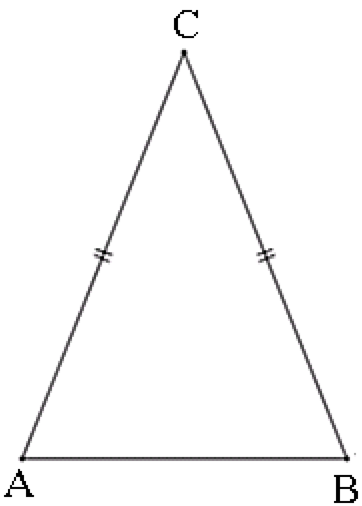
पण आकृती **4** मधील त्रिकोणांबद्दल तुमचे निरीक्षण काय आहे?

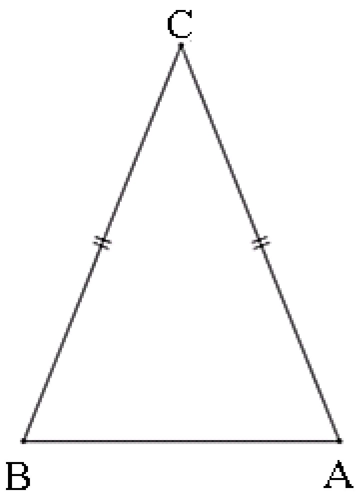
त्याच्या कोणत्याही दोन बाजू एकरूप नाहीत, तो विषमभुज त्रिकोण आहे. शिवाय त्याचे कोणतेही दोन कोन एकरूप नाहीत.

यामुळे तुम्हाला अंदाज आला असेल की, एकाच त्रिकोणाच्या बाजूंची एकरूपता आणि त्यांच्या समोरील कोनांची एकरुपता यांच्यात काहीतरी संबंध असावा.

तो संबंध आता आपण शोधणार आहोत.

समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय :





शेजारील आकृती (I) मधील ΔABC मध्ये,

रेख CA ≅ रेख CB म्हणजेच Δ ABC हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.

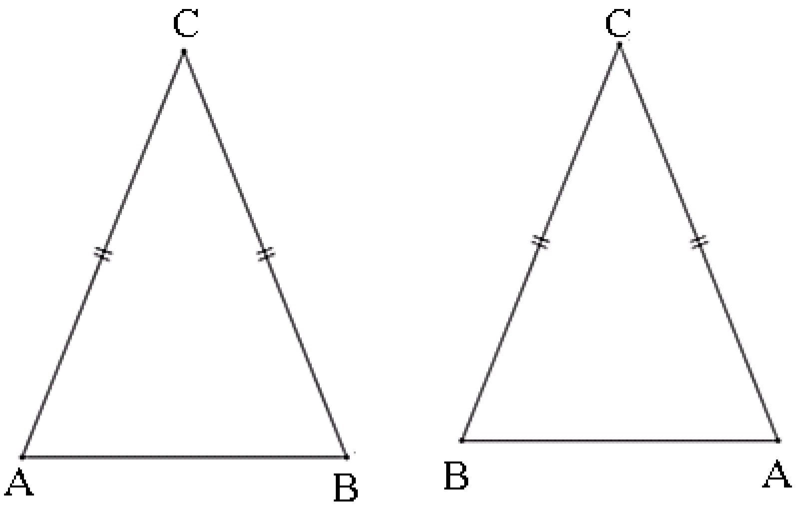
प्रत्येक त्रिकोण स्वत:शी एकरूप असतो हे आपल्याला माहित आहे.

म्हणजे ΔABC≅ ΔABC हे कोणत्याही त्रिकोणासाठी सत्य असतेच.

पण ΔABC हा समद्विभुज असल्याने आणखी एखाद्या संगतीत तो स्वत:शीच एकरूप दाखवता येतो का यावर विचार करू.

त्यासाठीच शेजारी त्याची आकृती पण शिरोबिंदू A व B यांच्या जागा अदलाबदल करून दाखविली आहे.

समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय:



आता ΔABC व ΔBACमध्ये,

रेख CA ≅ रेख CB .....(पक्ष)

∠ACB ≅ ∠BCA ....(परावर्तनता गुणधर्म)

रेख CB≅ रेख CA ......(पक्ष व सममितता गुणधर्म)

ΔCAB≅ ΔCBA .... (बा- को –बा एकरूपता कसोटी)

∠ACB ≅ ∠BCA......(एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन)

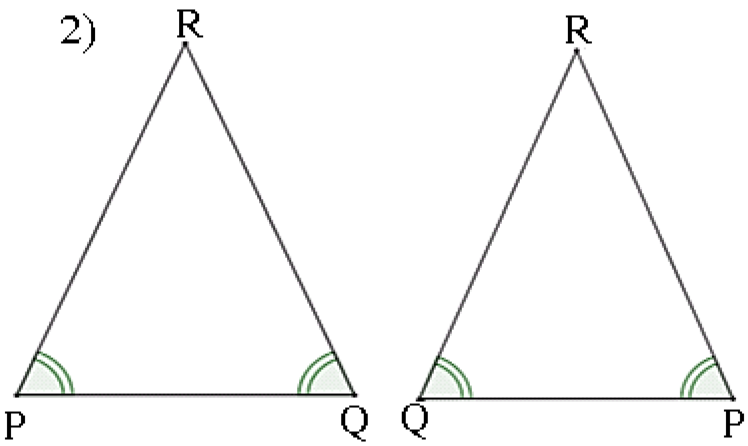
निष्कर्ष : एकाच त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप असतील तर त्या बाजूंसमोरील त्या त्रिकोणाचे दोन कोनही एकरूप असतात.

(एका प्रमेयाला अनेक सिद्धता असू शकतात हे तुम्हाला तुमच्या पुस्तकातील या गुणाधर्माची सिद्धता वाचलीत की पटेल.)

याच एकरूपतेच्या गुणधर्माच्या आधारे या प्रमेयाचा व्यत्यास सिद्ध करण्याचा प्रयत्न पुढील रिकाम्या जागा भरून करा.

समद्विभुज त्रिकोणाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास :

2)



पक्ष : ΔRPQमध्ये, $\angle RPQ \cong \angle RQP$

साध्य: रेख RQ$\cong$रेख RP

सिद्धता : 1) ΔRPQ व ΔRQP मध्ये,

$\angle RPQ \cong \angle RQP$. .... (............)

रेख PQ $\cong$ रेख .... (परावर्तनता गुणधर्म)

$\angle$..... $\cong \angle RPQ$ .... (पक्ष व सममितता गुणधर्म)

$\therefore \Delta RPQ \cong \Delta RQP$........... (............ कसोटी)

2) रेख...... .$\cong$ रेख RP .... (एकरूप त्रिकोणांच्या .... बाजू)

निष्कर्ष: जर एकाच त्रिकोणाचे दोन कोन .... असतील
तर त्या कोनांसमोरील त्या त्रिकोणाच्या दोन .... एकरूप असतात.

उत्तरे:

1) ΔRPQव ΔRQPमध्ये,

$\angle RPQ \cong \angle RQP$ ....(पक्ष)

रेख PQ ≅ रेख QP ....(परावर्तनता गुणधर्म)

$\angle RQP \cong \angle RPQ$ .... (पक्ष व सममितता गुणधर्म)

$\therefore \Delta RPQ \cong \Delta RQP$ .... (को-बा-को कसोटी)

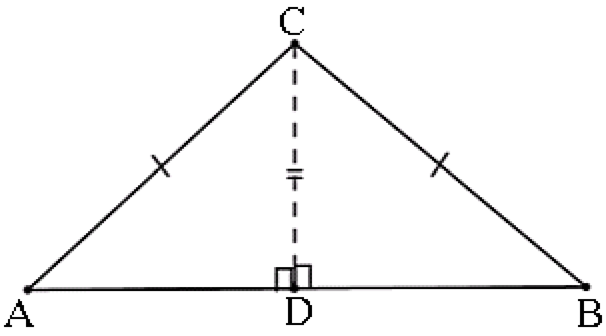
2) रेख RQ ≅ रेख RP .... (एकरूप त्रिकोणांचा संगत बाजू)

निष्कर्ष:

जर एकाच त्रिकोणाचे दोन कोन **एकरूप** असतील तर त्या कोनांसमोरील त्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू **एकरूप** असतात.

(अनेक विद्यार्थी या दोन प्रमेयाचा उपयोग करताना हे विसरतात की, ही प्रमेये एकाच त्रिकोणाच्या बाजू तसेच कोनांबद्दल आहेत. दोन त्रिकोणांच्या बाजू किंवा कोनांसाठी नाहीत.)

समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायावरील शिरोलंब:



पक्ष: ΔABC मध्ये, रेख AC≅ रेख BC .

रेख CD ⊥पाया AB (D मध्ये)

साध्य: 1) रेख CD हा पाया AB दुभागतो.

(D हा पाया AB चा मध्यबिंदू आहे.)

2) रेख CD हा पाया AB समोरील ∠ACB दुभागतो.

सिद्धता: पुढील प्रश्नांची उत्तरे शोधा म्हणजे सिद्धता तयार होईल ती लिहून काढा.

1.रेख CD ⊥पाया AB (D मध्ये) असल्यामुळे ΔCDA व ΔCDB कोणत्या प्रकारचे आहेत?

2.एकरूपतेच्या कसोट्यांनुसार ते एकरूप दाखविता येतील का यावर विचार करा

किंवा

3.काटकोन त्रिकोण कोणत्या प्रमेयाने एकरूप दाखविता येतात?

येथे **ΔCDA** व **ΔCDB** साठी प्रमेय वापरता येईल का यावर विचार करा.

4. जर दोन त्रिकोण एकरूप असतील तर त्यांच्या संगत बाजूंबद्दल व संगत कोनांबद्दल आपल्याला काय माहिती आहे?

त्यानुसार साध्यातील दोन्ही विधाने सिद्ध होतील काय यावर विचार करा.

सिद्धता लिहून पूर्ण करा.

त्यावरून समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायावरील शिरोलंबाचे दोन गुणधर्म कळले ते शब्दात लिहा.

सिद्धता:

1) ΔCDA व ΔCDB या काटकोन त्रिकोणांत,

कर्ण CA ≅कर्ण CB ..... .(पक्ष)

रेख CD ≅ रेख CD ....(परावर्तनता गुणधर्म) किंवा (प्रत्येक रेषाखंड स्वत:शी एकरूप)

∴ ΔCDA ≅ ΔCDB ....(कर्ण-भुजा प्रमेय)

2) ∴ बाजू AD ≅ बाजू BD ....(एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू एकरूप)

म्हणजेच D हा पाया AB चा मध्यबिंदू आहे. (A - D – B)

म्हणजेच रेख CD हा पाया AB ला दुभागतो.

3) ∴ ΔCDA ≅ Δ CDB ......(विधान 1 वरून)

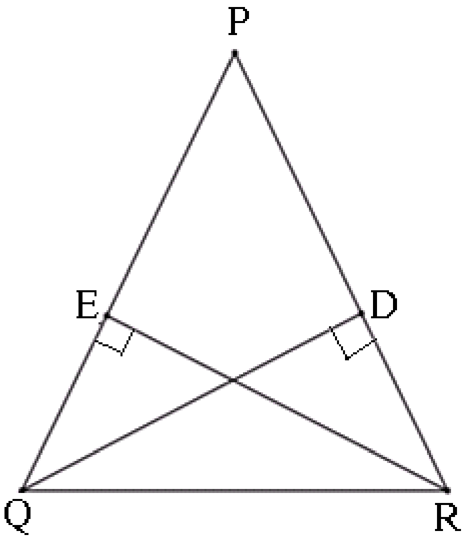
∴ ∠ACD≅ ∠ACD .... (एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन एकरूप.)

म्हणजेच रेख CD हा पाया AB समोरील कोन ∠ACB दुभागतो.

गुणधर्म: समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायावर संमुख शिरोबिंदूतून काढलेला लंब पायाला दुभागतो (म्हणजे तो लंब त्रिकोणाची पायावरील मध्यगाही आहे.) व त्रिकोणाचा पायासंमुख कोन दुभागतो.

3) समद्विभुज त्रिकोणाच्या एकरूप बाजूंवरील शिरोलंबांचा गुणधर्म :

T3_L4_A4



पक्ष: ΔPQR मध्ये, रेख PQ $\cong$ रेख PR.

रेख QD $\perp$ रेख PR , रेख RE $\perp$ रेख PQ.

साध्य: रेख QD $\cong$ रेख RE

पुढील प्रश्नांची उत्तरे शोधा व उत्तरांच्या सहाय्याने सिद्धता पूर्ण करा.

साध्यातील रेख QD व रेख RE ज्या त्रिकोणांच्या बाजू आहेत अशा त्रिकोणांच्या आकृतीत दोन जोड्या आहेत त्यांपैकी त्रिकोणांची योग्य जोडी अशी शोधा की, त्यात पक्षाचा उपयोग करता येईल.

हे त्रिकोण कसे एकरूप दाखविता येतील यावर विचार करा.

(म्हणजे त्यांमधील एकरूप घटकांची यादी मनात तयार करा व त्यावरून कसोटी ठरवा.)

एकरूप त्रिकोणांचे संगत घटक एकरूप असतात यावरून साध्य सिद्ध करा.

सिद्धता :

1) ΔPDQ व ΔPER मध्ये,

रेख PQ ≅ रेख PR ....(पक्ष)

∠DPQ ≅ ∠EPR .... (सामाईक कोन)

∠PDQ ≅ ∠PER ....(प्रत्येकी काटकोन)

∴Δ PDQ ≅ Δ PER ....(बा-को-बा एकरूपता कसोटी)

2) रेख QD ≅ रेख RE .... (एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)

गुणधर्म:

समद्विभुज त्रिकोणाच्या एकरूप बाजूंवर काढलेले शिरोलंब एकरूप असतात.

त्रिकोणाच्या बाजूंमधील तसेच कोनांमधील असमानता:

एकाच त्रिकोणाच्या एकरूप बाजूंसमोरील त्या त्रिकोणाचे कोन एकरूप असतात.

एकाच त्रिकोणाच्या एकरूप कोनांसमोरील त्या त्रिकोणाच्या बाजू एकरूप असतात हे आपण पाहिले.

याचाच दुसरा अर्थ असा की,

एकाच त्रिकोणाच्या ज्या बाजू एकरूप नसतात त्या बाजूंसमोरील त्या त्रिकोणाचे कोन एकरूप नसतात.

व **एकाच त्रिकोणाच्या जे कोन एकरूप नसतात त्या कोनांसमोरील त्या त्रिकोणाच्या बाजू एकरूप नसतात.**

याशिवाय आपल्याला हेही माहित आहे की, दोन संख्या समान नसतील तर त्यांपैकी पहिली संख्या दुसरीपेक्षा मोठी असेल नाहीतर लहान असेल.

त्यामुळे आता विचार करू की, एकाच त्रिकोणाच्या ज्या बाजू एकरूप नसतील त्यांपैकी मोठ्या बाजूसमोरील कोन हा लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षा मोठा असणार असे आपल्याला वाटते ते सत्य आहे की नाही ते सिद्ध करता येते का पाहू.

संख्यांमधील असमानता संबंध:

1) एक सोपे उदाहरण पाहू.

$6 + 3 = 9$

या समानतेमधील 3 ही संख्या काढूनच टाकली तर काय होईल?

अर्थातच असमानता निर्माण होईल.

$6 < 9$ किंवा $9 > 6$ हे लक्षात ठेऊ.

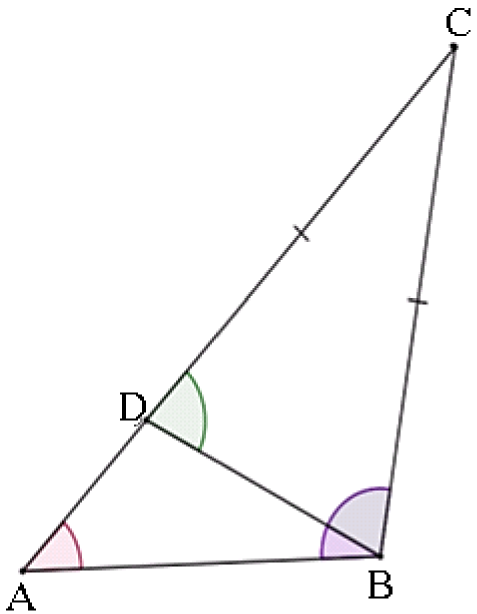
2) आणखी एक सोपे उदाहरण पहा.

अमितची उंची नेहापेक्षा जास्त आहे आणि नेहाची उंची मानसीपेक्षा जास्त आहे यावरून आपल्याला लगेच कळते की अमितची उंची ही मानसीच्या उंचीपेक्षा जास्त आहे.

म्हणजेच जर $a > b$ व $b > c$ असेल तर $a > c$

यांचा उपयोग आपण पुढील सिद्धतेत करणार आहोत.

प्रमेय :एकाच त्रिकोणाच्या असमान बाजू व त्यांच्या समोरील कोन



पक्ष : ΔABC मध्ये, बाजू AC > बाजू BC.

साध्य : ∠ABC > ∠BAC

रचना : बाजू AC > बाजू BC असल्यामुळे, रेख AC वर D हा बिंदू असा घेतला की, CD = BC

D व B बिंदू जोडले.

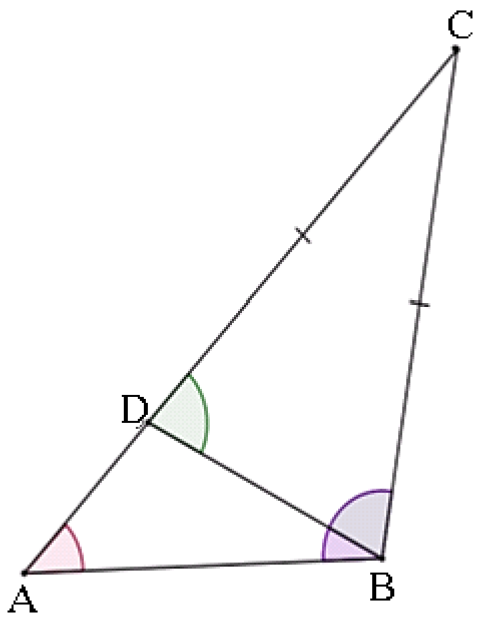
सिद्धता :-

1. AC > BC ….(पक्ष)

∴ AC > DC …..(रचनेनुसार रेख AC वर D हा बिंदू असा घेतला की, CD = BC)

∴ AC –DC > 0

∴ AD > 0 ……(A - D – C)



2) ΔADB चा∠CDB हा बाह्यकोन आहे व ∠DAB हा त्याचा दूरस्थ आंतरकोन आहे.

∴ m∠CDB =m∠DAB + m∠DBA…… (दूरस्थ आंतरकोनाचे प्रमेय)

m∠DBA ही धन संख्या आहे.

m∠CDB > m∠DAB म्हणजेच m∠CDB > m∠CAB

3) ΔCDB मध्ये,

रेख CD ≅ रेख CB …….(रचना)

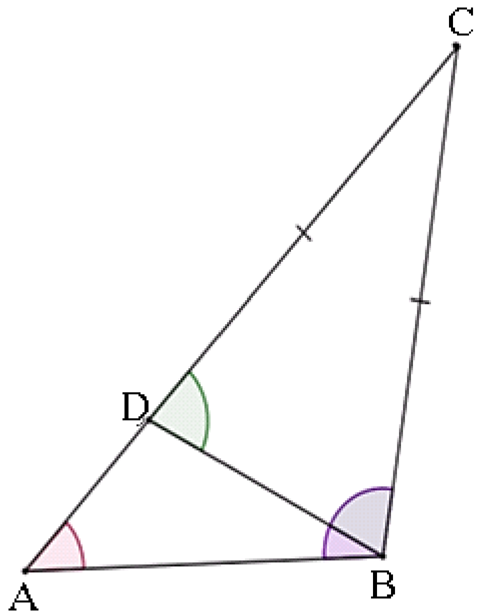
∴ m∠CDB = m∠CBD …….(समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

4) ∴m∠CBD >m∠CAB …… . (विधान 2 व 3 वरून)

5) m∠ABC = m∠ABD + m∠CBD …….(कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

m∠ABD ही धन संख्या आहे.

∴m∠ABC > m∠CBD



6) $\therefore m\angle ABC > m\angle CBD > m\angle CAB$ ……(विधान 4 व 5 वरून)

$\therefore m\angle ABC > m\angle CAB$

निष्कर्ष: एकाच त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप नसतील तर त्यांपैकी मोठ्या बाजूसमोरील कोन हा लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षा मोठा असतो.

दोन संख्यांतील त्रिभाजन गुणधर्म:

समजा, x आणि y हे दोन मुलांचे एका परीक्षेतील गुण आहेत असे त्यांच्या आयांनी ऐकले तर लगेच त्यांच्या मनात x आणि y ची तुलना होते.

त्यात तीन पर्याय असतील की,

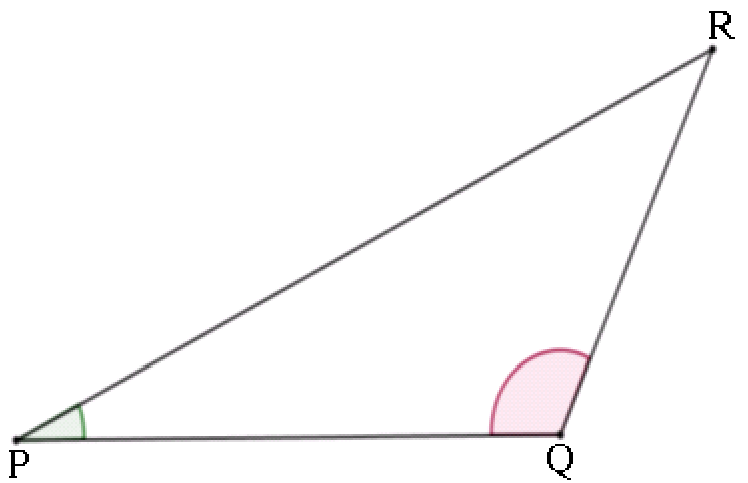
1) $x > y$ किंवा 2) $x < y$ किंवा 3) $x = y$

आता जर आपल्याला असेही कळले की यांपैकी $x < y$ आणि $x = y$ हे दोन पर्याय असत्य आहेत.

मग आपला निष्कर्ष काय असेल? $x > y$ हे सत्य असले पाहिजे.

असाच निष्कर्ष पुढील सिद्धतेत वापरणार आहोत कारण आपण त्यासाठी आवश्यक प्रमेये सिद्ध केलेली आहेत.

प्रमेय :एकाच त्रिकोणाचे असमान कोन व त्यांच्या समोरील बाजू



पक्ष: ΔPQR मध्ये, ∠PQR >∠QPR

साध्य: बाजू PR > बाजू QR

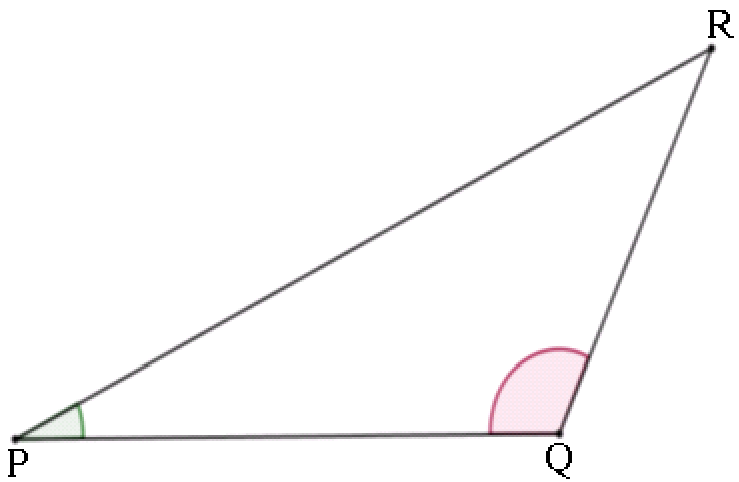
सिद्धता: प्रत्येक रेषाखंडाची लांबी ही (धन) वास्तव संख्या असते.

त्यामुळे बाजू PR व बाजू QR यांच्या लांबींमध्ये तीन पर्याय असतात व त्यातील नेमका एकच सत्य असतो.

ते पर्याय असे :-1) PR = QR किंवा 2) PR < QR किंवा 3) PR > QR

जर यातील पहिले दोन पर्याय आपल्याला असत्य दाखवता आले तर काय नवीन कळेल?

तर मग पर्याय (3) हा एकच पर्याय उरेल आणि अर्थातच तो सत्य होईल.



1) समजा, **PR = QR** सत्य आहे.

त्यामुळे Δ**PQR** हा समद्विभुज त्रिकोण होईल.

∴ ∠**PQR**≅ ∠**QPR** ....(समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

परंतु हे विधान पक्षाशी विसंगत आहे कारण पक्षानुसार,

∠**PQR** > ∠**QPR**

(येथे हे लक्षात घ्या की, पक्षाशी विसंगत विधान मिळाले म्हणून आपण पक्ष बदलू शकत नाही तसेच समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेयही बदलू शकत नाही.)

त्याअर्थी **PR = QR** हा पर्याय **असत्य** आहे.

2) समजा, PR < QRसत्य आहे.

त्यामुळे ΔPQR मध्ये,

$\angle$PQR < $\angle$QPR...............(त्रिकोणाच्या मोठ्या बाजू समोरील कोन हा लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षा मोठा असतो.)

म्हणजेच $\angle$QPR >$\angle$PQR

परंतु हे विधान पक्षाशी विसंगत आहे कारण पक्षानुसार,

$\angle$PQR > $\angle$QPR.

त्याअर्थी PR < QR हा पर्याय असत्य आहे.

तीनपैकी दोन पर्याय असत्य ठरल्याने उरलेला एकमेव पर्याय सत्य असला पाहिजे.

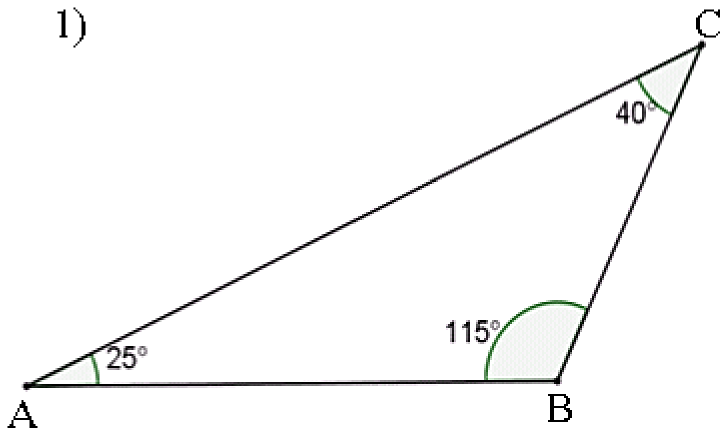
निष्कर्ष:

एकाच त्रिकोणाचे दोन कोन एकरूप नसतील तर त्यांपैकी मोठ्या कोनासमोरील बाजू ही लहान कोनासमोरील बाजूपेक्षा मोठी असते.

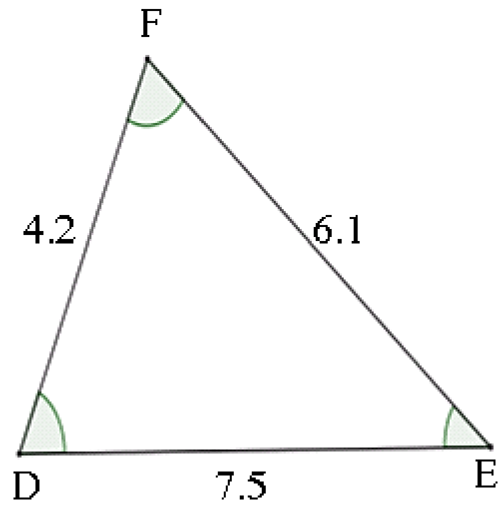
उदाहरणे:

खालील प्रत्येक आकृतीमधील कोनांवरून त्यांच्या बाजूंमधील क्रमसंबंध किंवा बाजूंवरून कोनांमधील संबंध ठरवा आणि तो चिन्ह वापरून चढत्या क्रमाने लिहा.

1)

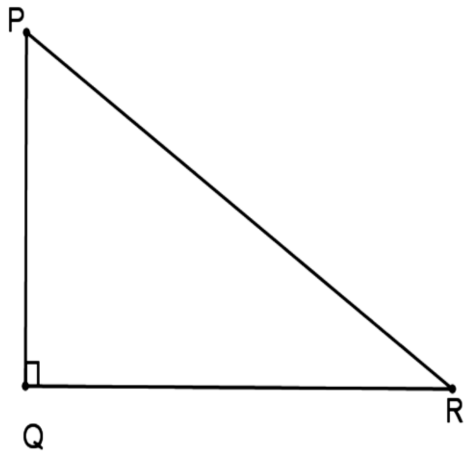


2)



T3_L6

प्रमेय: काटकोन त्रिकोणाची सर्वात मोठी बाजू कोणती?



या प्रश्नाचे उत्तर वरच्या प्रमेयात तुम्हाला सापडेल का? त्यासाठी काटकोन त्रिकोणातील मोठा कोन कोणता यावर विचार करा.

पक्ष: ΔPQR मध्ये, $\angle PQR$ हा काटकोन आहे.

साध्य: कर्ण PR ही ΔPQR ची सर्वात मोठी बाजू आहे.

पुढील प्रश्नांची उत्तरे शोधून सिद्धता लिहा.

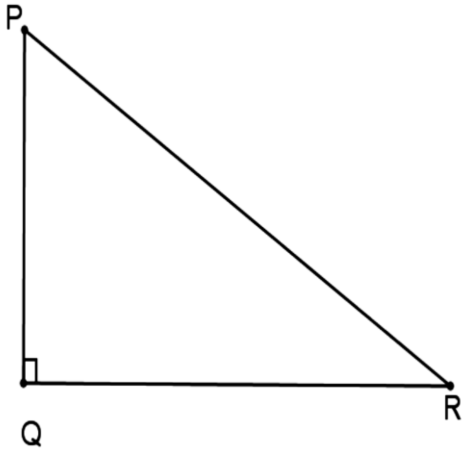
1) काटकोन त्रिकोणातील काटकोनाखेरीज इतर दोन्ही कोन कोणत्या प्रकारचे असतात?

2) काटकोन व लघुकोन यांतील क्रमसंबंध चिन्हात लिहा.

3) त्यावरून ΔPQR मधील $\angle PQR$ व $\angle PRQ$ यांतील क्रमसंबंध चिन्हात लिहा.

4) त्यावरून त्यांच्या समोरील बाजूंमधील क्रमसंबंध चिन्हात सकारण लिहा.

5) त्याचप्रमाणे ΔPQR मधील $\angle PQR$ व $\angle RPQ$ यांतील क्रमसंबंध चिन्हात सकारण लिहा.



6) त्यावरून त्यांच्या समोरील बाजूंमधील क्रमसंबंध चिन्हात लिहा.

7) विधान 4 व 6 वरुन या त्रिकोणाची सर्वात मोठी बाजू ठरवा.

सिद्धता :

1) ΔPQR मधील $\angle PQR$ हा काटकोन व $\angle PRQ$ हा लघुकोन आहे.

$\angle PQR > \angle PRQ$. ....(काटकोन हा लघुकोनापेक्षा मोठा असतो.)

2) $\therefore$ ΔPQR मध्ये,

रेख PR > रेख PQ ......(त्रिकोणातील मोठ्या कोनासमोरील बाजू ही लहान कोनासमोरील बाजूपेक्षा मोठी असते.)

3) त्याचप्रमाणे $\angle PQR > \angle RPQ$

$\therefore$ रेख PR > रेख RQ

4) $\therefore$ रेख PR ही ΔPQR ची सर्वात मोठी बाजू आहे.......(विधान 2 व 3 वरुन)

निष्कर्ष: काटकोन त्रिकोणाची कर्ण ही सर्वात मोठी बाजू असते.

त्रिकोणाच्या तीन बाजूंच्या लांबीतील संबंध :

शिक्षकांनी वर्गात सांगितले की तुम्ही एक सोपी कृती करा.

त्यासाठी घरून खराट्याच्या किंवा कुंच्याच्या बारीक काड्या आणा.

दुस-या दिवशी अनेकांनी वेगवेगळ्या लांबींच्या काड्या आणल्या.

पण नेहाने आपल्या आईकडून काय आणले असेल?

तिने शेवयांचे तुकडे गोळा करून आणले कारण ते तर काड्यांपेक्षाही बारीक होते आणि तुकडे करायला सोपे.

मग शिक्षकांनी त्यांना पुढील काम दिले.

प्रत्येकाने आपल्याजवळील काड्यांनी त्रिकोण तयार करता येतो किंवा नाही ते बघावयाचे त्रिकोण मिळाला किंवा नाही मिळाला तरी प्रत्येक वेळी तिन्ही काड्यांची लांबी नोंदवून त्यापुढे त्रिकोण मिळाला किंवा मिळाला नाही ते लिहून ठेवायचे. ज्यावेळी त्रिकोण मिळेल त्यावेळी दोन लहान काड्यांच्या लांबीची बेरीज व उरलेली सर्वात मोठ्या काडीची लांबी यांच्यात काय संबंध आहे ते शोधायचे. तुम्ही सुध्दा ही कृती अवश्य करा.

नेहाच्या वहीतील नोंदी पहा:

शेवयांची (काड्यांची) लांबी उतरत्या क्रमाने	त्रिकोण तयार झाला का?	दोन लहान बाजूंची बेरीज (a + b)	सर्वात मोठ्या बाजूची लाबी c	(a+b) व c यातील संबंध
5सेमी, 3सेमी, 2सेमी	नाही	3+2 =5	5	(a+b) =c
8सेमी, 6सेमी, 4सेमी	होय	6+4 =10	8	(a+b) > c
8सेमी, 6सेमी, 5सेमी	होय	6+5 = 11	8	(a+b) > c
8सेमी, 6सेमी, 6सेमी	होय (समद्विभुज त्रिकोण)	6+6 = 12	8	(a+b) > c
7सेमी, 4सेमी, 2सेमी	नाही	4+2 =6	7	(a+b) < c

i) शिक्षकांनी लहान बाजूंचीच बेरीज करायला का सांगितले असेल?

ii) तुम्हाला या कृतीतून त्रिकोणाच्या तीन बाजूंच्या लांबींमधील संबंधांबद्दल काय समजले?

कल्पना करा की,

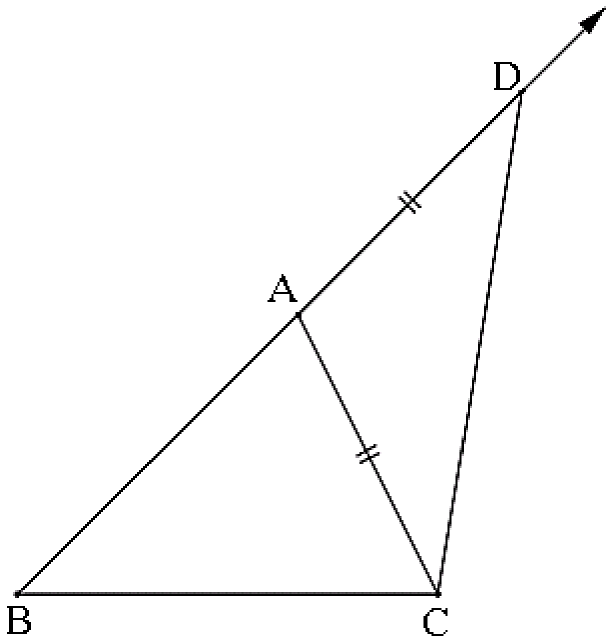
एका झाडावर एक घार बसलेली आहे आणि तिला झाडापासून काही अंतरावर जमिनीवर एक साप सरपटत चाललेला दिसत आहे.

अशा वेळेस ती घार झाडाच्या एकेका फांदीवरून मग खोडावरून चालत खाली येईल की, तिच्या जागेवरून थेट जमिनीवर झेप घेईल?

बरोब्बर. घार तिच्या जागेवरून थेट जमिनीवर झेप घेईल आणि सापाला पकडेल.

म्हणजे घारीलाही वरील प्रश्न (ii) चे उत्तर माहित आहे वाटतं!

प्रमेय:



पक्ष: ΔABC हा कोणताही त्रिकोण आहे.

(म्हणजे हा विशिष्ट प्रकारचा नाही)

साध्य: $AB + AC > BC$

रचना: किरण BA वर D हा बिंदू असा घेतला की, AD = AC.

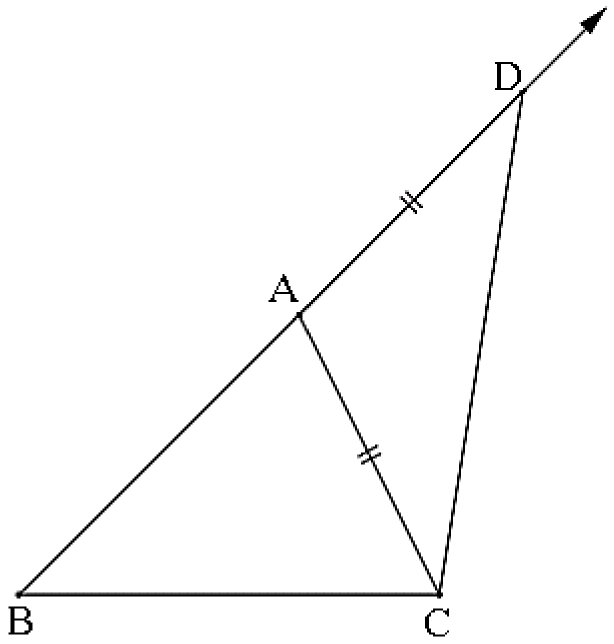
D व C बिंदू जोडले.

सिद्धता: यासाठी पुढील प्रश्नांची उत्तरे मिळविण्याचा प्रयत्न करा.त्यांवरून तुम्ही सिद्धता लिहू शकाल.

i) ज्या दोन बाजूंची बेरीज साध्यात पाहिजे त्या बाजूंना एक बिंदू सामाईक असला तरी त्या एकरेषीय आहेत का? त्यांची बेरीज दरम्यानतेने मिळेल का?

ii) त्यामुळे रचना काय केली? त्यातील D बिंदू ची जागा कशी निवडली आहे?

iii) $AB + AC = AB + AD = ?$



iv) त्यामुळे आता साध्याचे रूपांतर काय झाले?

v) बाजू BC आणि बाजू BD यांनी कोणता त्रिकोण तयार झाला आहे?

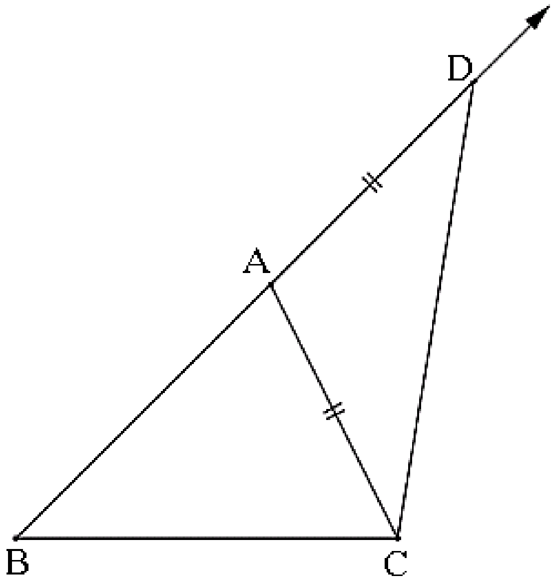
vi) त्रिकोणाची एक बाजू दुसरीपेक्षा मोठी दाखविण्यासाठी त्यांच्या समोरील कोनांचा कसा उपयोग करतात?

vii) त्यासाठी Δ BDC मध्ये कोणता कोन कोणत्या कोनापेक्षा मोठा सिद्ध करावा लागेल?

viii) ∠BDC म्हणजेच ∠ADC हा ज्या Δ ADC चा कोन आहे तो ΔADC कोणत्या प्रकारचा आहे? ∠ADC कोणत्या कोनाशी एकरूप आहे?

ix) ∠ACD व ∠BCD यांमधील मोठा कोन कोणता? तो कोन व ∠ADC यांमधील क्रमसंबंध कोणता? कारण काय?

x) आता प्रश्न (vii) मधील क्रमसंबंध सिद्ध झाला काय? त्यातून साध्य कसे सिद्ध होईल?



सिद्धता:

1) Δ ADC मध्ये ,रेख AC $\cong$ रेख AD …(रचना)

$\angle ACD \cong \angle ADC$………………… (समद्विभुज कोनाच्या एकरूप बाजूंसमोरील कोन)

2) $m\angle BCD = m\angle ACD + m\angle BCA$…(कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

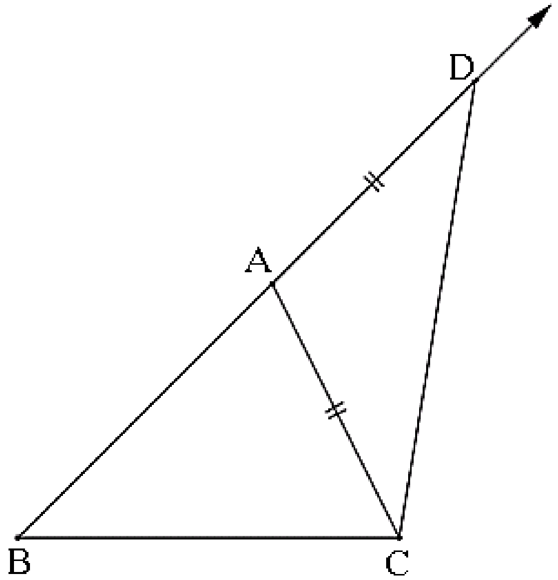
$\therefore m\angle BCD > m\angle ACD$ …………….($m\angle BCA$ ही धन संख्या वगळल्याने)

3) $\therefore m\angle BCD > m\angle ADC$ …….(विधान (1) व (2) वरून)

4) $m\angle BCD > m\angle BDC$ …………(B-A-D)

हे एकाच त्रिकोणाचे कोन आहेत.

$\therefore \Delta$ BDC मध्ये,BD > BC ………(एकाच त्रिकोणात मोठ्या कोनासमोरील बाजू ही लहान कोनासमोरील बाजूपेक्षा मोठी असते.)



5) BD = BA + AD ………………..(B-A-D)

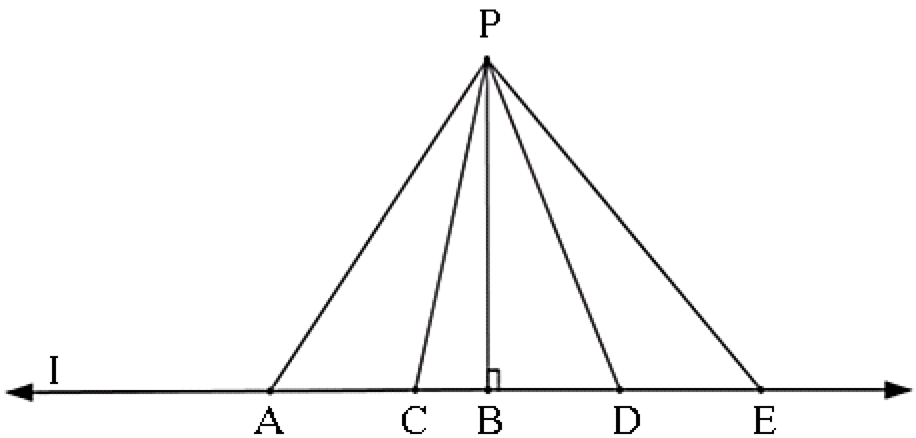
6) ∴ BA + AD > BC ……………..(विधान (4) व (5) वरून)

∴ BA + AC > BC ………………(रचनेनुसार AD =AC)

निष्कर्ष :

कोणत्याही त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज ही उरलेल्या बाजूपेक्षा मोठी असते.

लघुत्तम रेषाखंडाचे प्रमेय:



आकृतीत रेषा l च्या बाहेरील P बिंदूतून रेषा l पर्यंत काही रेषाखंड काढलेले आहेत.

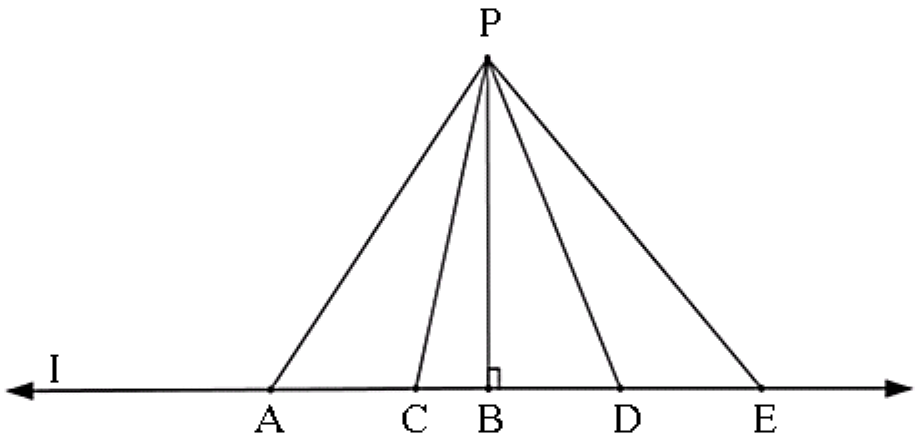
त्यांच्यांपैकी रेख PB चे वैशिष्ट्ये काय सांगता येतील?

रेख PB ⊥ रेषा l आहे. इतर कोणताही रेषाखंड रेषा l ला लंब नाही.

तसेच त्याच्या लांबीला P बिंदू व रेषा l यांमधील अंतर म्हणतात.

आता याच लंब रेषाखंडाचे आणखी एक वैशिष्ट्य बघू या.

काटकोन त्रिकोणाची सर्वात मोठी बाजू कोणती हे आता आपण सिद्ध केलेले आहे त्याचा येथे विचार करुन पुढील उत्तरे शोधून लिहा.



i) रेख PB ही बाजू असलेले आकृतीमधील सर्व त्रिकोण कोणत्या प्रकारचे आहेत?

ii) त्यांपैकी कोणताही एक त्रिकोण निवडा व त्याचा कर्ण आणि रेख PB यांच्या लांबीतील संबंध चिन्हात लिहा.

iii) रेख PB ही बाजू असलेले आकृतीमधील इतर त्रिकोणांमध्ये वरील प्रश्न 2 चे उत्तर शोधा. त्याचा कर्ण आणि रेख PB यांच्या लांबीतील संबंध चिन्हात लिहा.

iv) आता वरील चारही प्रश्नांच्या उत्तरांमध्ये काय सामाईक गुणधर्म दिसतो?

उत्तरे:

i) रेख PB ही बाजू असलेले आकृतीमधील काटकोन त्रिकोण ΔPBA, ΔPBC, ΔPBD व ΔPBE आहेत.

ii) ΔPBA हा काटकोन त्रिकोण घेतल्यास त्याचा कर्ण रेख PA आहे.
कर्ण ही काटकोन त्रिकोणाची सर्वात मोठी बाजू असते. $\therefore PB < PA$

iii) त्याचप्रमाणे ΔPBC मध्ये, रेख PC हा कर्ण आहे.
$\therefore PB < PC$ त्याचप्रमाणे ΔPBD मध्ये, $\therefore PB < PD$
त्याचप्रमाणे ΔPBE मध्ये, $\therefore PB < PE$

iv) या सर्व विधानांवरून आपल्याला कळते की, रेख PB हा रेषाखंड सर्वात लहान आहे.

v) असे कितीही रेषाखंड P बिंदूपासून रेषा l पर्यंत काढले तरी नेहेमी त्या रेषेला लंब रेषाखंड हा सर्वात लहान (लघुत्तम) असतो.

निष्कर्ष: दिलेल्या रेषेपर्यंत तिच्या बाहेरील कोणत्याही बिंदूतून काढलेल्या सर्व रेषाखंडांपैकी त्या रेषेला लंब असलेला रेषाखंड हा सर्वात लहान असतो.

काटकोन त्रिकोणांची एकरूपता:

काटकोन त्रिकोणांची एकरूपता दाखविण्यासाठी मागील कसोट्यांखेरीज आणखी एक महत्वाची रीत आहे. त्याला **’कर्ण-भुजा प्रमेय’** म्हणतात.

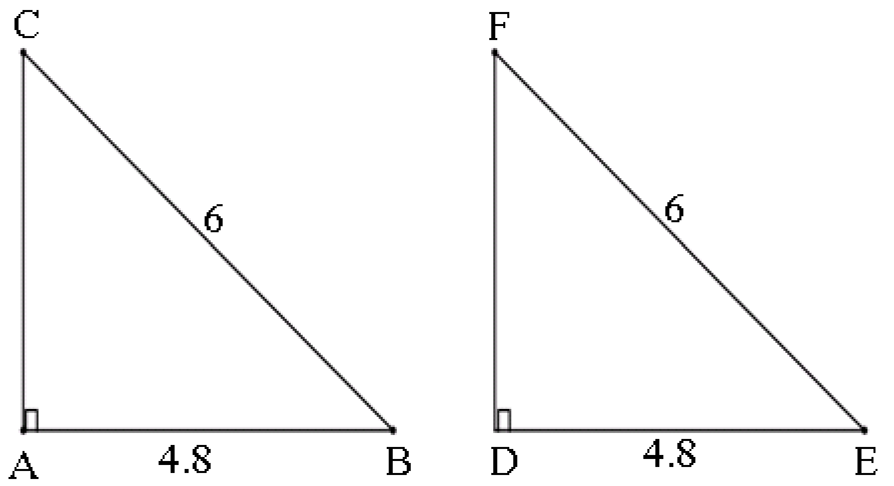
’प्रमेय ’ या शब्दावरून तुम्हाला कळले असेल की ते आपण सिद्ध करू शकतो.

त्याच्या अटी काय?

कर्ण-भुजा प्रमेय:

जर एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू हे घटक अनुक्रमे दु स-या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू यांच्याशी एकरूप असतील तर ते त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

याचा प्रथम पडताळा पाहू. पण आता त्रिकोण कागदावरून कापून घेण्याऐवजी ’पायथागोरसच्या प्रमेया’ ने तिस-या बाजूंची लांबी आपण आकडेमोडीने ठरवू.



पायथागोरसचे प्रमेय:

कोणत्याही काटकोन त्रिकोणात, (कर्ण)^2 = इतर दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज

$\therefore$ ΔABC मध्ये, $\angle CAB = 90°$

$\therefore$ $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ …….(पायथागोरसचे प्रमेय)

$\therefore (6)^2 = (4.8)^2 + (AC)^2$

$\therefore$ $(6)^2 - (4.8)^2 = (AC)^2$

$(6 + 4.8) (6 – 4.8) = (AC)^2$

$\therefore$ $(10.8)(1.2) = (AC)^2$

$\therefore 12.96 = (AC)^2$

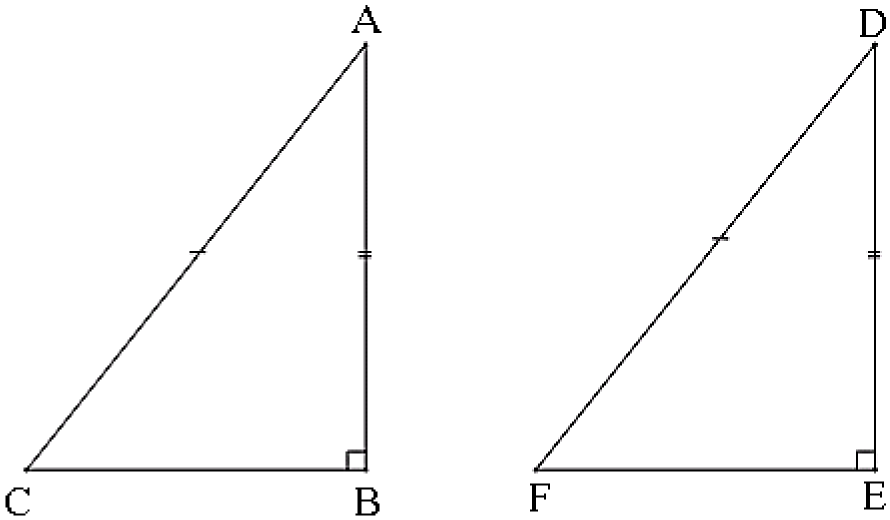
$\therefore (AC) = 3.6$

याचप्रकारे ΔEDF मध्ये, ED = 3.6 हीच किंमत मिळते.

आता या दोन्ही त्रिकोणांच्या संगत बाजूंच्या तीनही जोड्या एकरूप आहेत हे कळले.

त्याअर्थी हे त्रिकोण बा-बा- बा एकरूपतेच्या कसोटीने ते एकमेकांशी एकरूप आहेत हे कळले.

कर्ण-भुजा प्रमेय :



पक्ष: ΔABC व ΔDEF या त्रिकोणात अनुक्रमे

$\angle ABC$ व $\angle DEF$ हे काटकोन आहेत.

कर्ण AC ≅ कर्ण DF व रेख AB ≅ रेख DE

साध्य: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

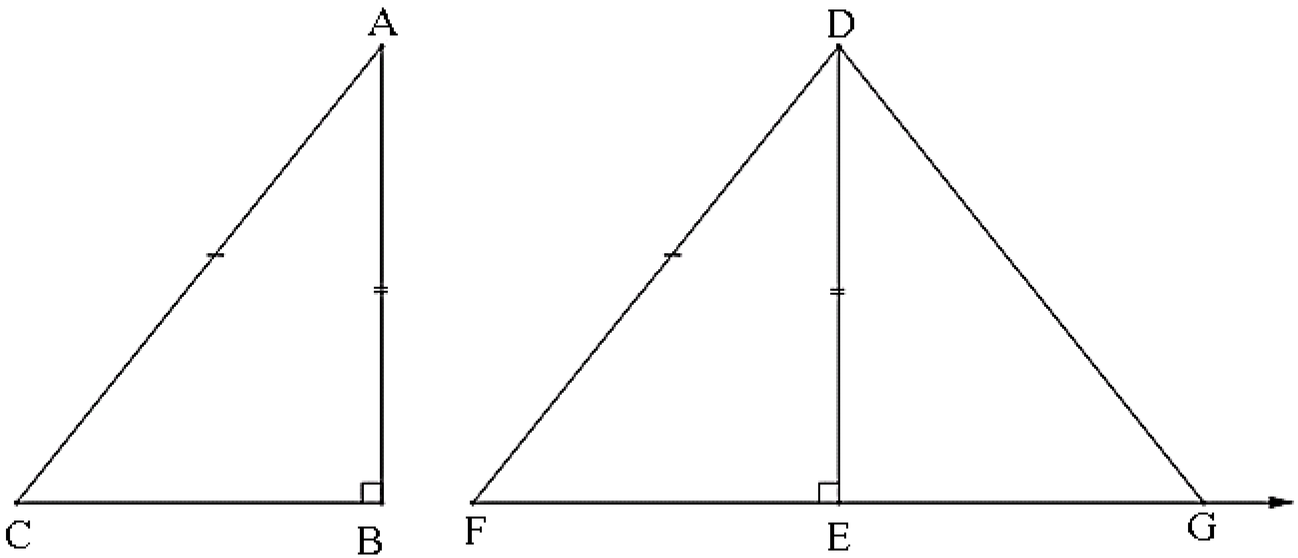
या प्रमेयाच्या सिद्धतेत आपण एक नवीन पद्धत शिकणार आहोत.

येथे आपण रचना करून असा एक तिसरा त्रिकोण काढणार आहोत की तो साध्यातल्या दोन्ही त्रिकोणाशी एकरूप सिद्ध होईल.

नंतर संक्रमकतेच्या गुणधर्मानुसार साध्यातील त्रिकोण एकमेकांशी एकरूप सिद्ध होतील.

रचना काळजीपूर्वक बघा :

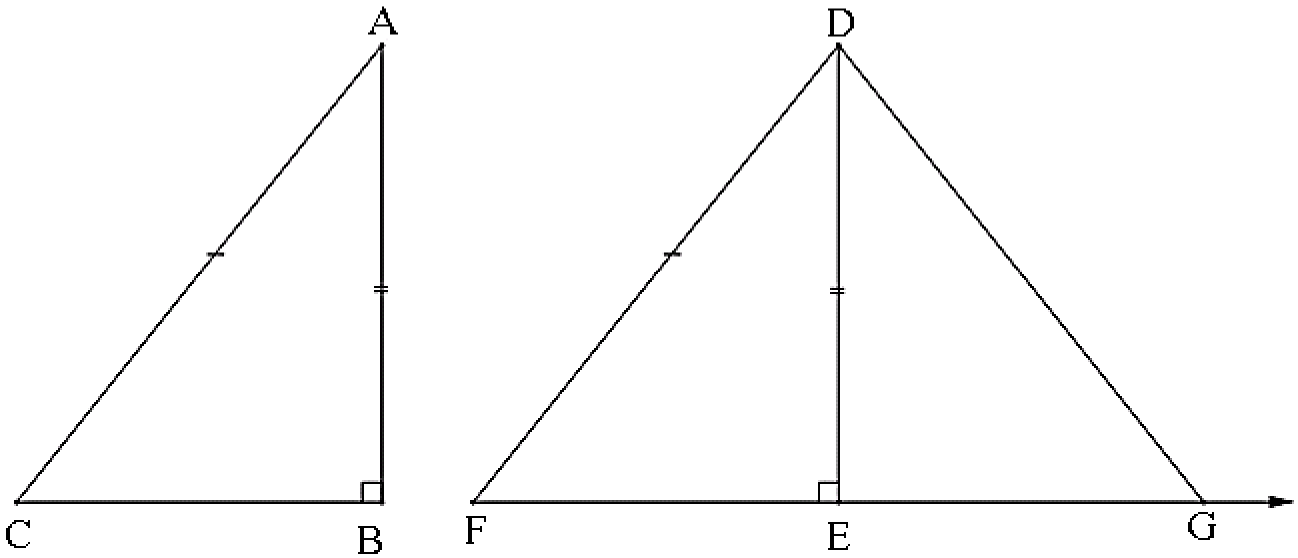
T3_L9



रचना:

किरण FE वर G बिंदू असा घेतला की, F- E- G व EG = BC

रेख DG काढला.

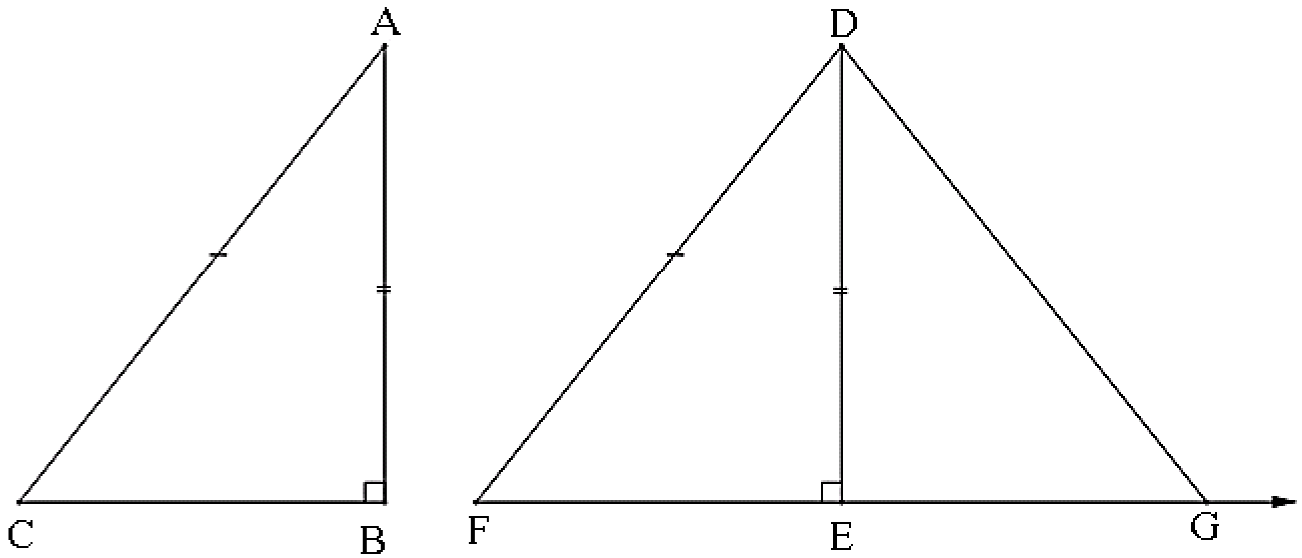


पुढील प्रश्नांची उत्तरे शोधण्याचा प्रयत्न करा. ती उत्तरे ओळीने लिहून काढा.

1) ΔDEG हा तयार झालेला त्रिकोण जर दिलेल्या दोन्ही त्रिकोणांशी एकरूप सिद्ध करायचा आहे तर तो कोणत्या प्रकारचा असला पाहिजे ?

2) ते कसे दाखवाल ?

3) आता ΔDEG व ΔABC यांच्यातील एकरूप घटकांची यादी करा. त्यासाठी पक्ष व रचनेतील एकरूप बाजू, कोन यांची यादी करा.

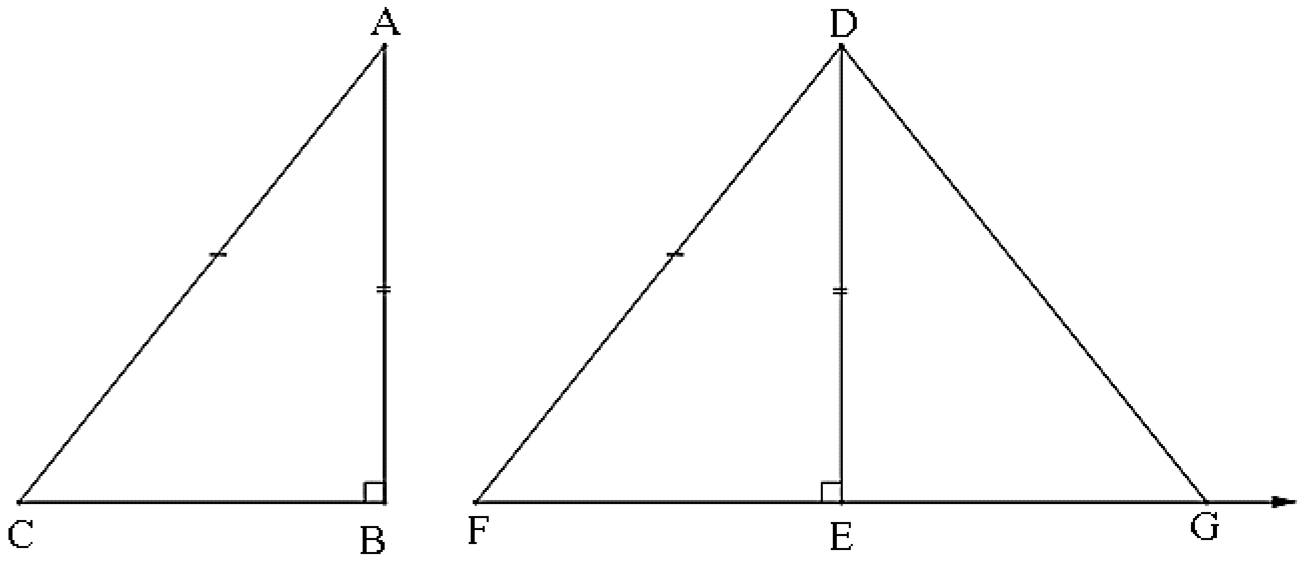


4) हे त्रिकोण कोणत्या कसोटीने एकरूप सिद्ध करता येतील ?

5) एकरूप त्रिकोणांच्या संगत घटकांबद्दल आपल्याला काय माहिती आहे ? त्यावरून त्यांच्यातील संगत बाजूंची कोणती नवीन जोडी एकरूप सिद्ध होईल ?

6) ∆ ABC चा कर्ण AC हा ∆DEG च्या कोणत्या बाजूशी एकरूप सिद्ध होईल?

7) पक्षामध्ये कर्ण AC हा कोणत्या बाजूशी एकरूप दिला आहे?



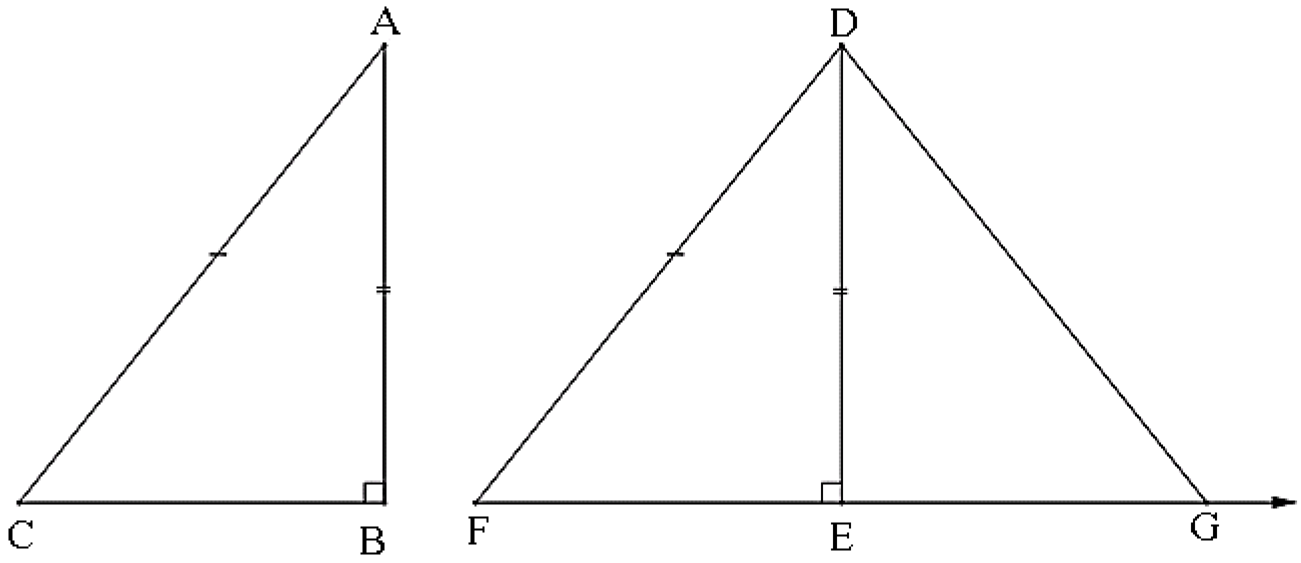
8) विधान (vi) व (vii) वरून ΔDFG कोणत्या प्रकारचा त्रिकोण आहे हे सिद्ध झाले ?

9) त्यामुळे ΔDFG चे कोणते कोन परस्परांशी एकरूप आहेत हे कळेल ?

10) आता ΔDEF व ΔDEG हे परस्परांशी एकरूप सिद्ध करता येईल का? कोणत्या कसोटीने?

11) आता विधान (iv) व (x) चा एकत्र विचार करा त्यातून एकरूप त्रिकोणांची कोणती नवीन जोडी मिळेल? आता साध्य झाले आहे का ?

या प्रश्नाची उत्तरे तुम्हाला मिळाली की सिद्धता तयार होईलच फक्त ती सुसूत्र प्रकारे लिहून काढा.

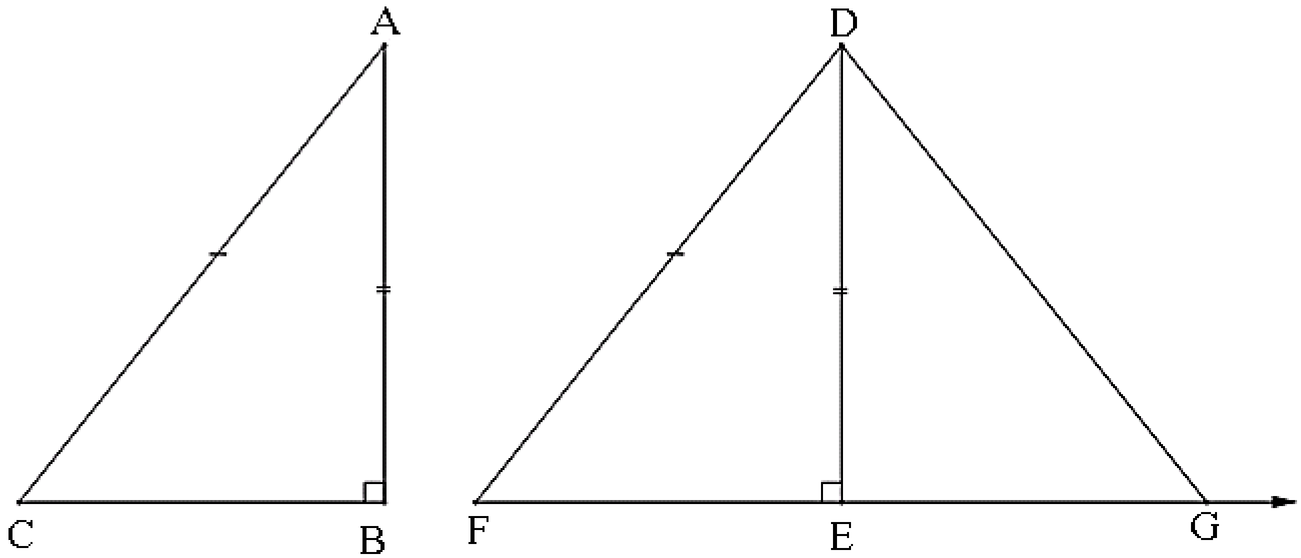


पक्ष: ∆ABC व ∆DEF या त्रिकोणात अनुक्रमे ∠ABC व ∠DEF हे काटकोन आहेत. कर्ण AC ≅ कर्ण DF व रेख AB ≅ रेख DE

साध्य: ∆ ABC ≅ ∆DEF

रचना: किरण FE वर G बिंदू असा घेतला की, F-E-G व EG=BC रेख DG काढला.

कर्ण – भुजा प्रमेय:



सिद्धता:

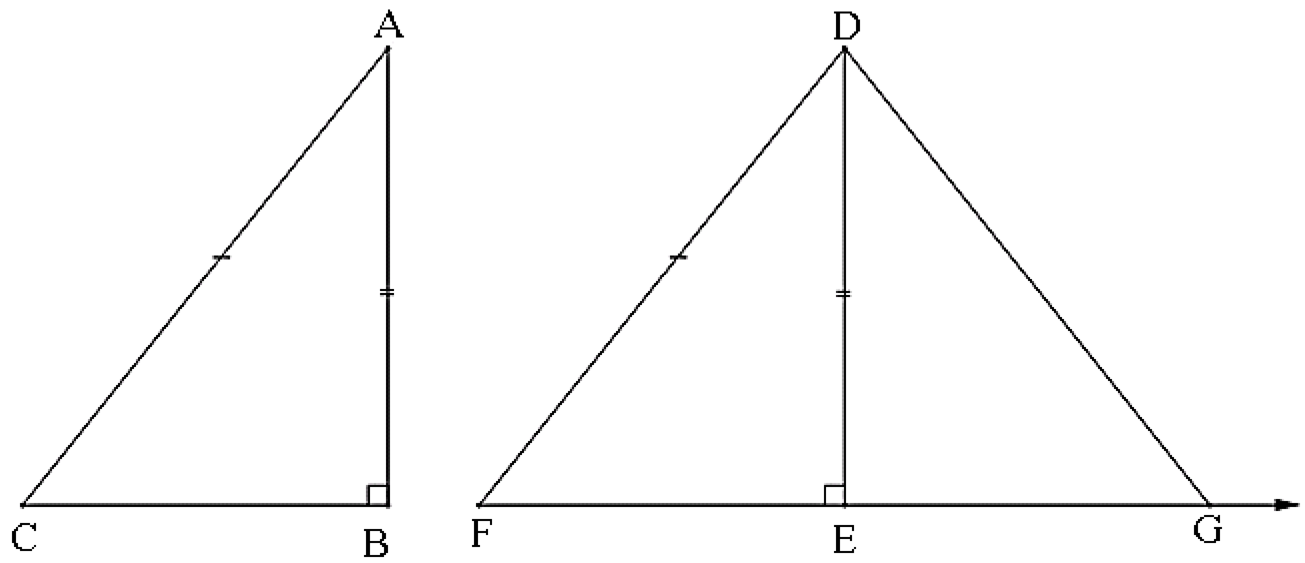
1) F-E-G अशी दरम्यानता आहे (रचना)

$\therefore \angle DEF$ व $\angle DEG$ रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

$\therefore m\angle DEF + m\angle DEG = 180^\circ$ ... (रेषीय जोडीतील कोनांचे गृहितक)

$\therefore 90 + m\angle DEG = 180^\circ$ ...... (पक्ष: $m\angle DEF = 90^\circ$)

$\therefore m\angle DEG = 90$, ΔDEG काटकोन त्रिकोण आहे.



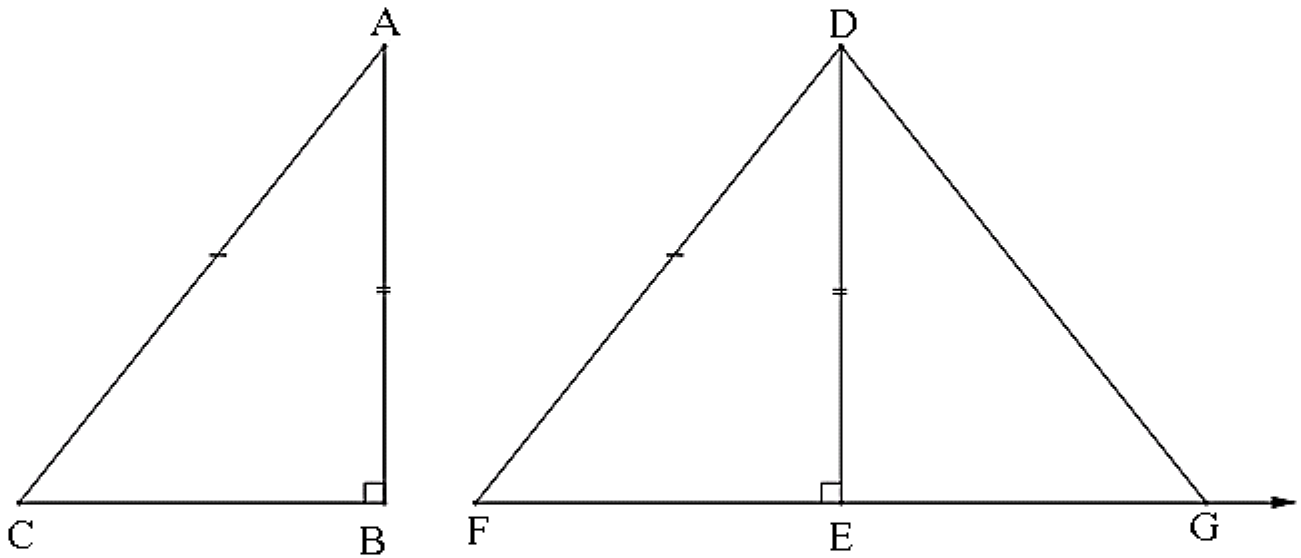
2) ∆DEG व ∆ABC मध्ये ,

रेख DE ≅ रेख AB …. (पक्ष)

∠DEG ≅∠ABC ....(प्रत्येकी काटकोन)

रेख EG ≅ रेख BC .... (रचना)

∆DEG ≅∆ABC ....(बा-को-बा एकरूपता कसोटी)



3) ∴ रेख DG ≅ रेख AC... (एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)

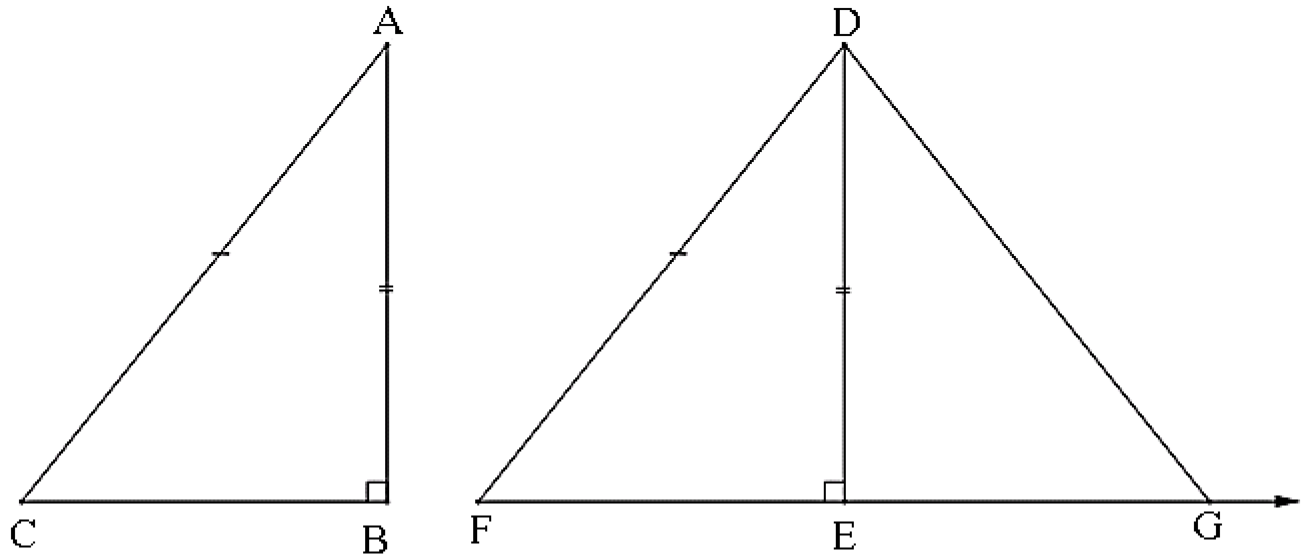
4) रेख AC ≅ रेख DF.... (पक्ष)

5) ∴ रेख DG ≅ रेख DF..... (विधान 3 व 4 वरून)

6) ΔDGF हा समद्विभुज त्रिकोण आहे

∴ ∠DFG ≅ ∠DGF (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

म्हणजेच ∠DFE ≅ ∠DGE



7) ΔDEF व ΔDEG मध्ये

रेख DE ≅ रेख DE ....(सामाईक बाजू)

∠DEF ≅ ∠DEG ....(प्रत्येक काटकोन)

∠DFE ≅ ∠DGE ....(विधान 6 वरून)

∴ ΔDEF ≅ DEG ....(बा-को-को कसोटी)

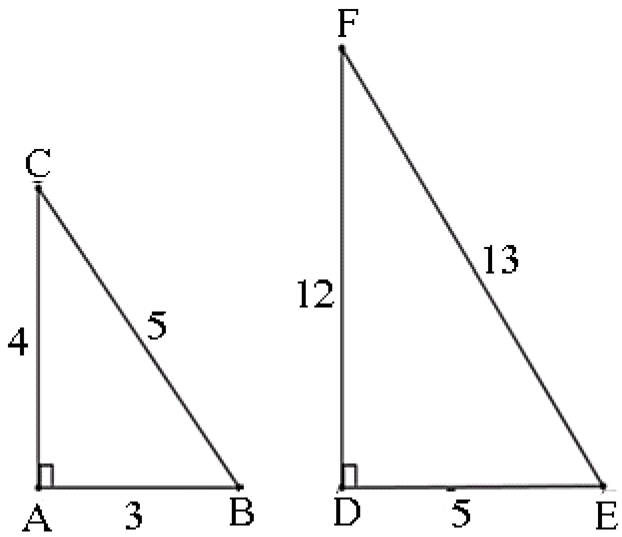
8) ∴ ΔABC ≅ ΔDEF ....(विधान 2 व 7 वरून संक्रमकतेने)

निष्कर्ष:

जर एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू अनुक्रमे दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व संगत बाजू यांच्याशी एकरूप असतील तर ते दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

हे प्रमेय शिकल्यानंतर राही आणि नेहा यांच्यात एक दिवस वाद झाला आणि त्यांच्या इतर मैत्रिणींतही तो वाद पसरला. मग त्यांनी सगळयांनी त्यांच्या शिक्षकांनाच त्याबाबतची शंका विचारली. काय होता त्यांच्यातील वाद?

खालील आकृत्या काळजीपूर्वक बघा.



हे दोन काटकोन त्रिकोण कर्णभुजा प्रमेयानुसार एकरूप आहेत का?

नेहाचे म्हणणे होते की, आकृतीमधील त्रिकोण कर्ण –भुजा प्रमेयानुसार एकरूप आहेत कारण एकतर ते काटकोन त्रिकोण आहेत जी प्रमेयाची पहिली अट आहे.

दुसरे म्हणजे ΔABC चा कर्ण BC हा ΔDEF च्याबाजू DE शी एकरूप आहे. (दोन्हींची लांबी = 5) त्यामुळे 'कर्ण-भुजा प्रमेयात सांगितल्याप्रमाणे हे त्रिकोण एकरूप आहेतच."

राहीचे म्हणणे, ”आपण हे त्रिकोण ट्रेस पेपरवर काढून घेतले आणि एकमेकांवर ठेवले तर ते एकमेकांशी तंतोतंत जुळत नाहीत कारण मी तसे करूनच पाहिले आहे. त्या अर्थी या प्रमेयात काही तरी चुकते आहे.”

त्यांच्या शिक्षकांनी त्यांच्यातील वाद कसा सोडविला असेल?

विचार करून बघा. शिक्षकांनी त्यांना प्रमेयाचा निष्कर्ष परत एकदा नीट वाचण्यास सांगितले.

कर्ण-भुजा प्रमेय:

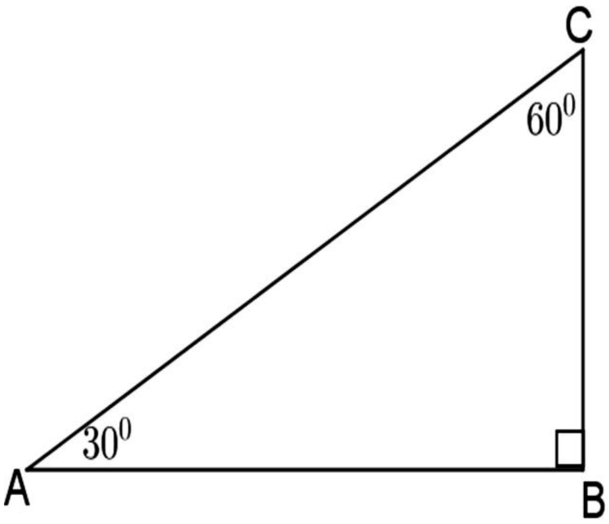
जर एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू हे घटक अनुक्रमे दुस-या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू यांच्याशी एकरूप असतील तर ते त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

या विधानात असे सांगितले आहे का एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण हा दुस-या काटकोन त्रिकोणाच्या बाजूशी एकरूप असला पाहिजे?

नाही. विधानातील अनुक्रमे याकडे दोघींचे दुर्लक्ष झाल्याने त्यांना चुकीचा निष्कर्ष मिळाला होता.

काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावरील मध्यगेची लांबी कर्णाच्या निम्मी असते या प्रमेयाची सिद्धता 'चौकोन ' ह्या प्रकरणात शिकणार आहोत.

एक विशेष काटकोन त्रिकोण:



तुमच्या कंपासपेटीत दोन गुण्ये असतात ते दोन्ही विशेष प्रकारचे असतात कारण त्याच्या लघुकोनांची मापे व बाजूंची लांबी यात विशेष संबंध असतो.

त्यांपैकी ज्याच्या लंब बाजू एकरूप नसतात त्याच्या लघुकोनांची मापे मोजून पहा.

त्यांची मापे **30°** व **60°** आहेत.

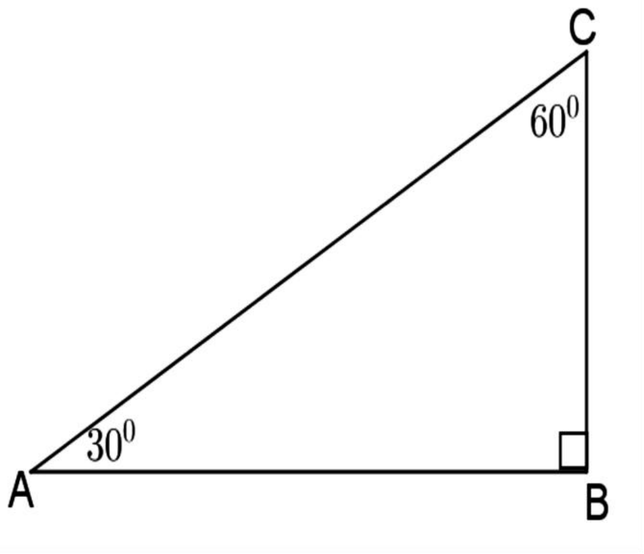
अशा त्रिकोणाला **30°, 60°, 90°** मापाचा त्रिकोण म्हणतात.

आकृतीमधील **ΔABC** मधील **∠ABC** हा काटकोन असून **m∠BAC = 30°** व **m∠ACB = 60°**

असे तीन, **चार** त्रिकोण बाजूंची लांबी वेगवेगळी घेऊन काढून घ्या.

प्रत्येकाचा कर्ण पट्टीने मोजून घ्या.

नंतर **30°** मापाच्या कोनासमोरील बाजूची लांबी मोजून लिहून ठेवा.



त्यांवरून BC व AC यांच्या लांबींमधील संबंध शोधा.

निष्कर्ष :

30°, 60°, 90° मापाच्या त्रिकोणात **30°** मापाच्या कोनासमोरील बाजूची लांबी त्याच्या कर्णाच्या निम्मी असते.

30°, 60°, 90° मापाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास:

या प्रमेयाचा व्यत्यासही सत्य असतो.

जर एखाद्या काटकोन त्रिकोणात सर्वात लहान बाजू कर्णाच्या निम्म्या लांबीची असेल तर त्या बाजूसमोरील कोन 30° मापाचा असतो.

Exercise

1) खालील विधाने सत्य होण्यासाठी रिकाम्या जागा भरा.

i) त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची लांबी तिसऱ्या बाजूपेक्षा ....असते.

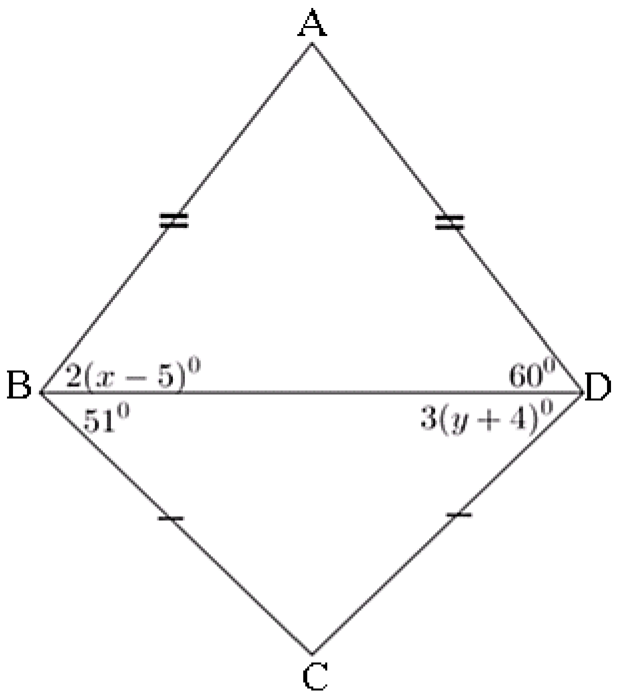
ii) जर त्रिकोणाचे कोणतेही दोन कोन एकरूप नसतील तर मोठ्या कोनासमोरील बाजू ......असते.

iii) रेषेबाहेरील बिंदूपासून रेषेवर काढलेल्या रेषाखंडापैकी.......रेषाखंड सर्वात लहान असतो.

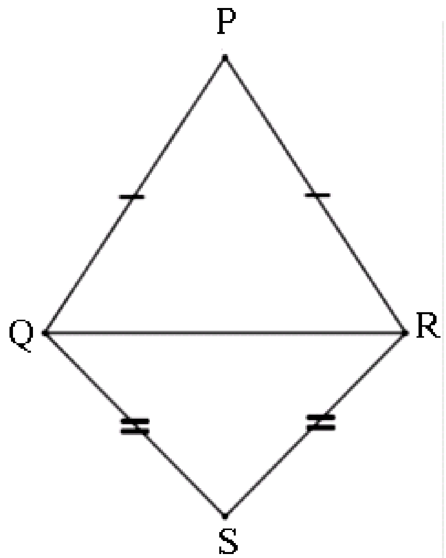
iv) जर त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप नसतील तर मोठ्या बाजूसमोरील कोन हा.......असतो.

v) काटकोन त्रिकोणात कर्ण ही......बाजू असते.

2) दिलेल्या आकृतीवरून x आणि y च्या किंमती काढा.



3)



शेजारील आकृतीत,

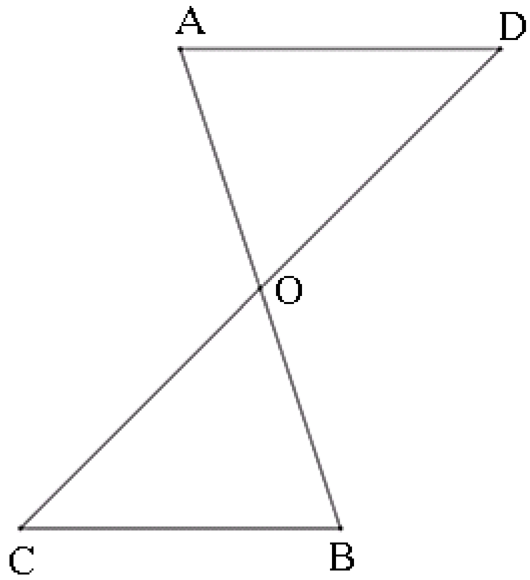
रेख PQ ≅ रेख PR,

आणि रेख QS ≅ रेख RS,

तर सिद्ध करा की,

∠PQS ≅ ∠PRS

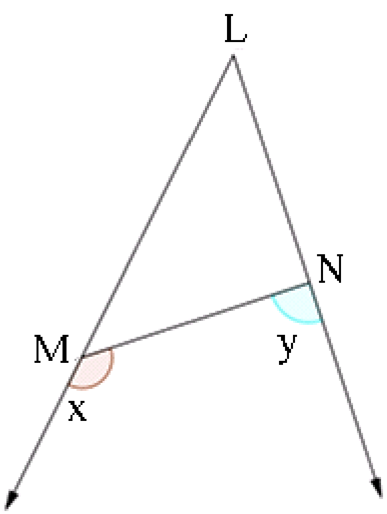
4)



आकृती मध्ये, बिंदू O हा रेषाखंड AB व रेषाखंड CD चा मध्यबिंदू आहे.

सिद्ध करा की, रेख AD ∥ रेख BC.

5)



पक्ष : आकृतीमध्ये x > y

साध्य : बाजू LM > बाजू LN.

ह्या सिध्दतेसाठी पुढील प्रश्नांची उत्तरे शोधण्याचा प्रयत्न करा व योग्य क्रमाने त्यांची मांडणी करून सिध्दता लिहा.

प्रश्न 1 : साध्यात बाजू LM > बाजू LN दाखवायला सांगितले आहे म्हणून त्रिकोणाच्या असमानतेच्या संबंध कोणते प्रमेय वापरले पाहिजे?

प्रश्न 2 : त्यासाठी $\angle LMN$ व $\angle LNM$ मध्ये कोणता संबंध झाला पाहिजे?

प्रश्न 3 : पक्षातील x व y यांचा $\angle LMN$ यांचा $\angle LNM$ ह्यांच्याशी कोणता संबंध आहे?

प्रश्न 4 : $x > y$ या पक्षातील माहितीवरून (180-x) व (180-y) यामधील क्रमसंबंधाचे चिन्ह ठरवा.

बीजगणिताच्या प्रकरण 2 मधील कोणते गुणधर्म वापरले पाहिजेत?

6) a) ΔPQR आणि ΔMNK मध्ये,

बाजू $PQ \cong$ बाजू MN, बाजू $QR \cong$ बाजू NK, आणि $\angle Q > \angle N$

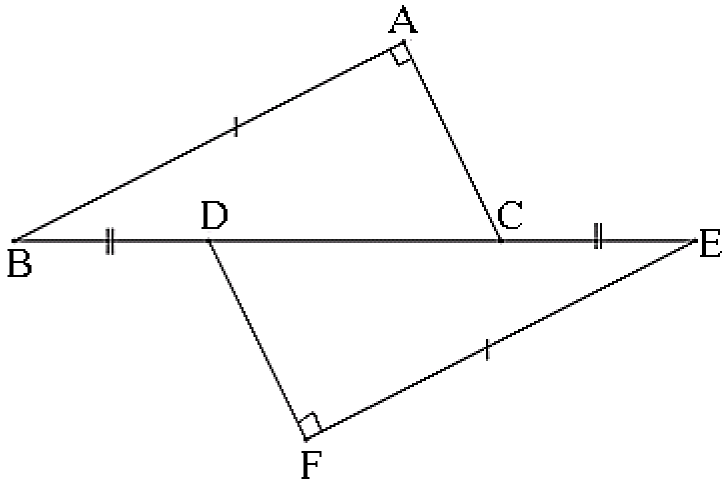
बाजू RP आणि बाजू KM मधील संबंध लिहा.

b) ΔABC आणि ΔXYZ मध्ये,

बाजू $BC \cong$ बाजू YZ, बाजू $AC \cong$ बाजू XZ, आणि $\angle C < \angle Z$

बाजू AB आणि बाजू XY मधील संबंध लिहा.

7)



रेख BA ⊥ रेख CA,

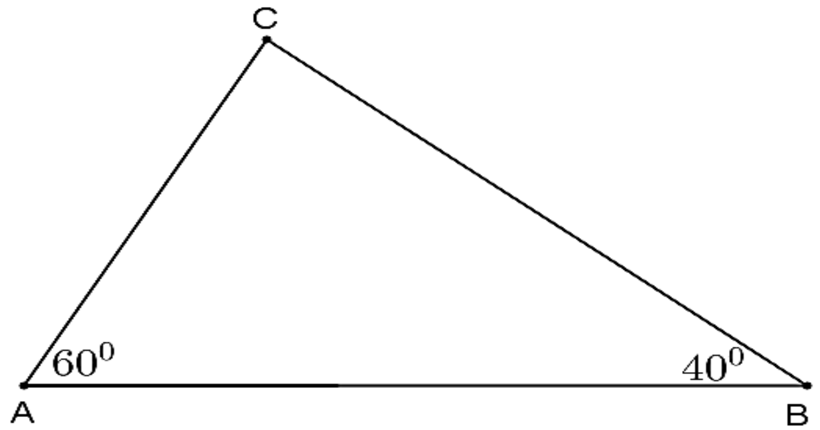
रेख EF⊥ रेख DF (B –D –C – E) ,

रेख AB ≅ रेख FE आणि रेख BD ≅ रेख EC,

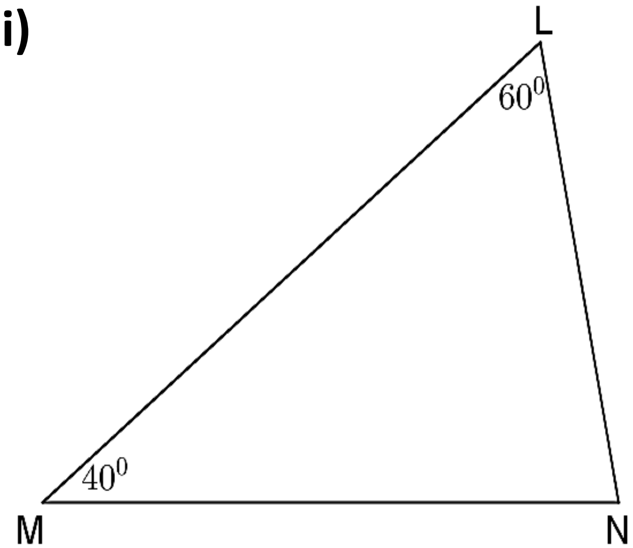
तर सिद्ध करा की, रेख AC ≅ रेख FD.

8) आकृतीमधील एकरूप त्रिकोण कोणते? कोणत्या कसोटीने?

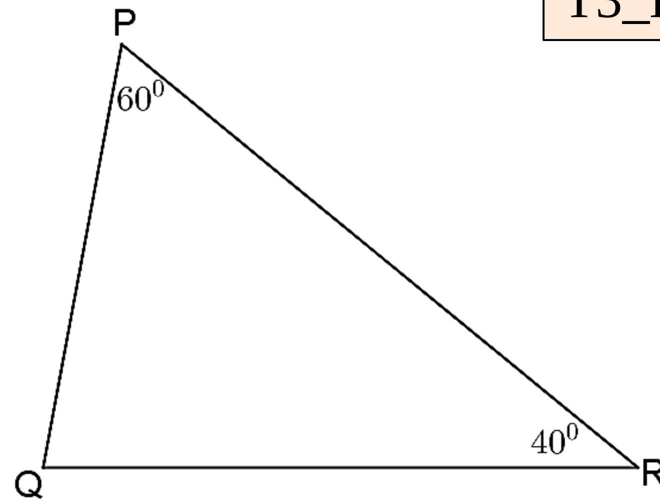
i)



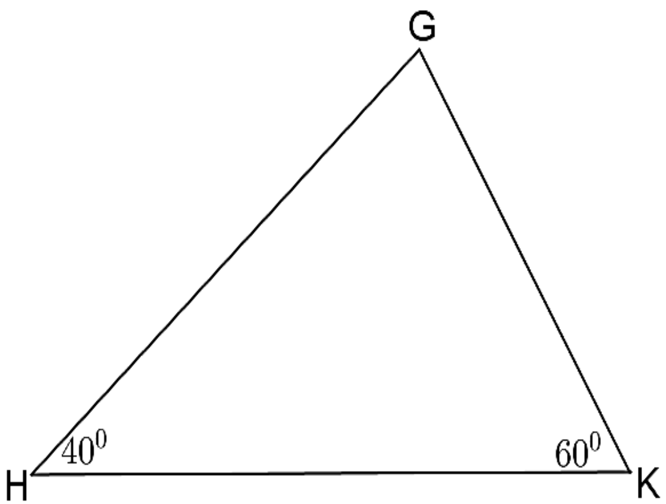
ii)



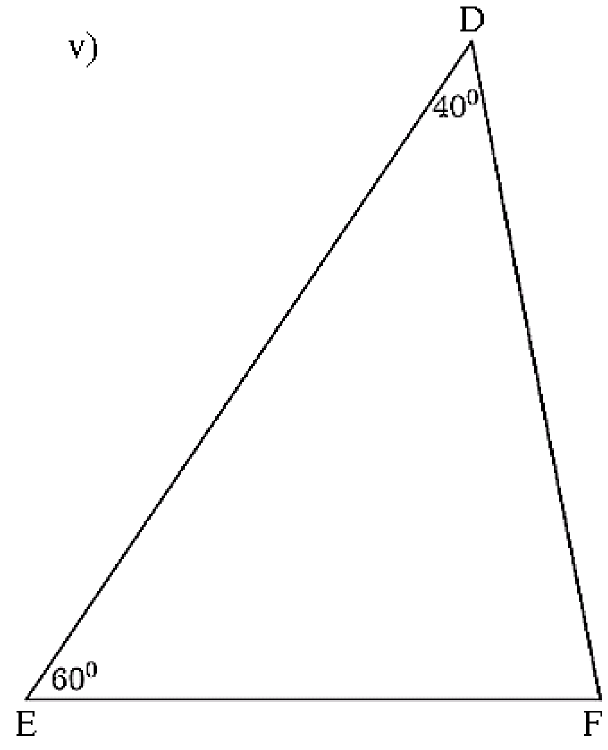
iii)



iv)



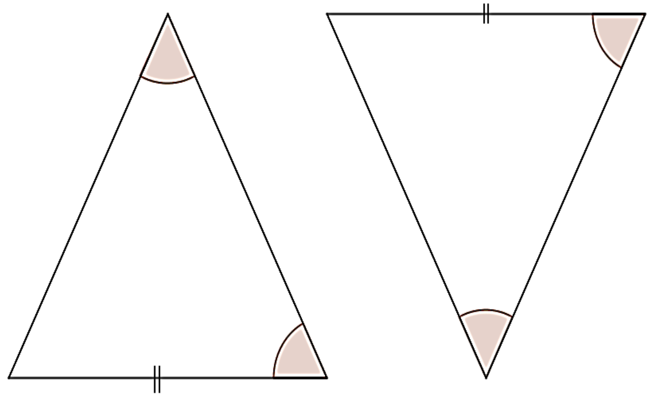
v)



Assessment

1) खालील आकृत्यांमध्ये दोन त्रिकोणांचे एकरूप घटक सारख्या चिन्हाने दाखविलेले आहेत. त्रिकोणांच्या एकरूपतेच्या कोणत्या कसोटीनुसार दोन त्रिकोण एकरूप आहेत ते लिहा.

a)



(a)

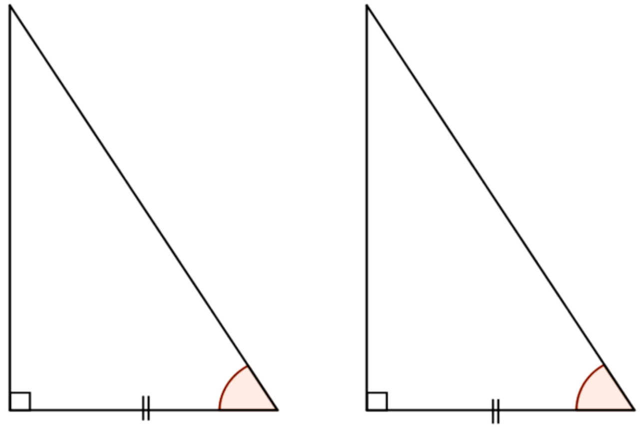
i) बा – बा – बा एकरूपता कसोटी

ii) बा – को – बा एकरूपता कसोटी

iii) बा – को – को एकरूपता कसोटी

iv) को – बा – को एकरूपता कसोटी

b)



(b)

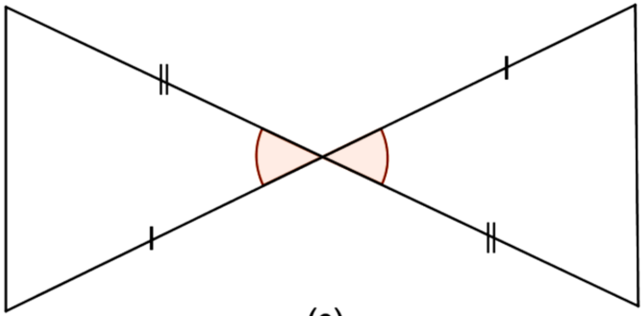
i) बा – बा - बा एकरूपता कसोटी

ii) बा – को – बा एकरूपता कसोटी

iii) बा – को – को एकरूपता कसोटी

iv) को – बा – को एकरूपता कसोटी

c)



(c)

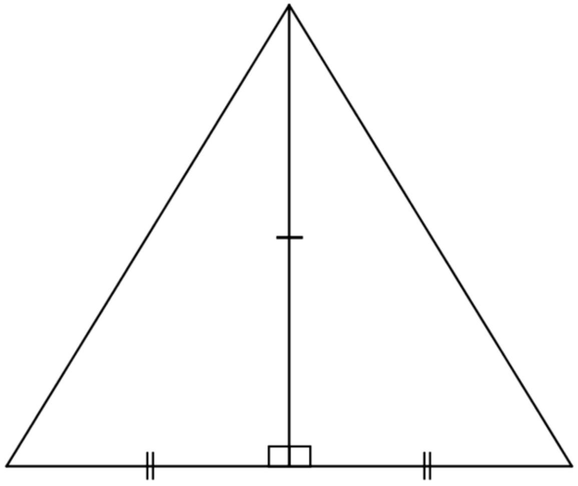
i) बा – बा – बा एकरूपता कसोटी

ii) बा – को – बा एकरूपता कसोटी

iii) बा – को – को एकरूपता कसोटी

iv) को – बा – को एकरूपता कसोटी

d)



(d)

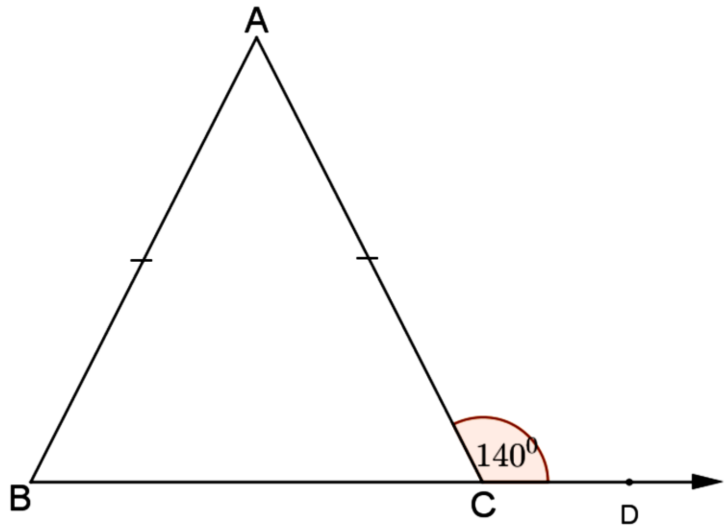
i) बा – बा – बा एकरूपता कसोटी

ii) बा – को – बा एकरूपता कसोटी

iii) बा – को – को एकरूपता कसोटी

iv) कर्ण भुजा प्रमेय

2)



आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे रेख AB = रेख AC आणि ∠ACD = 140^0, तर ∠A = ?

i) 50^0

ii) 40^0

iii) 140^0

iv) 30^0

3) ΔTPQ मध्ये, ∠T=65^0, ∠P=95^0 खालील पैकी कोणते विधान सत्य आहे ते लिहा.

a) PQ < TP < TQ

b) PQ < TQ < TP

c) TQ < TP < PQ

d) TP < PQ < TQ.

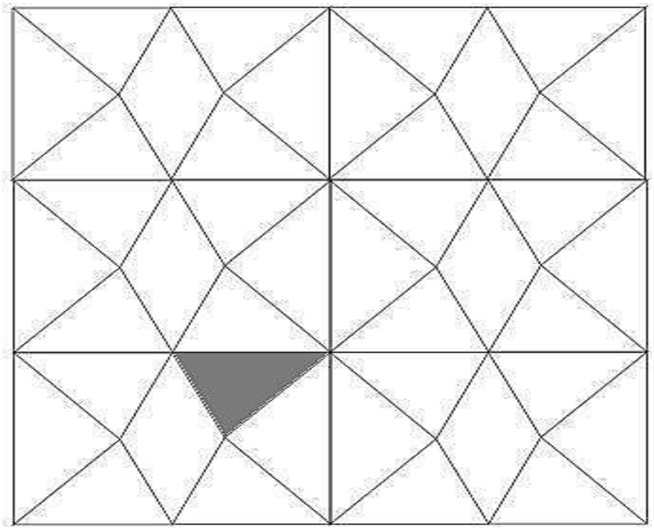
4) ΔABC मध्ये, AB=14, BC=19 आणि AC=17.

खालील पैकी कोणते विधान सत्य आहे ते लिहा.

a) ∠B > ∠C > ∠A.   b) ∠A > ∠B > ∠C.

c) ∠C > ∠A > ∠B.   d) ∠A > ∠C > ∠B.

5) खालील आकृतीत रंगविलेल्या त्रिकोणाशी एकरूप असलेले त्रिकोण रंगवा आणि त्यांची संख्या =......



a) 36

b) 24

c) 12

d) 08