प्रकरण 5 : चौकोन

संकल्पना चित्र

पूर्वज्ञान :

त्रिकोणांची एकरूपता व कसोट्या, विविध चौकोनांची ओळख समांतर रेषा, त्यांनी छेदिकेशी केलेले कोन, समांतर रेषांच्या कसोट्या, पायथागोरसचा सिद्धांत

↓

बहिर्वक्र चौकोन संकल्पना व त्यांच्या सर्व कोनांची बेरीज = 360^0 हे सिद्ध करणे.

↓

समांतरभुज नसणारे चौकोन

i) समलंब चौकोन
ii) समद्विभुज समलंब चौकोन
iii) पतंग

यांच्या व्याख्या. त्यांचे विशेष गुणधर्म सिद्ध करणे.

समांतरभुज चौकोन:

i) व्याख्या
ii) गुणधर्म
iii) समांतरभुज चौकोनासाठी कसोट्या सिद्ध करणे व त्यांचे उपयोजन.

↓

i) तीन समांतर रेषांच्या आंतरछेदाचे प्रमेय.
ii) त्रिकोणांच्या दोन बाजूंच्या मध्यबिंदूंचे प्रमेय.
iii) त्याचा व्यत्यास यांच्या सिद्धता व त्यांचे उपयोजन.

समांतरभुज चौकोनाचे प्रकार

i) आयत
ii) समभुज चौकोन
iii) चौरस

यांच्या व्याख्या व त्यांचे विशेष गुणधर्म, त्यांचे व्यत्यास सिद्ध करणे व त्यांचे उपयोजन, काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावरील मध्यगेचा गुणधर्म.

चौकोन : विषय प्रवेश

रोहितच्या वर्गाला गणिताच्या शिक्षकांनी दिवाळीच्या सुट्टीत एक छान काम दिले होते. मुलांनी आपल्याभोवती जिथे जिथे चौकोन वापरलेले दिसतील त्यांचे Tab वर फोटो काढून आणायचे आणि ते वर्गात सगळ्यांना दाखवायचे.

पण सुट्टी संपली तरी रोहितने काहीच काम केले नव्हते आणि त्याला खोटी चिठ्ठी देणार नाही असे आईने तर त्याला बजावलेच होते.

आळशी रोहित त्यामुळे वैतागला होता.

रात्री झोपताना त्याच्या मनात विचार आला,

या जगातून सर्व चौकोन आजच्या रात्रीत नाहीसे झाले तर?.....

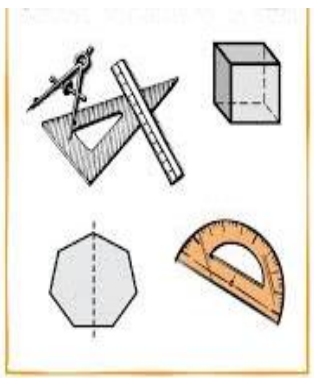
किती मजा येईल.

तेवढ्यात त्याचे लक्ष शेजारच्या गजराच्या घड्याळाकडे गेले.

रोहित खूश झाला . उद्या सकाळी हे घड्याळ नाहीसे झालेले असणार .

वा, वा गजर होणार नाही. लवकर उठायची कटकट असणार नाही.

इ.9वी भूमिती



रोहित गाढ झोपला.

अचानक त्याचे लक्ष गेले भूमितीच्या वही-पुस्तकाकडे.

त्यातली पाने ,कागद एक एक करीत नाहीशी होत गेली.

ते पाहून रोहितला कोण आनंद झाला.

उद्या शाळेत कसली धम्माल येईल.

रोहितला आठवली त्याची शाळा!

चौकोनी खिडक्या,

चौकोनी दारे,

चौकोनी भिंती

रोहितला आनंद झाला कारण आता तर

यातले काहीच शिल्लक राहणार नाही.

हा आपला वर्ग.

भिंतीवरचा काटकोनी फळा, शिक्षकांच्या टेबलाचा वरचा

पृष्ठभाग आणि बाकांचाही.

उद्या शाळेत मज्जाच येणार. सगळयांना मी सांगणार," हे

सर्व मी माझ्या इच्छेनुसार नाहीसे केलंय."

सगळे मला म्हणतील," वाहवा, रोहित झिंदाबाद"

आनंदाने नाचत बागडत रोहित गेला भाजी- मंडई मामाच्या हातगाडीकडे.

त्याला मज्जा सांगायला.

पाहतो तर काय?

वैतागलेला मामा भर रस्त्यावरच मांडी घालून भाजी विकायला

बसलेला!

रोहितने कारण विचारल्यावर मामा म्हणाला,' अरे काय त्रास

झालाय सकाळपासून. माझ्या हातगाडीची दशाच झालीय.

फक्त चाकेच शिल्लक राहिली आहेत.

गि-हाईकही नाही.त्यांच्याकडे चिल्लरच राहिलीय म्हणे.

एका रात्रीत सगळया नोटाच नाहीशा झाल्यात.

लोक तर वेडेपिसे झालेत.

तुला कसला आनंद झालाय रे वेड्या?

आता मात्र रोहित घाबरला.आईला मोबाईलवरून आपल्या घरी कायकाय झालंय ते विचारू या असे त्याच्या मनात आले.पण मोबाईल नव्हता आणि शर्टचा खिसाही नव्हता.त्याच्या लक्षात आले आता घरात टी.व्ही.पण नसणार.

हाबकलेला रोहित खाडकन जागा झाला. आपला पलंग आणि गादीसुध्दा चौकोनी असून शाबूत आहेत हे पाहून त्याला जरा हायसे वाटले. तेवढ्यात आई खोलीत आली आणि म्हणाली, “ आता तू का असा ***चौकोनी*** चेहरा करून बसलायस?

उठ आणि भराभर आजूबाजूच्या चौकोनी वस्तूंचे फोटो काढ.

शाळेचे दप्तर चौकोनीच असते . त्याचाच फोटो आधी काढ”.

चौकोनाचे आपल्या रोजच्या व्यवहारातील महत्व आता रोहितला चांगलेच पटले होते.

तो शाळेत आला आणि त्याच्या मित्राला, मानसला त्याने आपले रात्रीचे स्वप्न सांगितले.

ते ऐकून मानस आधी खूप हसला आणि रोहितला म्हणाला, " तुला चौकोन आवडत नाहीत ना?

मग आजच्या कवायतीत तू आपला तिरंगा हातात घ्यायचास असे ठरले होते ना? तो तर

चौकोनीच आहे की. आता तुला देणारच नाही आपला झेंडा जा! त्याचा अपमान होईल तो. मला ते चालणार नाही हं!"

आता मात्र रोहित पुरताच खजिल झाला व म्हणाला,"

यापुढे मी असा विचारसुध्दा मनात आणणार नाही.

वर्गात भूमितीच्या तासाला चौकोनाची सगळी प्रमेये

नीट शिकेन. पण मला झेंडा देशील ना?

माझा दादा म्हणालाय, कॉलेजमध्ये या सगळयांचा

भौतिकशास्त्रासाठी खूप उपयोग असतो."

मुलांनो, आता तुम्हीही चौकोनांचे आपल्या दैनंदिन जीवनातील स्थान यावर विचार करा आणि एक छान टिपण लिहा.

एक महत्वाची गोष्ट मात्र लक्षात ठेवा की, आतापर्यंत रोहितच्या स्वप्नात जी पाहिले ती चौकोनी क्षेत्रे होती. म्हणजे चौकोन व त्याचा अंतर्भाग यांचा संयोग संच यांचा विचार केला.

आता आपण चौकोनाचा भूमितीमधील अर्थ व व्याख्या, गुणधर्म आणि प्रकार यांचा विचार करू.

यातील काही भाग तुमच्या परिचयाचा आहे.

यापूर्वी तुम्ही जे गुणधर्म मोजमापाने शोधले होते तेच आता आपण सिध्द करणार आहोत.

चौकोन: विषय प्रवेश

समजा, तुम्हाला कोणतेही चार बिंदू A, B, C, D दिले आहेत.

ते दाखाविण्यासाठी वेगवेगळ्या सर्व शक्यतांचा विचार करा.

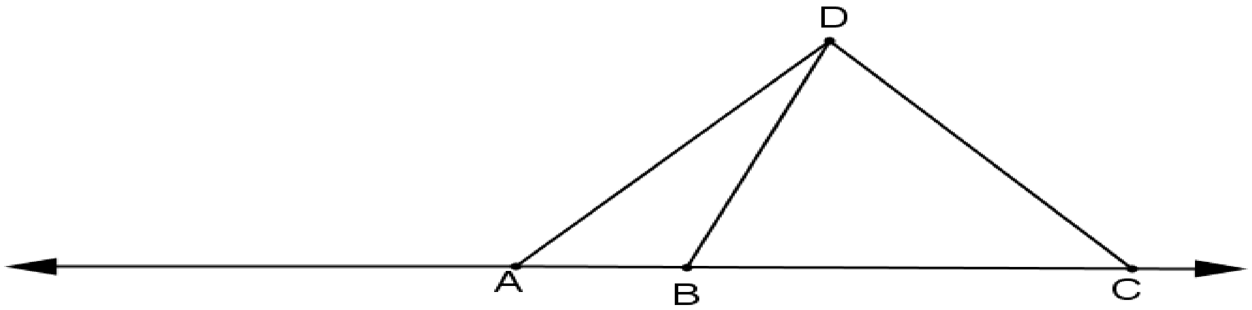
वहीत त्यांच्या वेगवेगळ्या आकृत्या काढा.

आता रेषा AB, BC, CD, AD काढा.

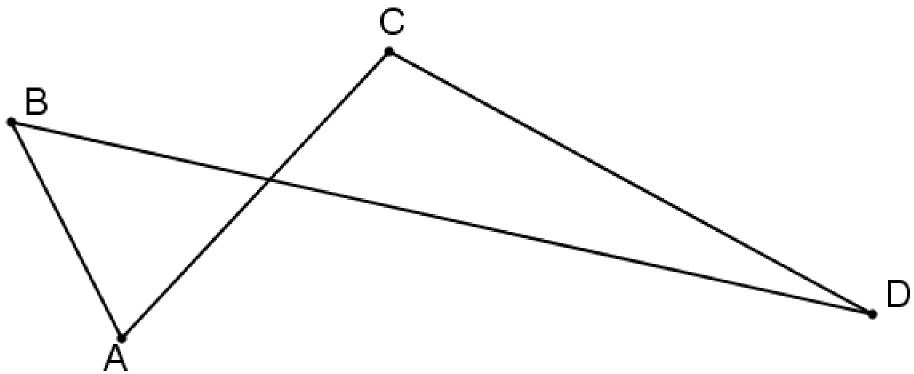
तुम्ही काढलेल्या आकृत्या पुढे दाखवल्याप्रमाणे आहेत का?

1)

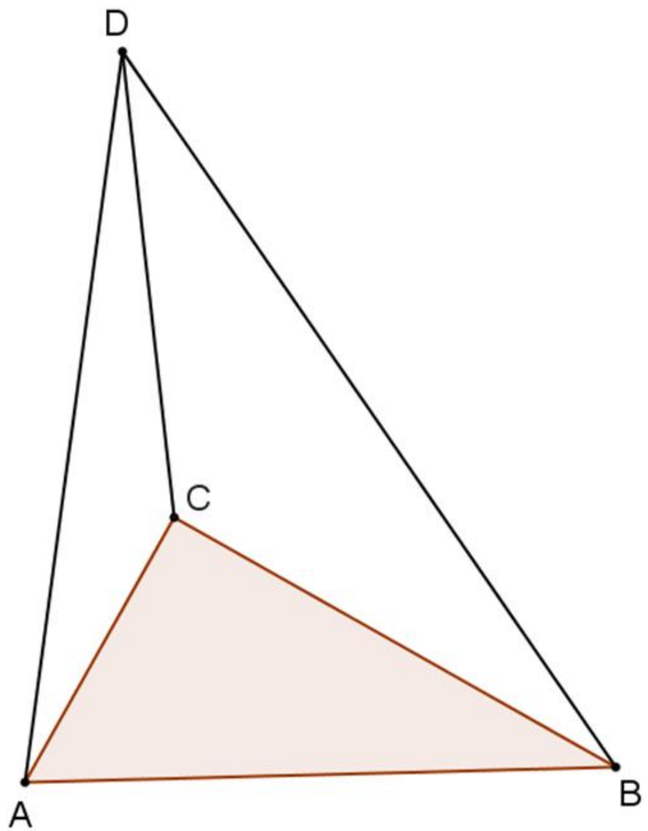
2)



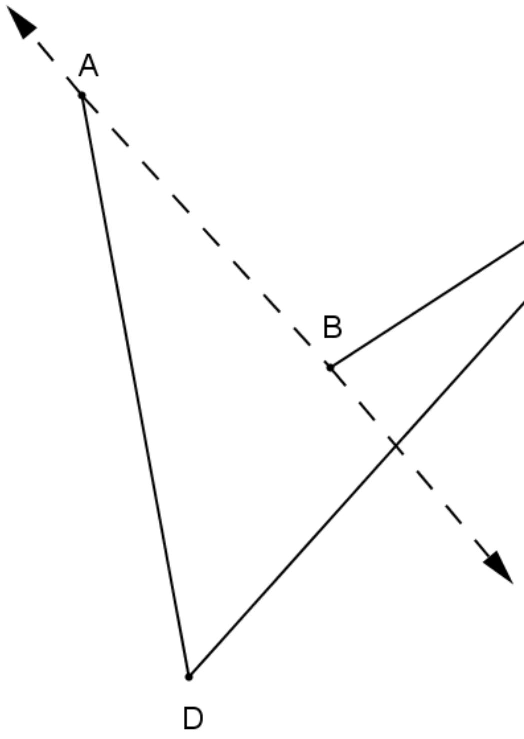
3)



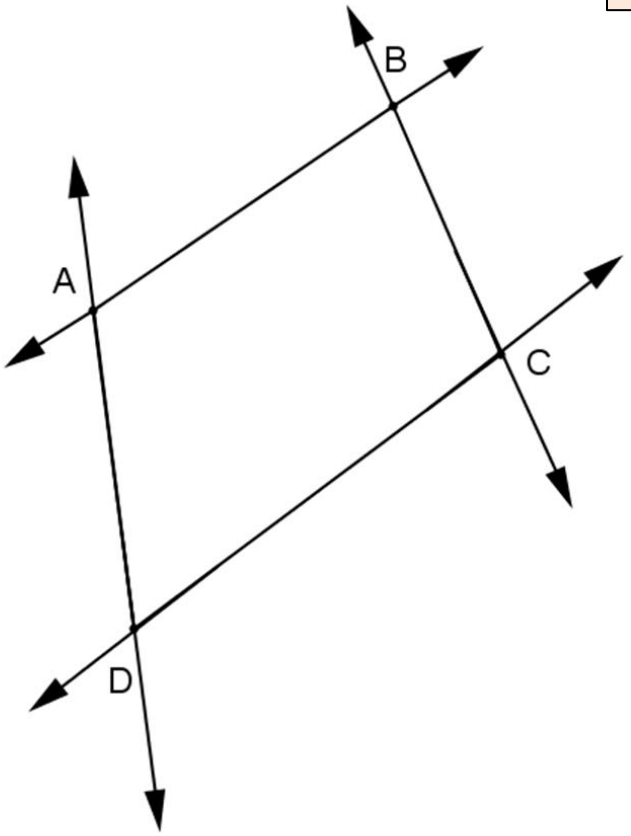
4)



5)



6)



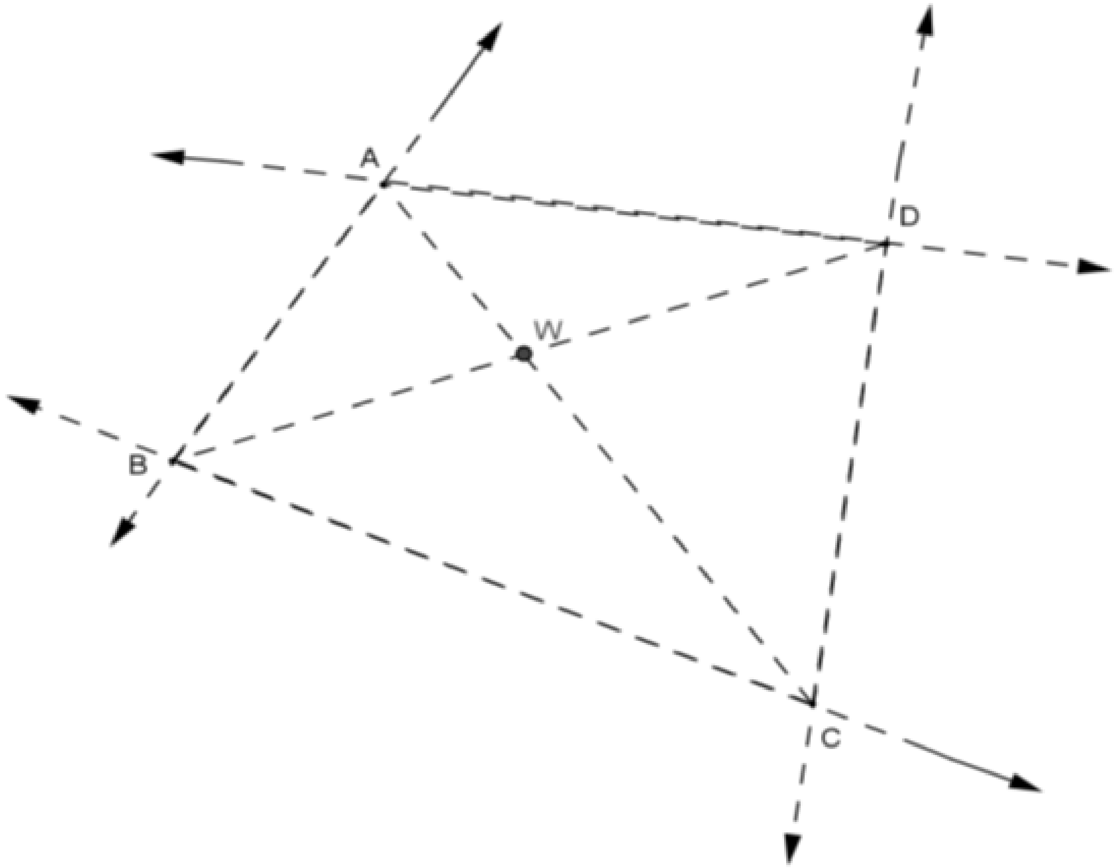
T5_L2

आता या आकृत्यांपैकी प्रत्येक आकृती पुढीलपैकी कोणत्या अटी पूर्ण करते ते ठरवा व ✓ किंवा × यांपैकी योग्य चिन्ह घालून खालील सारणी पूर्ण करा.

अट	आकृती 1	आकृती 2	आकृती 3	आकृती 4	आकृती 5
1)बिंदू A, B, C ,D एकप्रतलीय आहेत.					
2)बिंदू A, B, C ,D पैकी कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नाहीत.					
3) रेख AB,BC,CD,DA यांना जर एखादा बिंदू सामाईक असेल तर तो त्यांचा अंत्यबिंदू असेल.(इतर नसेल.)					
4)) रेख AB,BC,CD,DA यांपैकी कोणत्याही रेषाखंडाला समाविष्ट करणारी रेषा काढली तर उरलेले दोन बिंदू त्या रेषेच्या एकाच बाजूस आहेत.					
5) रेख AC आणि रेख BD हे A, B, C आणि D बिंदूंपेक्षा वेगळ्या बिंदूत छेदतात.					

कोणत्या आकृतीने वरील सर्व अटी पूर्ण केलेल्या आहेत?

दिलेल्या सर्व अटी पूर्ण करणारी आकृती:



अशा प्रकारच्या चौकोनांना बहिर्वक्र चौकोन म्हणतात.
त्यांचा आपण अभ्यास आपण करणार आहोत.

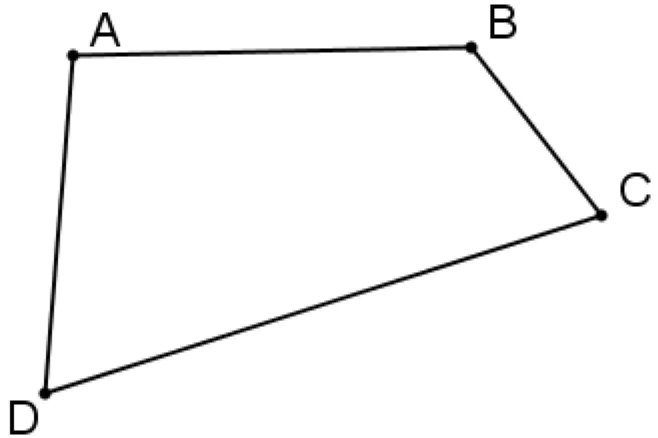
चौकोनाचे गुणधर्म

चौकोनांच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म:

आवश्यक पूर्वज्ञान :

1. कोणत्याही त्रिकोणाच्या तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 असते.
2. कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म.

चौकोनाच्या कोनांच्या बेरजेचे प्रमेय:



पक्ष : □ABCD हा कोणताही चौकोन आहे.

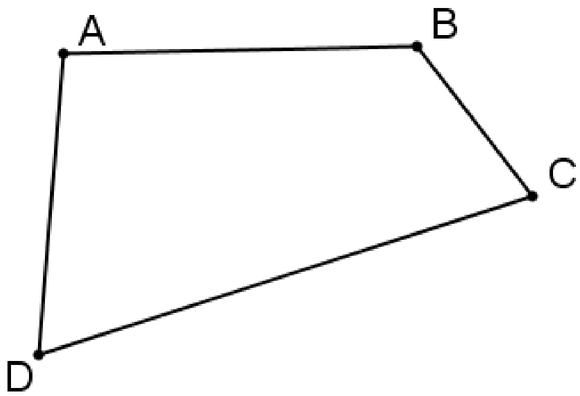
साध्य : m ∠ABC+ m∠ BCD + m∠ CDA + m∠ DAB = 360^0

विश्लेषण :

आपल्या सगळ्यांना माहित आहे की, त्रिकोणांच्या तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 असते.

याचा उपयोग आपण येथे कसा करू शकतो?

आकृतीत त्रिकोण नाहीत. मग काय केले पाहिजे?



उत्तर: येथे आपल्याला रचनेची गरज आहे.

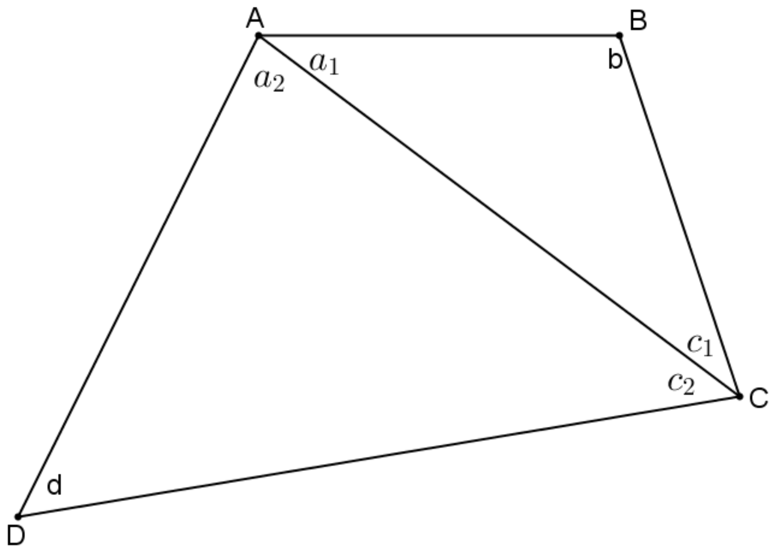
अशा रचनेचा विचार करा की, ज्यातून चौकोनाच्या चारही कोनांच्या मापांची बेरीज मिळेल.

आपण दिलेल्या आकृतीचे असे विभाजन करू की आपल्याला दोन त्रिकोण मिळतील.

त्यासाठी चौकोनाचा कर्ण AC जोडू.

रचना: कर्ण AC काढा.

चौकोनाच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म

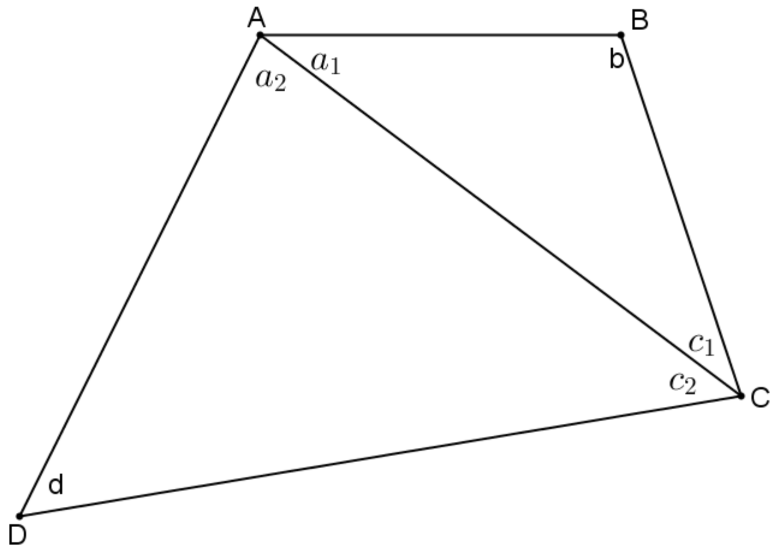


त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेच्या गुणधर्माचा आपण कसा उपयोग करणार आहोत?

1. त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेच्या गुणधर्मावरून,
   ΔABC मध्ये, $a_1 + b + c_1 = 180$

2. त्याचप्रमाणे, ΔADC मध्ये, $a_2 + d + c_2 = 180$

चौकोनाच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म



या समीकरणांचा उपयोग आपल्याला चौकोनांच्या कोनांची बेरीज मिळण्यासाठी कसा होईल?

या समीकरणांची बेरीज केली तर चौकोन ABCD च्या चार कोनांची बेरीज मिळेल.

समीकरण (1) व (2) ,

$b + a_1 + c_1 = 180^0$

$d + a_2 + c_2 = 180^0$

या दोन्ही समीकरणांची बेरीज करू,

$(b + a_1+c_1) + (d + a_2+ c_2) = 180^0 + 180^0 = 360^0$

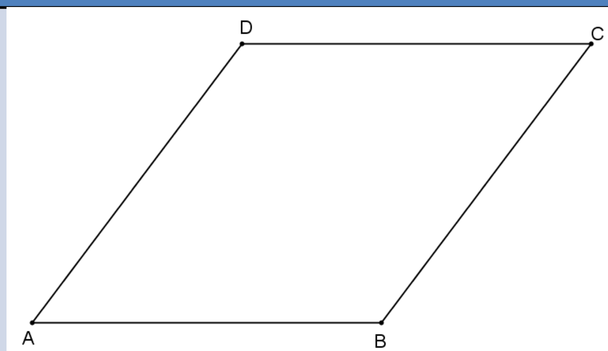
$\therefore\ b + (c_1 + c_2) + (a_1 + a_2) + d = 360^0$

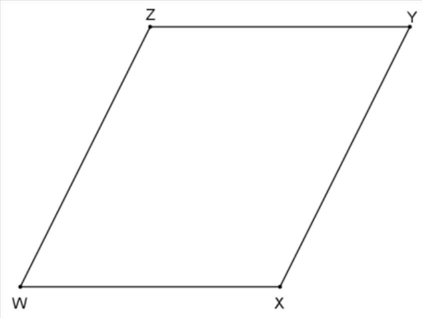
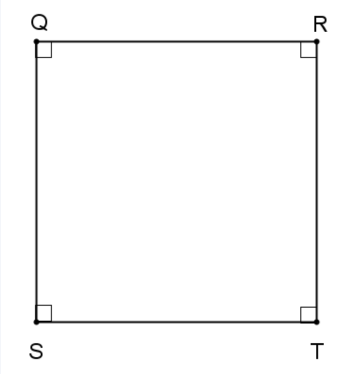
$\therefore\ m\angle ABC + m\angle BCD + m\angle DAB + m\angle CDA = 360^0$ (कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म)

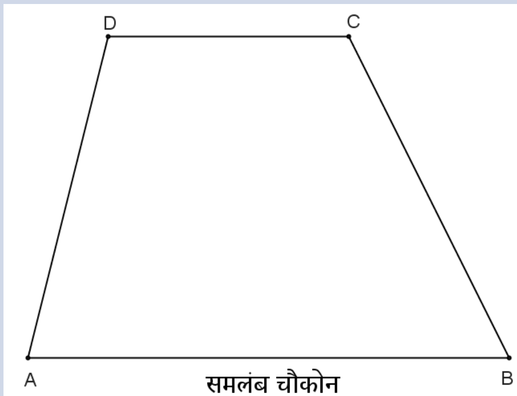
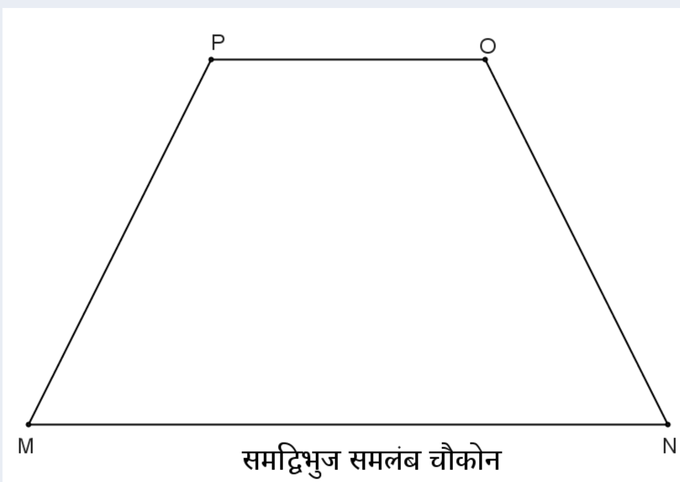
यातून कोणता निष्कर्ष मिळतो?

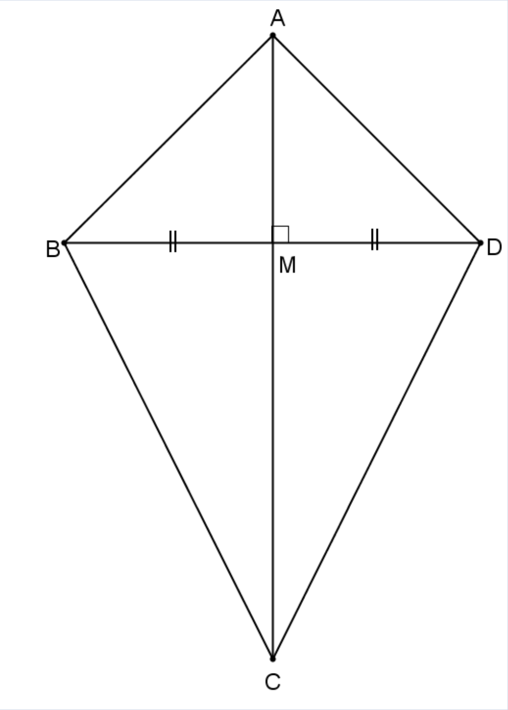
चौकोनाच्या सर्व कोनांच्या मापांची बेरीज 360° असते.

बहिर्वक्र चौकोनांचे प्रकार व त्यांच्या थोडक्यात व्याख्या:

चौकोनाचा प्रकार:	व्याख्या:
1)  समांतरभुज चौकोन	चौकोनाच्या संमुख बाजूंच्या दोन्ही जोड्या समांतर असणारा चौकोन.
2) आयत	सर्व कोन काटकोन असणारा चौकोन.

चौकोनाचा प्रकार:	व्याख्या:
3)  समभुज चौकोन	सर्व बाजू एकरूप असलेला चौकोन.
4)  चौरस	सर्व कोन काटकोन व सर्व बाजू एकरूप असलेला चौकोन.

चौकोनाचा प्रकार:	व्याख्या:
5) 	संमुख भुजांची एकच जोडी समांतर असणारा चौकोन.
6) 	असमांतर बाजू एकरूप असणारा समलंब चौकोन.

चौकोनाचा प्रकार:	व्याख्या:
5)  पतंग	□ABCD मध्ये, रेख AB ≅ रेख AD आणि रेख CB ≅ रेख CD येथे कर्ण AC हा कर्ण BD चा लंबदुभाजक आहे. □ABCD हा पतंग आहे

ओळख समांतरभुज चौकोनाशी

समांतरभुज चौकोन तुम्हाला माहित आहे. त्याचे गुणधर्म माहित असणे आवश्यक आहे.

त्यासाठी खाली सोप्या व उपयुक्त अश्या 4 कृती दिलेल्या आहेत.

त्या प्रथम तुम्ही स्वतः (एकट्याने) करावयाच्या आहेत.

त्यामुळे तुम्हाला समांतरभुज चौकोनाचा एकेक गुणधर्म लगेच कळेल.

या 4 कृती खाली सांगितल्याप्रमाणे केल्यात तर त्यासंबंधीचे प्रमेय सिध्द करणे सोपे वाटेल, उदाहरणे चटकन सोडविताही येतील.

लागणारे साहित्य: i) काही रफ किंवा वर्तमानपत्रांचे कागद

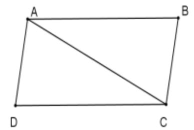
ii) 15 सेमी लांबीची मोजपट्टी

iii) टोक केलेली पेन्सिल

iv) कात्री

कृती क्रमांक: 1

आवश्यक वेळ: 6-10 मिनिटे



i) तुम्ही मागील इयत्तांमध्ये समांतरभुज चौकोनाची माहिती शिकला आहात. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे □ABCD ची आकृती काढून घ्या.

ii) आता कात्रीने तो चौकोन व्यवस्थितपणे कापून घ्या.

iii) आता त्याच्या कर्ण AC वरून कागद कापून त्याचे दोन त्रिकोण मिळवा. मिळालेले ΔABC व ΔCDAएकमेकांवर कोणत्या प्रकारे ठेवल्यास परस्परांशी जुळविता येतील ते बघा.

ii) आता त्यावरून i)बाजू AB व बाजू CD व ii) बाजू BC व बाजू DA यांच्या लांबींची तुलना करून मनाशी एक निष्कर्ष तयार करा.

(यासाठी पट्टीने त्यांची लांबी मोजण्याची अजिबात गरज नाही कारण एकरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म तुम्हाला तर माहित आहेत)

v) समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजूंबद्दलचा या कृतीतून समजलेला गुणधर्म तयार करा व नंतर तो अचूक शब्दात आपल्या आपल्या वहीत मांडा.

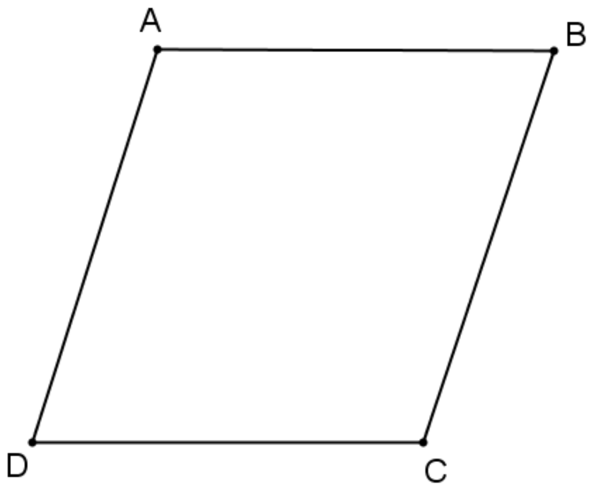
समांतरभुज चौकोनाच्या गुणधर्मांवरील प्रमेये:

समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजूंचे प्रमेय:

- आवश्यक पूर्वज्ञान:

1. समांतरभुज चौकोनाची व्याख्या.
2. समांतर रेषांचे गुणधर्म
3. एकरूप त्रिकोणांच्या कसोट्या व गुणधर्म

समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजूंचे प्रमेय:



पक्ष:

□ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

रेख AB || रेख CD

रेख BC || रेख DA.

साध्य:

रेख AB ≅ रेख CD

व रेख BC ≅ रेख DA

समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजूंचे प्रमेय:

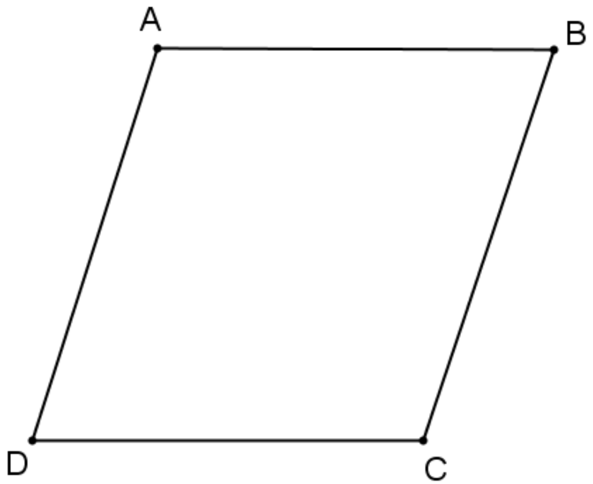
1) दोन रेषाखंड एकरूप कोणकोणत्या गुणधर्मांनुसार दाखविता येतात?

- रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूंने तयार होणारे रेषाखंड एकरूप असतात.
- दोन रेषाखंड तिस-या एकाच रेषाखंडाशी एकरूप असल्यास ते परस्परांशी एकरूप असतात.
- त्रिकोणांच्या एकरूप कोनांच्या संमुख बाजू एकरूप असतात.
- एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू एकरूप असतात.

2)दिलेल्या आकृतीचा विचार करून या चारपैकी कोणत्या पर्यायांचा उपयोग करता येणार नाही?

उत्तर:येथे एकरूप त्रिकोणांच्या गुणधर्माचा उपयोग करता येईल.

समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजूंचे प्रमेय:



पक्ष:

□ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

रेख AB || रेख CD

रेख BC || रेख DA.

3)परंतु, आकृतीत त्रिकोण नाहीत. मग काय करावे लागेल?

उत्तर: त्यासाठी रचना करावी लागेल.

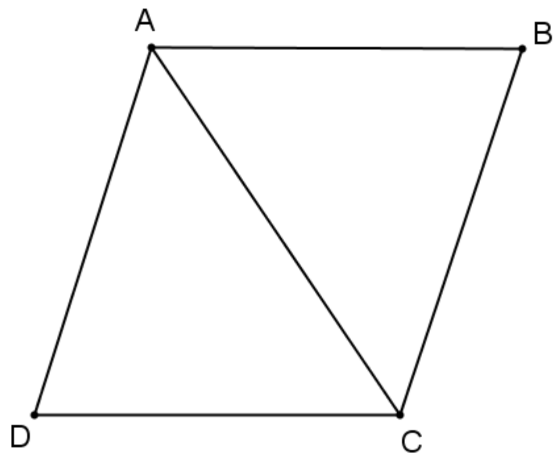
4) तयार होणारे त्रिकोण कसे असावेत?

उत्तर: त्यांपैकी एका त्रिकोणाची एक बाजू रेख AB व दुस-या त्रिकोणाची एक बाजू रेख CD असली पाहिजे.

5) मग कोणती रचना केली पाहिजे?

उत्तर: रेख AC काढू.

समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजूंचे प्रमेय:



पक्ष: □ ABCD समांतरभुज चौकोन आहे.

साध्य : i) रेख AB ≅ रेख CD

ii) रेख BC ≅रेख DA

6) तयार झालेले △ ABC व △ CDA हे एकरूप दाखवावे लागतील.

त्रिकोणाच्या एकरूपतेच्या कोणकोणत्या कसोट्या असतात?

बा बा बा कसोटी

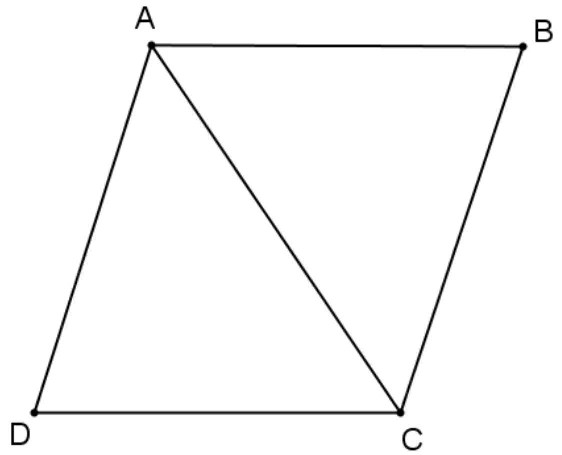
को बा को कसोटी

बा को को कसोटी

बा को बा कसोटी

T5_L5_A1

समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजूंचे प्रमेय:



पक्ष: □ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

साध्य: i) रेख AB ≅ रेख CD

ii) रेख BC ≅ रेख DA

7) Δ ABC व ΔCDA मधील एकरूप घटक शोधा.

Δ ABC व ΔCDA मध्ये,

रेख AC ≅ रेख CA (सामाईक बाजू)

रेख AB // रेख CD (समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजू)

∴ ∠BAC ≅ ∠CDA (समांतर रेषांनी केलेले व्युत्क्रम कोन)

त्याचप्रमाणे, रेख BC // रेख DA

∴ ∠BAC ≅ ∠CDA.

∴ Δ ABC≅ ΔCDA (को बा को कसोटी)

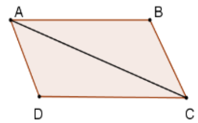
∴ **रेख AB ≅ रेखCD** (एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)

त्याचप्रमाणे **रेख BC ≅रेख DA**

निष्कर्ष:
समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजूंच्या दोन्ही जोड्या एकरूप असतात.

कृती क्रमांक: 2

आवश्यक वेळ: 5 मिनिटे

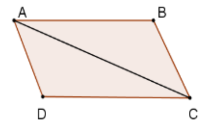


i) □ ABCD हा कोणताही समांतरभुज चौकोन रफ कागदावर काढून घ्या. तो व्यवस्थितपणे कापून घ्या.

ii) प्रथम तो कर्ण AC वर दुमडून घ्या. बिंदू B व D बरोबर एकमेकांवर जुळले पाहिजेत याची खबरदारी घ्या.

iii) आता ΔABC व ΔCDA चे निरीक्षण करून समांतरभुज चौकोनाचे संमुखकोन $\angle ABC$ व $\angle CDA$ यांच्या मापांबद्दल मनाशी एक निष्कर्ष तयार करा.

(यासाठी कोन मापकाने त्यांची मापे काढण्याची अजिबात गरज नाही.)



iv) आता घडी उलगडा व कर्ण BD वर चौकोन दुमडा. बिंदू A, C एकमेकांवर जुळले आहेत ना याची खात्री करून घ्या.

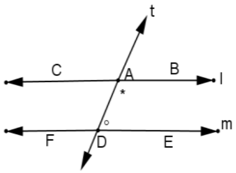
वरील प्रमाणेच ΔBCDव ΔDAB यांचे निरीक्षण करून ∠BCD व ∠DAB यांच्या मापांबद्दल मनाशी एक निष्कर्ष तयार करा.

v) समांतरभुज चौकोनाच्या व्याख्येचा विचार करा व ∠ BCA व ∠DAC यांना त्यांच्या जागांमुळे कोणत्या प्रकारचे कोन म्हणता येते, त्यांचा गुणधर्म कोणता असतो?

त्याचप्रमाणे ∠DCA व ∠ BAC यांना कोणत्या प्रकारचे कोन म्हणता येते, त्यांचा गुणधर्म कोणता असतो? यावर विचार करा. मनाशी एक निष्कर्ष तयार करा.

vi) याचप्रकारे समांतरभुज चौकोनाचे कोणतेही दोन क्रमवार कोन घेतले तर त्यांचा कोणता गुणधर्म कळतो?

समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख व दोन क्रमवार कोनांचे प्रमेय:



1) दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणा-या आंतरकोनांची जोडी पूरक असते.

म्हणजेच, त्यांच्या कोनांची बेरीज 180^0 आहे.

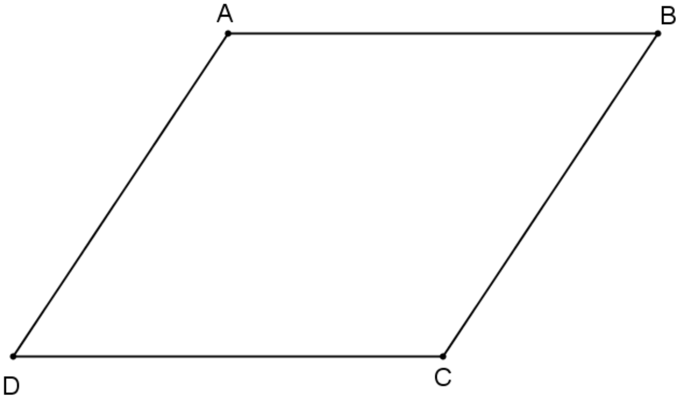
दिलेल्या आकृतीत, रेषा l ∥ रेषा m आणि रेषा t ही त्यांची छेदिका आहे.

$\therefore m\angle BAD + m\angle EDA = 180^0$

2) संख्यांच्या पुढील गुणधर्माविषयी विचार करा.

जर, a + b = c आणि a + d = c तर b आणि d मध्ये संबंध काय?

उत्तर :a + b = a + d $\therefore$ b = d



पक्ष: □ABCD समांतरभुज चौकोन आहे.

साध्य: i) ∠BAD ≅ ∠DCB

ii) ∠ADC ≅ ∠CBA

सिद्धता:

1) रेख AB ∥ रेख CD .....(समांतरभुज चौकोनाच्य संमुख बाजू)

∴ ∠BAD व ∠ADC हे तयार झालेले आंतरकोन आहेत.

∴ m∠BAD + m∠ADC = 180^0 .....(आंतरकोन कसोटीचा व्यत्यास)

2) त्याचप्रमाणे , रेख BC ∥ रेख DA

∴ ∠BCD व ∠ADC हे तयार झालेले आंतरकोन आहेत.

∴ m∠BCD + m∠ADC = 180^0

3) ∴ m∠BAD + m∠ADC = m∠DCB + m∠ADC ...(विधान 1 व 2 वरून)

∴ दोन्ही बाजूंतून m∠ADC हे पद वजा करून,

m∠BAD = m∠DCB

म्हणजेच ∠BAD ≅ ∠DCB

4) रेख BC ∥ रेख DA ......(समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजू)

∴ ∠BAD व ∠CBA हे तयार झालेले आंतरकोन आहेत.

∴ m∠BAD + m∠CBA = 180^0 .....(आंतरकोन कसोटीचा व्यत्यास)

5) ∴ m∠BAD + m∠ADC = m∠BAD + m∠CBA ...(विधान 1 व 4 वरून)

∴ दोन्ही बाजूंतून m∠BAD हे पद वजा करून,

∴ m∠ADC = m∠CBA म्हणजेच ∠ADC ≅ ∠CBA

निष्कर्ष:
समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख कोनांच्या दोन्ही जोड्या एकरूप असतात.

टीप:
या सिद्धतेमधील विधाने 1, 2 व 4 मधून समांतरभुज चौकोनाच्या क्रमाने येणाऱ्या दोन कोनांचा कोणता गुणधर्म कळतो?

उत्तर: समांतरभुज चौकोनाचे क्रमाने येणारे दोन कोन परस्परांचे पूरक असतात.

मागील दोन गुणधर्मांचा उपयोग करून तुम्ही समांतरभुज चौकोनाच्या समोरासमोरील कोनांमधील गुणधर्म सहज सिद्ध करू शकता.

लक्षात घ्या इथे रचनेची आवश्यकता नाही.

समांतरभुज चौकोनाच्या समोरासमोरील कोनांच्या गुणधर्माचा उपयोग करून तुम्ही एकरूप कोनांचा गुणधर्म आपोआप सिद्ध करू शकता

तो गुणधर्म कोणता आहे?

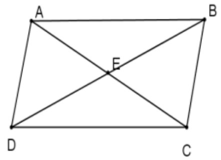
खालील विधान पूर्ण करा.

जर दोन कोन दिलेल्या कोनाचे पूरक कोन असतील तर ते एकमेकांशी ....असतात.

उत्तर: जर दोन कोन दिलेल्या कोनाचे पूरक कोन असतील तर ते एकमेकांशी एकरूप असतात.

कृती क्रमांक: 3

आवश्यक वेळ: 10 मिनिटे



i) आता वरील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे दुसरा एक समांतरभुज चौकोन ABCD काढा.

ii) त्याचे दोन्ही कर्ण AC व BD काढा. समजा ते E बिंदूत एकमेकांना छेदतात.

iii) हा चौकोन प्रथम कापून घ्या व नंतर तो दोन्ही कर्णांवर कापा.

आता तुम्हाला चार त्रिकोण ΔABE, ΔBCE, ΔCDE व ΔADE मिळालेले आहेत.

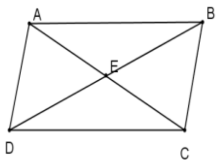
iv) त्यांच्यापैकी असे दोन योग्य त्रिकोण निवडा की, जे एकमेकांशी तंतोतंत जुळतील व त्यातून तुम्हाला AE व CE यांच्या लांबींची तसेच BE व DEयांच्या लांबींची तुलना करता येईल. त्यांवरून E बिंदूचा कर्ण AC व कर्ण BD शी कोणता संबंध आहे?

v) जेव्हा दोन रेषाखंड परस्परांना मध्यबिंदूत छेदतात तेव्हा त्यांचे वर्णन कसे करतात?

समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णांचे प्रमेय:

पक्ष: ▫ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

कर्ण AC व कर्ण BD एकमेकांना बिंदू E मध्ये छेदतात.



साध्य: कर्ण AC व कर्ण BD परस्परांना दुभागतात.

(म्हणजेच, बिंदू E हा कर्ण AC व कर्ण BD चा मध्यबिंदू आहे.)

खाली दिलेल्या सूचनांवरून विचार करून सिद्धता लिहा व तुमच्या शिक्षकांना दाखवा.

सिद्धतेसाठी सूचनापेटी:

1. तुम्ही वरील कृती क्रमांक (3) केली आहेत ती आठवून आता या आकृतीमधील ज्यांचा सामाईक शिरोबिंदू E आहे अशा कोणत्या त्रिकोणांच्या जोडीने अपेक्षित उत्तर मिळेल? ती त्रिकोणांची जोडी निवडा.

T5_L5_A3

2. त्यांच्या संगत बाजूंची जोडी शोधा की, जी समांतरभुज चौकोनाच्या बाजूंच्या गुणधर्मानुसार एकरूप आहे.

3. समांतरभुज चौकोनाच्या व्याख्येचा उपयोग करून या त्रिकोणाच्या संगत कोनांच्या दोन एकरूप जोड्या शोधा.

4. एकरूप त्रिकोणांची योग्य कसोटी वापरून दोन्ही त्रिकोण एकरूप दाखवा.

5. बिंदू E हा दोन्ही कर्णांचा मध्यबिंदू आहे, हे सिद्ध करण्यासाठी एकरूप त्रिकोणांच्या संगत घटकांची यादी करा.

6. समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णांविषयी तुम्हाला समजलेल्या माहितीचा उपयोग करून निष्कर्ष तयार करा.

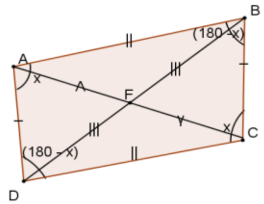
कृती क्रमांक: 4

ही कृती पुढील दोन ते तीन दिवसात करा.

वरील तीनही कृतींमधून समांतरभुज चौकोनाचे जे चार गुणधर्म तुम्हाला समजले आहेत त्यांची उत्तमप्रकारे मांडणी करून एक छोटा, रंगीत तक्ता तयार करा.

तुमच्या स्वतःच्या कल्पकतेने असा तक्ता बनविलात की, गुणधर्म पाठ करण्याची जरूरीच पडणार नाही कारण तुम्ही ते विसरणे शक्यच नाही.

खालील आकृतीचा उपयोग करा.



चौकोन समांतरभुज असण्याच्या कसोट्या:

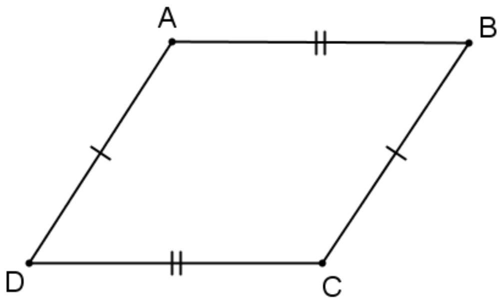
दिलेला चौकोन समांतरभुज आहे किंवा नाही हे पुढील प्रमेयांच्या सहाय्याने ठरवितात.

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी: क्र: 1

एखादा चौकोन समांतरभुज आहे किंवा नाही म्हणजेच व्याख्येतील अटी तो पूर्ण करतो किंवा नाही हे ठरविण्यासाठी पुढील कसोट्यांचा उपयोग करता येतो.

यातील कोणत्याही एखाद्या कसोटीच्या सहाय्याने दिलेला चौकोन समांतरभुज आहे हे सिद्ध झाल्यास त्या चौकोनाला समांतरभुज चौकोनाचे सर्व गुणधर्म लागू पडतात. त्यामुळे ते सिद्ध करावे लागत नाहीत.

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी: क्र: 1



पक्ष:

□ABCD मध्ये,

बाजू AB ≅ बाजू CD,

बाजू AD ≅ बाजू CB

साध्य : □ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

सिद्धतेसाठी विश्लेषण:

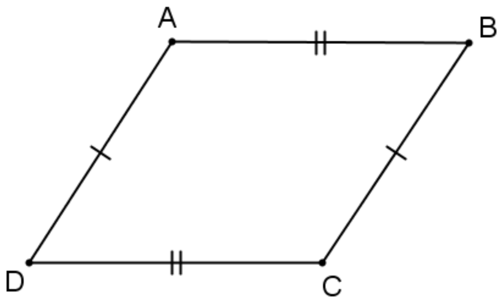
दिलेला चौकोन समांतरभुज चौकोन आहे हे सिद्ध करण्यासाठी तो समांतरभुज चौकोनाच्या व्याख्येतील अटी पूर्ण करतो हे सिद्ध केले पाहिजे.

म्हणजेच यामध्ये रेख AB // रेख CD व रेख BC // रेख DA हे सिद्ध केले पाहिजे.

त्यासाठी समांतर रेषांच्या कसोट्यांचा उपयोग करावा लागतो. त्या कसोट्या कोणत्या ते आठवा.

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी: क्र: 1

T5_L6_A1



पक्ष:

□ABCD मध्ये,

बाजू AB ≅ बाजू CD,

बाजू AD ≅ बाजू CB

समांतर रेषांच्या कसोट्या:

1)**व्युत्क्रम कोन कसोटी**:- जर एकाच प्रतलातील दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणाऱ्या व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.

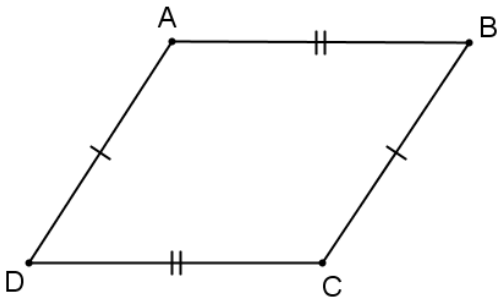
2)**संगत कोन कसोटी**:- जर दोन एकप्रतलीय रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता तयार होणाऱ्या संगत कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या दोन रेषा समांतर असतात.

3)**आंतरकोन कसोटी**:- जर दोन एकप्रतलीय रेषांना एक छेदिकेने छेदले असता तयार होणाऱ्या आंतरकोनांची एक जोडी पूरक असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.

4)जर दोन रेषा त्याच प्रतलातील एका रेषेला समांतर असतील, तर त्या परस्परांना समांतर असतात.

5)जर एक रेषा त्याच प्रतलातील दोन रेषांना लंब असेल तर त्या दोन रेषा परस्परांना समांतर असतात.

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी: क्र: 1



पक्ष:

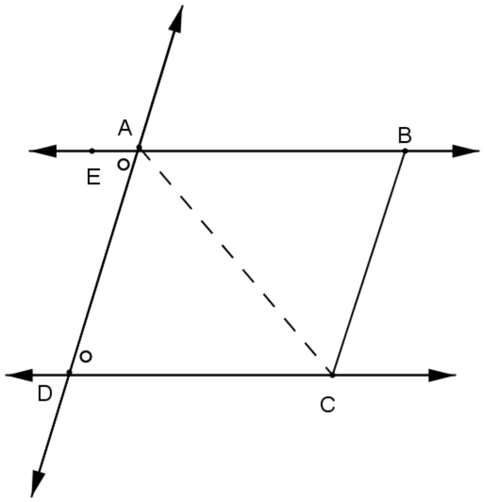
□ABCD मध्ये,

बाजू AB ≅ बाजू CD,

बाजू AD ≅ बाजू CB

दिलेल्या कसोट्यांपैकी कोणत्या कसोट्या तुम्ही वापरू शकत नाही व कोणती कसोटी वापरू शकता याचा पक्षातील माहितीवरून विचार करा.

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी: क्र: 1



पक्ष:

□ABCD मध्ये,

बाजू AB ≅ बाजू CD,

बाजू AD ≅ बाजू CB

1) समजा, रेख AB ∥ रेख CD सिद्ध करण्यासाठी व्युत्क्रम कोन कसोटीचा उपयोग करावयाचा असेल तर त्यांची छेदिका AD घेतली तर कोणते कोन व्युत्क्रम कोन होतील? ते आकृतीत आहेत का ?

⟹ नाही.

2) नसल्यास, दुसरी छेदिका काढली पाहिजे, कोणती?

⟹ रेख AC

3) रेख AC काढल्यास व्युत्क्रम कोनांच्या कोणत्या जोडीने रेख AB ∥ रेख CD मिळेल?

⟹ ∠BAC व ∠DCA

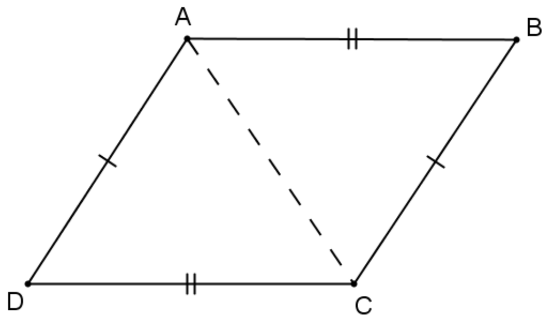
4) तसेच, व्युत्क्रम कोनांच्या कोणत्या जोडीने रेख BC ∥ रेख AD मिळेल?

⟹ ∠ BCA व ∠DAC

5) व्युत्क्रम कोनांच्या ह्या जोड्या एकरूप आहेत हे सिद्ध करण्यासाठी कोणते त्रिकोण एकरूप दाखविणे आवश्यक आहे?

⟹ ΔABC व ΔCDA एकरूप दाखवल्यास व्युत्क्रम कोनांच्या दोन्ही जोड्या एकरूप मिळतील.

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी: क्र: 1



पक्ष:

□ABCD मध्ये,

बाजू AB ≅ बाजू DC,

बाजू AD ≅ बाजू CB

त्रिकोण एकरुपतेच्या कसोट्या व प्रमेय :

1) बा-को-बा एकरूपता कसोटी

2) बा-को-को एकरूपता कसोटी

3) को-बा-को एकरूपता कसोटी

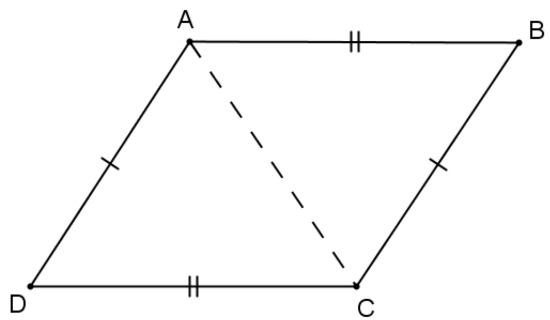
4) बा-बा-बा एकरूपता कसोटी

5) कर्ण भुजा प्रमेय.

ΔABC व ΔCDA एकरूप दाखवण्यासाठी वरील पाचपैकी कोणती कसोटी वापराल?

खालील सिद्धता पूर्ण करण्यासाठी रिकाम्या जागा योग्य प्रकारे [T5_L6_A1]

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी: क्र: 1



पक्ष:

□ABCD मध्ये,

बाजू AB ≅ बाजू CD,

बाजू AD ≅ बाजू CB

रचना: रेख AC काढला.

1) ΔABC व ΔCDA मध्ये,

बाजू AB ≅ .... (पक्ष)

बाजू BC ≅ बाजू DA (......)

बाजू .... ≅ बाजू ...... (सामाईक बाजू)

2) ∴ ΔABC ≅ ΔCDA (..............एकरूपता कसोटी.)

3) ∴∠...... ≅ ∠ DCA (एकरुप त्रिकोणांचे संगत घटक)

परंतू हे रेख AB व रेख CD ह्यांना रेख AC ह्या छेदिकेने छेदल्यामुळे तयार झालेले व्युत्क्रम कोन आहेत.

∴ रेख AB ∥ रेख CD (समांतर रेषांची ....कोन कसोटी)

4) त्याचप्रमाणे ∠BCA ≅ ∠DAC ....

परंतु हे रेख AD व रेख BC ह्यांना रेख AC ह्या छेदिकेने छेदल्यामुळे तयार झालेले व्युत्क्रम कोन आहेत.

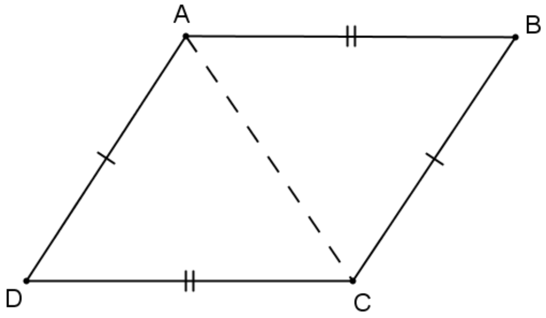
∴ रेख ...... ∥ रेख ...... (समांतर रेषांची व्युत्क्रम कोन कसोटी)

5) ∴ विधान 3 व 4 वरून □ABCD मध्ये,
रेख AB ∥ रेख CD व रेख AD ∥ रेख BC

∴ **व्याख्येनुसार, □ABCD समांतरभुज आहे.**

T5_L6_A1

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी: क्र: 1



पक्ष:

□ABCD मध्ये,

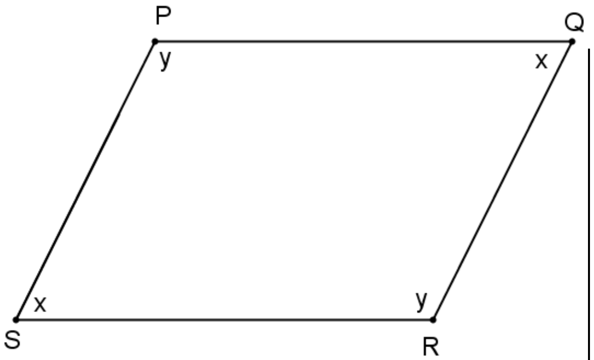
बाजू AB ≅ बाजू CD,

बाजू AD ≅ बाजू CB

निष्कर्ष:

यावरुन, जर चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू एकरूप असतील तर तो चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो.

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी: क्र: 2



पक्ष:

□PQRS मध्ये,

∠SPQ ≅ ∠QRS आणि

∠PQR ≅ ∠RSP

साध्य : □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

सिद्धतेसाठी विश्लेषण:

मागील प्रमेयाप्रमाणे दिलेला चौकोन समांतरभुज चौकोन आहे

हे सिद्ध करण्यासाठी त्याने समांतरभुज चौकोनाच्या व्याख्येतील

कोणत्या अटी पूर्ण केल्या पाहिजेत?

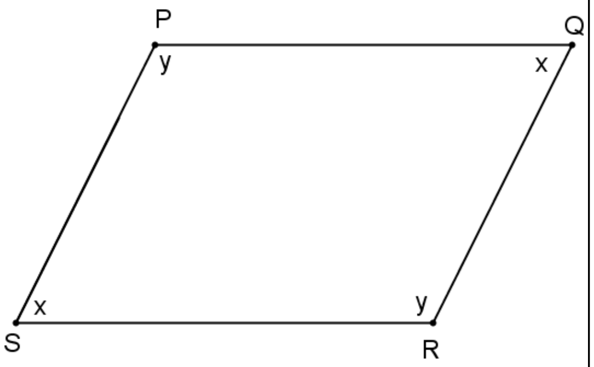
समांतरभुज चौकोनाच्या व्याख्येनुसार:

रेख PQ ∥ रेख SR व रेख PS ∥ रेख QR

हे सिद्ध करायला पाहिजे.

पक्षातील कोनांचा विचार करून समांतर रेषांची कोणती कसोटी वापराल?

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी: क्र: 2



पक्ष:

□PQRS मध्ये,

∠SPQ ≅ ∠QRS आणि

∠PQR ≅ ∠RSP

साध्य : □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

1. समजा, रेख PQ ∥ रेख SR सिद्ध करण्यासाठी त्यांची छेदिका PS घेतली तर ∠**SPQ** व ∠**PSR** यांना कोणत्या प्रकारचे कोन म्हणाल?

→ ∠**SPQ** व ∠RSP हे आंतरकोन आहेत.

2. समजा, रेख PS ∥ रेख QR सिद्ध करण्यासाठी व त्यांची छेदिका PQ घेतली तर ∠SPQ व ∠ PQR यांना कोणत्या प्रकारचे कोन म्हणाल?

→ ∠SPQ व ∠ PQR हे आंतरकोन आहेत.

3) ह्या आंतरकोनांबद्दल काय माहिती मिळाल्यास चौकोनाच्या संमुख बाजूंच्या दोन्ही जोड्या समांतर सिद्ध होतील?

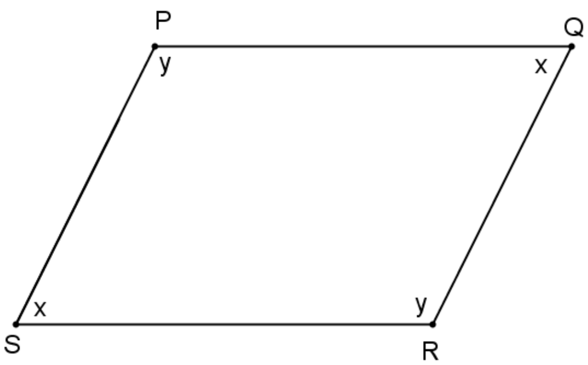
→ आंतरकोनांची जोडी पूरक सिद्ध झाल्यास रेषा समांतर होतील.

4) पक्षातील माहितीवरून आंतरकोनांची बेरीज= 180^0 कसे दाखवू शकाल?

→ चौकोनाच्या चार कोनांच्या मापांची बेरीज= 360^0 हे प्रमेय वापरता येईल.

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी: क्र: 2

T5_L6_A2



पक्ष:

□PQRS मध्ये,

∠SPQ ≅ ∠QRS आणि

∠PQR ≅ ∠RSP

साध्य : □PQRS हा समांतरभुज चौकोन आहे.

रिकाम्या जागा भरून पुढील सिद्धता पूर्ण करा.

दिलेल्या माहितीनुसार,

∠SPQ ≅ ∠QRS आणि ∠PQR ≅ ∠RSP .....(.......)

∠SPQ = ∠QRS= x^0 मानू आणि ∠PQR = ∠RSP= y^0 मानू

□PQRS मध्ये चौकोनाच्या सर्व कोनांच्या मापांच्या बेरजेच्या प्रमेयानुसार,

∠SPQ + ∠PQR + ∠QRS + ∠RSP = ...

∴ $x^0 + y^0 + x^0 + y^0$ = ...

∴ $2x^0 + 2y^0 =$ ......

∴ $2(x^0 + y^0)$ = ...

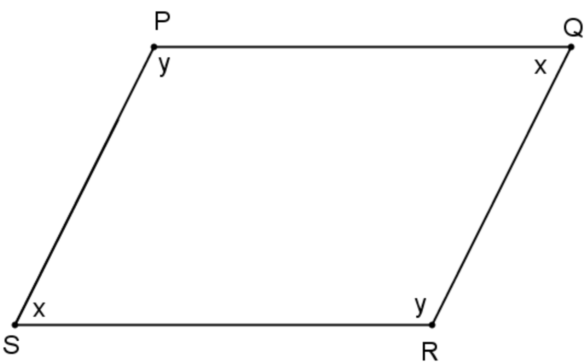
∴ $x^0 + y^0$ = ... (दोन्ही बाजूंना 2 ने भागून) ..(1)

∴ ∠SPQ + ∠PQR = ...

पण हे रेख PS व रेख QR यांना छेदिका PQ ने छेदल्यामुळे तयार झालेले आंतरकोन आहेत.

∴ रेख .... ∥ रेख ..... (आंतरकोन कसोटी)

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी: क्र: 2



पक्ष:

□PQRS मध्ये,

∠SPQ ≅ ∠QRS आणि

∠PQR ≅ ∠RSP

विधान (1) वरून,

$x^0 + y^0 = 180^0$

∴ ∠SRQ + ∠PQR = 180^0

पण हे रेख PQ व रेख SR यांना छेदिका QR ने छेदल्यामुळे तयार झालेले आंतरकोन आहेत व हे आंतरकोन पूरककोन आहेत.

∴ रेख …. . ∥ रेख …. .   (आंतरकोन कसोटी)

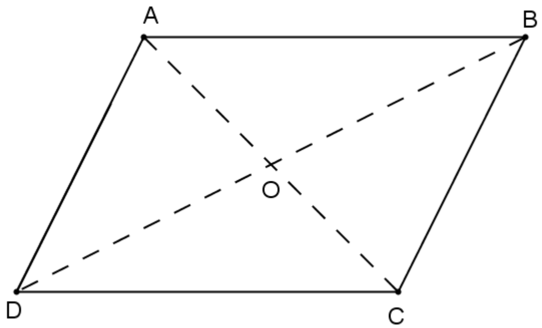
∴ रेख *PS* ∥ रेख QR व रेख *PQ* ∥ रेख SR

∴ □PQRS हा व्याख्येनुसार समांतरभुज आहे.

निष्कर्ष:

जर चौकोनाच्या संमुख कोनांच्या दोन्ही जोड्या एकरूप असतील तर तो चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो.

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी : क्र: 3



पक्ष:

□ABCD मध्ये, कर्ण AC आणि कर्ण BD, O बिंदूत दुभागतात.

रेख AO ≅ रेख CO,

रेख BO ≅ रेख DO

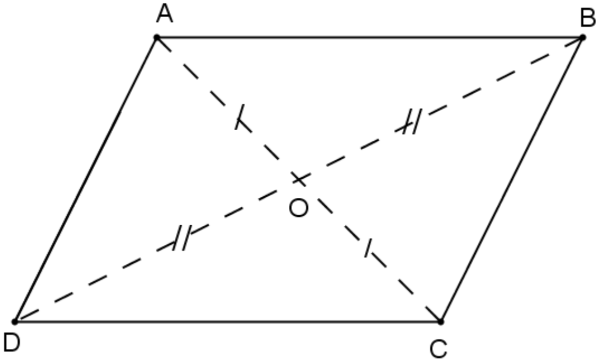
साध्य : □ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

दिलेला चौकोन समांतरभुज चौकोन आहे हे सिद्ध करण्यासाठी तो समांतरभुज चौकोनाच्या व्याख्येतील अटी पूर्ण करतो हे सिद्ध केले पाहिजे ते आता तुम्हाला कळले असेलच.

➡ रेख AD ∥ रेख BC व

रेख AB ∥ रेख DC

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी : क्र: 3



पक्ष:

□ABCD मध्ये, कर्ण AC आणि कर्ण BD, O बिंदूत दुभागतात.

रेख AO ≅ रेख CO,

रेख BO ≅ रेख DO

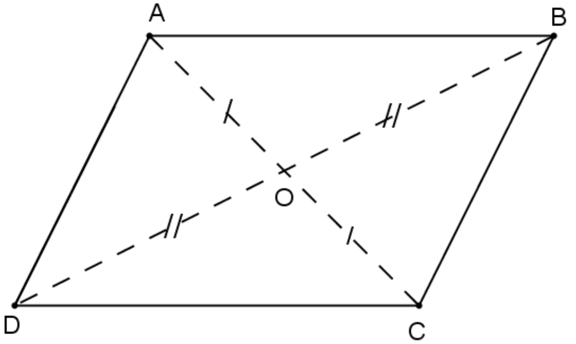
साध्य : □ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

पक्षातील माहितीवरून विचार करून ठरवा की, समांतर रेषांच्या कसोट्यांपैकी कोणत्या कसोटीने संमुख बाजूंच्या दोन्ही जोड्या समांतर असल्याचे सिद्ध करता येईल?

येथे पक्षाप्रमाणे रेख AO ≅ रेख CO व रेख BO ≅ रेख DO

ह्या माहितीवरून त्रिकोण एकरूप दाखवून त्यांचे संगत घटक एकरूप या गुणधर्मावरून संमुख बाजूंच्या दोन्ही जोड्या समांतर असल्याचे सिद्ध करता येईल.

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी : क्र: 3



पक्ष:

□ABCD मध्ये, कर्ण AC आणि कर्ण BD, O बिंदूत दुभागतात.

रेख AO ≅ रेख CO,

रेख BO ≅ रेख DO

साध्य : □ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

त्यासाठी प्रथम कोणत्या त्रिकोणांची जोडी एकरूप दाखविता येईल त्यावर विचार करा. त्रिकोणांच्या एकरूपतेच्या कसोट्यांपैकी कोणती कसोटी यामध्ये वापरता येईल?

रेख BC // रेख AD सिद्ध करण्यासाठी $\angle BCO$ व $\angle DAO$ एकरूप दाखवावे लागतील व त्यासाठी ΔBCO व ΔDAO एकरूप सिद्ध करावे लागतील.

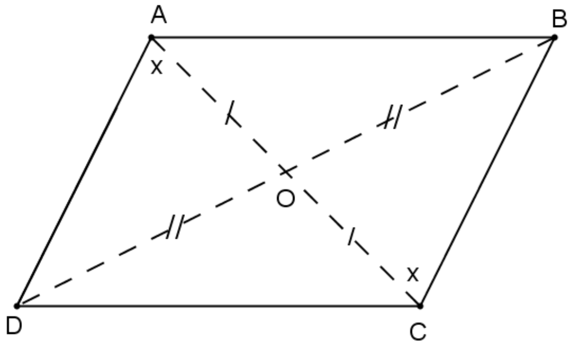
आता पक्षातील माहितीचा विचार करता, ΔBCO व ΔDAO हे कोणत्या कसोटीनुसार एकरूप दाखवाल?

ΔBCO व ΔDAO हे एकरूप दाखवण्यासाठी बा-को-बा एकरूपता कसोटी वापरू.

या त्रिकोणांतील संगत एकरूप घटक शोधा.

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी : क्र: 3

रिकाम्या जागा भरून पुढील सिद्धता पूर्ण करा.



पक्ष:

□ABCD मध्ये, कर्ण AC आणि कर्ण BD, O बिंदूत दुभागतात.

रेख AO ≅ रेख CO,

रेख BO ≅ रेख DO

साध्य : □ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

ΔBCO व ΔDAO मध्ये,

1. बाजू CO ≅ बाजू ..... (O हा रेख AC ला दुभागतो.)
2. ∠ ..... ≅ ∠AOD (विरुद्ध कोन)
3. बाजू BO ≅ बाजू .... (O हा रेख BD ला दुभागतो.)

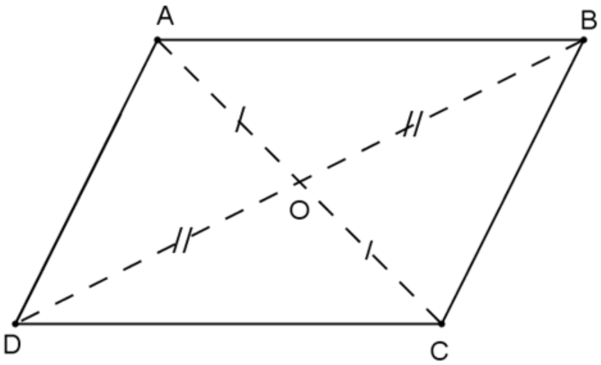
∴ $\Delta BCO \cong \Delta DAO$ (बा-को-बा एकरूपता कसोटी)

∴ $\angle BCO \cong \angle DAO$ (....)

म्हणजेच $\angle BCA \cong \angle DAC$, परंतु हे रेख ADव रेख BCला छेदिका AC ने छेदल्यामुळे तयार झालेले व्युत्क्रम कोन आहेत.

∴रेख AD ∥ रेख BC (व्युत्क्रम कोन कसोटी)........(1)

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी : क्र: 3



पक्ष:

□ABCD मध्ये, कर्ण AC आणि कर्ण BD, O बिंदूत दुभागतात.

रेख AO ≅ रेख CO,

रेख BO ≅ रेख DO

साध्य : □ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

4) त्याचप्रमाणे, Δ ABO व Δ CDO मध्ये,

बाजू BO ≅ बाजू ....

∠.... ≅ ∠DOC

बाजू AO ≅ बाजू......

∴ ΔABO ≅ ΔCDO

∴ ∠ABO ≅ ∠CDO

म्हणजेच ∠ABD ≅ ∠CDB, परंतु हे रेख AB व रेख CD ला छेदिका BD ने छेदल्यामुळे तयार झालेले व्युत्क्रम कोन आहेत.

∴रेख AB ∥ रेख CD

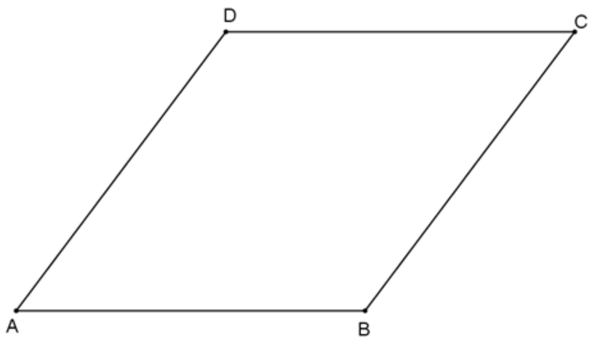
5) ∴ □ABCD मध्ये, रेख BC ∥ रेख AD ....विधान (3)

रेख AB ∥ रेख CD ....विधान (4)

∴ □ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

निष्कर्ष:
जर चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागत असतील तर तो चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो.

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी : क्र: 4



पक्ष: □ABCD मध्ये, बाजू AD ∥ बाजू CB

आणि बाजू AD ≅ बाजू CB

साध्य: □ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

तुम्हाला समांतरभुज चौकोनाची व्याख्या माहित आहे. व्याख्येनुसार, चौकोनाच्या संमुख बाजूंच्या दोन्ही जोड्या समांतर असेल तर तो समांतरभुज चौकोन असतो.

दिलेल्या माहितीनुसार, चौकोनाची एक बाजू समांतर व एकरूप आहे.

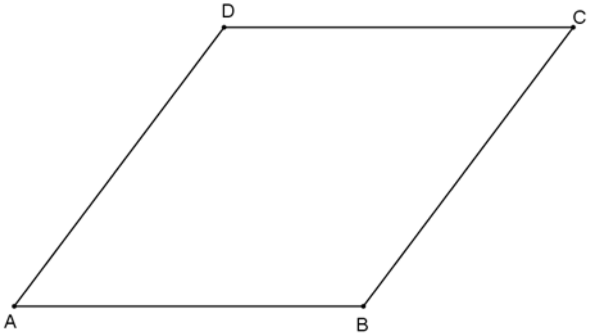
1) चौकोनाची दुसरी जोडी समांतर दाखवली पाहिजे त्यासाठी-

a) समांतर रेषांच्या कसोट्यांपैकी कोणती कसोटी तुम्ही वापरू शकता यावर विचार करा.

b) कसोटी वापरण्यासाठी रचना करणे आवश्यक आहे का?

2) बाजू DC ∥ बाजू BA , दाखविण्यासाठी व्युत्क्रम कोन कसोटीचा उपयोग करावयाचा असेल तर कोणती छेदिका काढणे योग्य आहे?

समांतरभुज चौकोनाची कसोटी : क्र: 4



3) समजा, रेख AC हा कर्ण काढला तर व्युत्क्रम कोनांच्या कोणत्या जोडीने बाजू DC ‖ बाजू BA मिळेल?

4) व्युत्क्रम कोनांची ही जोडी एकरूप आहे हे दाखविण्यासाठी कोणते दोन त्रिकोण एकरूप दाखविणे आवश्यक आहे?

5) आता त्रिकोण एकरूपतेच्या कोणत्या कसोटीनुसार हे दोन त्रिकोण एकरूप दाखवाल यावर विचार करा.

6) त्रिकोण एकरूप झाल्यामुळे ∠DCA व ∠BAC यांचा कोणता संबंध मिळेल?

7) ह्या एकरूप कोनांचा उपयोग कोणत्या दोन रेषा समांतर दाखविण्यासाठी कराल व कसा?वरील प्रश्नांची उत्तरे मिळवा व योग्य प्रकारे सिद्धता लिहा. तयार केलेली सिद्धता लिहा.

समांतरभुज चौकोनाचे प्रकार : (त्यांचे गुणधर्म व कसोट्या)

1)आयताच्या कर्णांचा गुणधर्म :

□ABCD हा आयताकृती 'पोहण्याचा तलाव आहे' (स्विमिंग पूल). बाजू AB ची लांबी 40 मीटर व बाजू BC 30 मीटर आहे. रविवारची शाळेला सुट्टी असल्याने राहूल, अजय, स्वाती, रीना व सोहम हे पाचही जण पोहण्यासाठी गेले. पोहताना मजा यावी, खेळ अजून रंजक व्हावा म्हणून त्यांनी स्पर्धा लावली. नेहमीप्रमाणे स्पर्धा न लावता त्यातील राहूलला 'A' ह्या ठिकाणी उभे केले व अजयला 'B' ह्या ठिकाणी उभे केले. पहिल्यांदा राहूलने A पासून C पर्यंत जायचे, तो 'C' ह्या ठिकाणी आल्यानंतर, अजयने 'B' ह्या ठिकाणापासून 'D' ह्या ठिकाणापर्यंत जायचे.

दोघेही पोहण्यासाठी एकाच वेळेस जात नसल्याने त्यांची टक्कर होण्याची शक्यता नाही.

यासाठी दोघांना लागणारा वेळ स्वाती व सोहमने मोजला.

स्वाती व सोहमला शंका आली की, दोघांनाही पोहण्यासाठी एकाला जास्त अंतर तर दुसऱ्याला कमी अंतर कापावे लागणार.

राहूलने व अजयने कापलेले अंतर काढावे लागेल. □ABCD आयत असल्यामुळे त्याच्या कोनांची मापे विचारात घ्या.

कोणत्या प्रमेयाच्या आधारे AC व BD ही अंतरे ठरविता येतील?

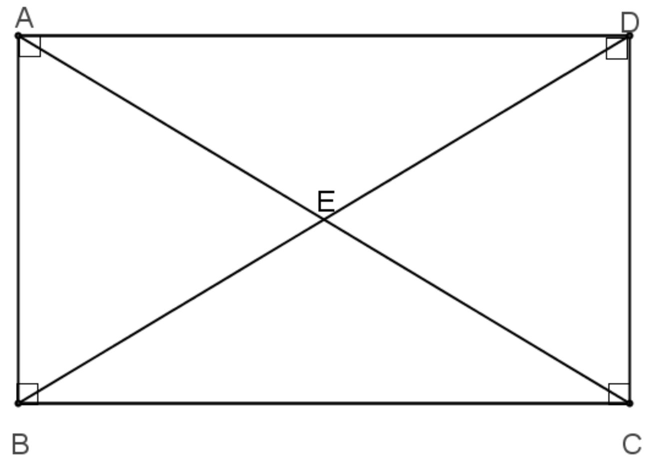
त्यांची शंका योग्य आहे किंवा नाही हे ठरविण्यासाठी तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.

दोघांनीही कापलेल्या अंतरांबद्दल तुम्ही काय निष्कर्ष काढाल?

पायथागोरसाच्या प्रमेयाने AC = BD = 50 मी. असल्याने दोघांनाही समान अंतरच जावे लागले.

यावरून आयताच्या कर्णांचा कोणता गुणधर्म तुम्हाला कळला तो कसा सिद्ध करता येईल?

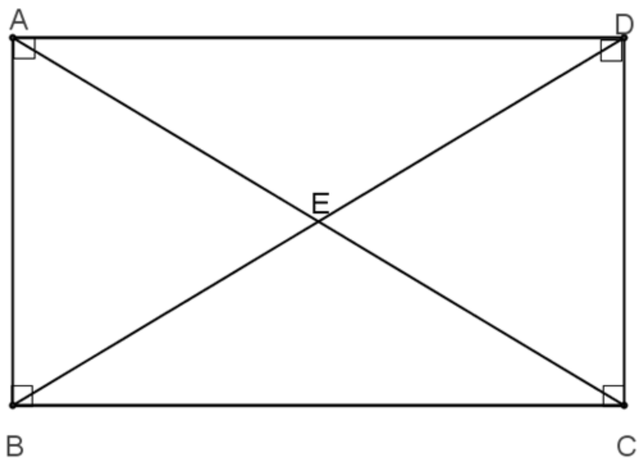
आयताचे गुणधर्म



1) □ABCD या आयतामध्ये चारही कोन काटकोन आहेत म्हणून वर सिद्ध केलेल्या समांतरभुज चौकोनाच्या कोणत्या कसोटीच्या आधारे □ABCD हा समांतरभुज असल्याचे सिद्ध करता येईल?

2) बाजू AC व बाजू BD एकरूप दाखविण्यासाठी पायथागोरसचा सिद्धांत न वापरता एकरूप त्रिकोणांच्या गुणधर्मांचा कसा उपयोग करता येईल?

3) त्यासाठी कोणते दोन त्रिकोण एकरूप दाखविणे आवश्यक आहे?



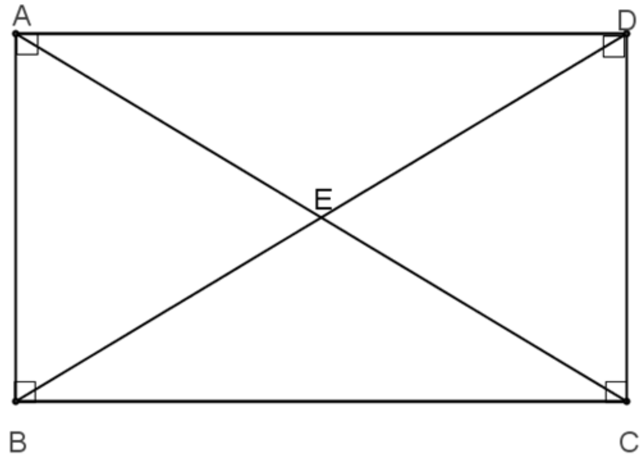
4) हे त्रिकोण निवडा व ते एकरूप दाखविण्यासाठी आयताच्या व्याख्येचा व तो समांतरभुज चौकोनाचा प्रकार आहे याचा कसा उपयोग करता येईल?

5) कोणत्या कसोटीनुसार हे दोन त्रिकोण एकरूप होतील?

6) त्रिकोण एकरूप सिद्ध झाल्यामुळे बाजू AC व बाजू BD चा कोणता संबंध मिळेल?

7) तयार केलेली सिद्धता लिहा. यावरून व आधीच्या कृतीवरून मिळणारा आयताच्या कर्णांचा गुणधर्म लिहा.

काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावरील मध्यगेचा गुणधर्म:



काटकोन चौकोन हा समांतरभुज चौकोन असल्यामुळे त्याचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

□ABCD आयत आहे.

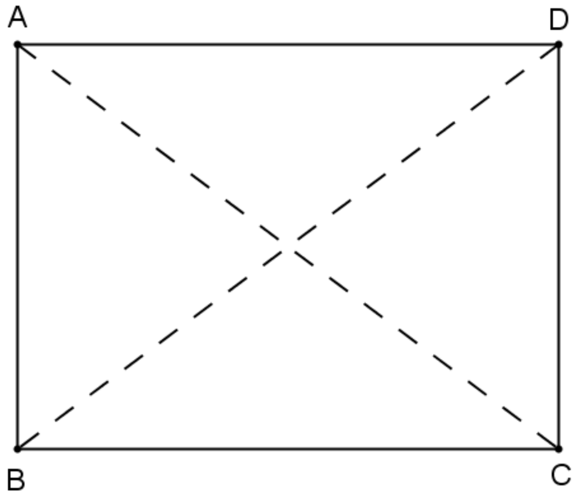
∴ कर्ण AC ≅ कर्ण DB तसेच ते परस्परांना दुभागतात.

∴ E हा कर्ण AC व कर्ण BD चा मध्यबिंदू.

$\therefore BE = \frac{1}{2} BD \quad \therefore BE = \frac{1}{2} AC$

निष्कर्ष: काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावरील मध्यगेची लांबी कर्णाच्या निम्मी असते.

आयताची कसोटी क्र: 1



पक्ष:

□ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

कर्ण AC ≅ कर्ण DB

साध्य: □ABCD हा आयत आहे.

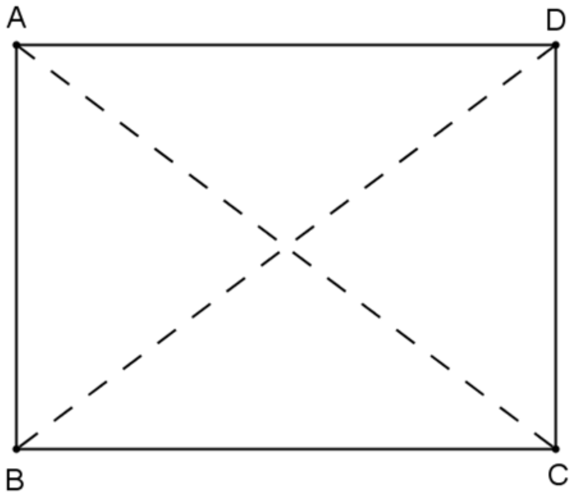
दिलेला समांतरभुज चौकोन आयत आहे हे सिद्ध करण्यासाठी त्याचे किती कोन काटकोन आहेत हे सिद्ध करावे लागेल?

तो समांतरभुज असल्याने त्याच्या संमुख कोनांच्या दोन्ही जोड्या एकरूप आहेतच व क्रमाने येणारे दोन कोन पूरकही आहेत.

म्हणून त्याचे क्रमाने येणारे दोन कोन एकरूपही सिद्ध झाले तर ते दोन्ही कोन काटकोनही सिद्ध होतील व व्याख्येनुसार तो आयत आहे हे सिद्ध होईल.

या चौकोनाचे क्रमाने येणारे दोन कोन $\angle ABC$ व $\angle DCB$ एकरुप दाखवण्यासाठी कोणते त्रिकोण एकरूप दाखवले पाहिजेत? व कसे?

आयताची कसोटी क्र: 1



पक्ष:

□ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

कर्ण AC ≅ कर्ण DB

साध्य: □ABCD हा आयत आहे.

रिकाम्या जागा भरून पुढील सिद्धता पूर्ण करा.

तसेच प्रत्येक आयत हा समांतरभुज चौकोन असतोच त्यामुळे समांतरभुज चौकोनाचे सर्व गुणधर्म आयतासाठीही सत्य असतात हे लक्षात ठेवा.

1) ΔABC व ΔDCB मध्ये,

रेख .... ≅ रेख CD ...(समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख भुजा एकरूप असतात.)

रेख BC ≅ रेख ....(सामाईक बाजू)

रेख ....≅ रेख DB ..... (पक्ष)

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta$ .... (बा-बा-बा एकरूपता कसोटी)

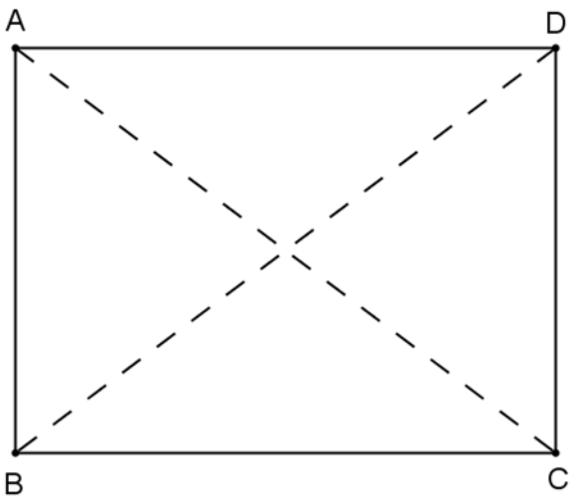
$\angle ABC \cong \angle DCB$ ....(..........................)

2) समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख कोनांचा गुणधर्म कोणता?

→ समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख कोनांच्या दोन्ही जोड्या .... असतात.

$\therefore$ $\angle ABC \cong \angle ADC$ व $\angle BAD \cong \angle DCB$

आयताची कसोटी क्र: 1



पक्ष:

□ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

कर्ण AC ≅ कर्ण DB

साध्य: □ABCD हा आयत आहे.

3. एकाच चौकोनाच्या चार कोनांच्या मापांची बेरीज किती असते?

→ ....

4. □$ABCD$ प्रत्येक कोनाचे माप किती?

→ $\frac{360}{4}$ = ...

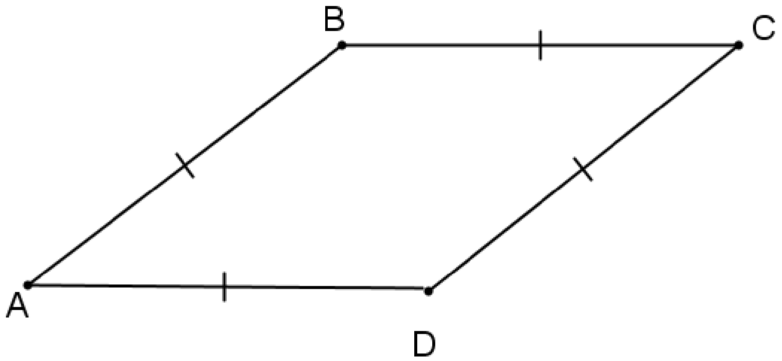
∴ व्याख्येनुसार □$ABCD$ हा आयत आहे.

निष्कर्ष:

जर समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकरूप असतील तर तो आयत असतो.

समभुज चौकोन व त्याचे गुणधर्म:

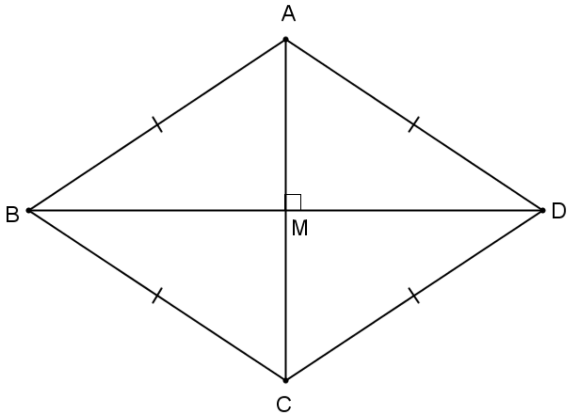
समभुज चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो का?



□ABCD हा समभुज आहे. म्हणून व्याख्येनुसार त्याच्या बाजूंबद्दल काय कळते?

एखादा चौकोन समांतरभुज असण्यासाठी कोणकोणत्या कसोट्या असतात हे आपण पाहिले? त्यांपैकी कोणत्या कसोटीचा उपयोग करून □ABCD समांतरभुज आहे किंवा नाही हे ठरेल?

समभुज चौकोनाच्या कर्णांचे प्रमेय:



पक्ष: □ABCD या समभुज चौकोनाचे कर्ण AC व आणि कर्ण BD बिंदू M मध्ये छेदतात.

साध्य: □ABCD चे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक आहेत.

हा गुणधर्म सिद्ध करण्यासाठी प्रकरण 3 मधील 'लंबदुभाजकाचे प्रमेय' आठवा.

विश्लेषण:

1) □ABCD हा समभुज चौकोन आहे म्हणजेच त्याच्या चारही बाजूंबद्दल काय विधान लिहाल?

2) AB = AD व CB =CD यावरून रेख BD च्या अंत्यबिंदूपासून कोणते बिंदू समदूर आहेत हे कळते?

म्हणून लंबदुभाजकाच्या प्रमेयानुसार, रेख BD च्या लंबदुभाजकावरील कोणते दोन बिंदू मिळाले?

म्हणून कर्ण AC चा रेख BD शी कोणता संबंध कळतो?

3) त्याचप्रमाणे, AB = CB व DA = DC यावरून विधान (2) प्रमाणे कोणता निष्कर्ष काढाल?

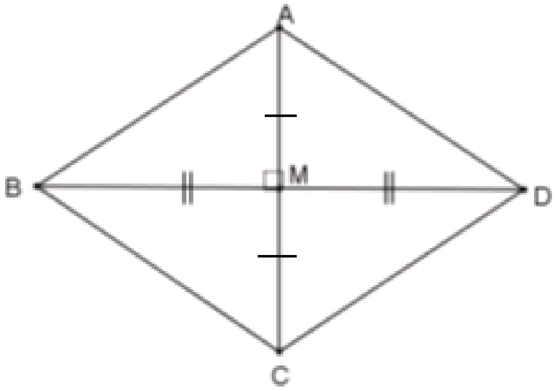
म्हणून कर्ण BD चा रेख AC शी कोणता संबंध कळेल?

4) वरील विधानांवरून समभुज चौकोनाच्या कर्णांच्या गुणधर्माची सिद्धता लिहा.

खालील विधान पूर्ण करा .

निष्कर्ष: समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे ....असतात.

समभुज चौकोनाची कसोटी:



पक्ष: □ABCD मध्ये, कर्ण AC व कर्ण BD परस्परांचे लंबदुभाजक आहेत.

साध्य: □ABCD हा समभुज चौकोन आहे.

विश्लेषण:

1) □ABCD हा आपल्याला समभुज चौकोन दाखवायचा असल्यास व्याख्येनुसार त्याच्या बाजूंबद्दल काय सिद्ध केले पाहिजे?

2) □ABCD हा समांतरभुज असून कर्ण AC हा कर्ण BD चा लंबदुभाजक आहे...(पक्ष)

लंबदुभाजकाच्या प्रमेयाचा उपयोग करून कोणत्या बाजू एकरूप आहेत ते लिहा.

□ABCD हा समांतरभुज आहे म्हणून रेख AB ≅ रेख CD व रेख CB ≅ रेख AD

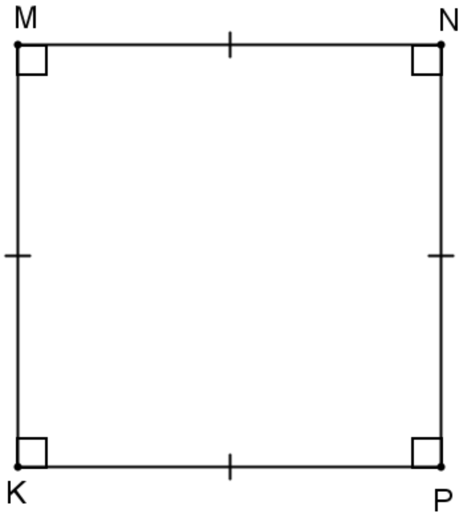
....(दाखवण्यासाठी समांतरभुज चौकोनाच्या बाजूंचा कोणता गुणधर्म वापरावा लागतो?)

4) विधान (2) व (3) वरून तुम्ही काय निष्कर्ष काढाल?

वरील प्रश्नांची उत्तरे मिळवा व योग्य प्रकारे सिद्धता लिहा.

चौरस व त्याचे गुणधर्म:

चौरसाच्या कर्णांचे गुणधर्म:



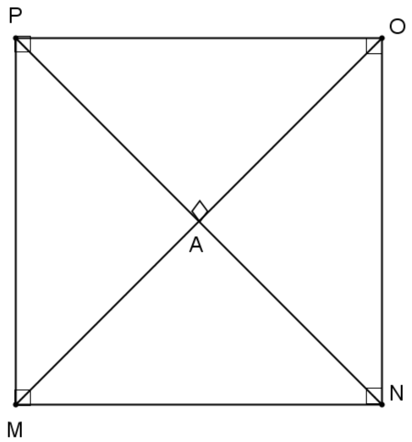
चौरसाची व्याख्या तुम्हाला माहित आहे.

समभुज चौकोन व आयत यांच्या व्याख्या व कर्णांचे गुणधर्म तुम्हाला माहित आहेत. स्तंभ A मधील रिकाम्या जागा प्रथम योग्य प्रकारे भरून तयार होणाऱ्या विधानांची स्तंभ B मधील अचूक विधानाशी जोडी लावी.

खालील योग्य जोड्यांवरून चौरसाच्या कर्णांचे गुणधर्म लिहा.

स्तंभ A	स्तंभ B
i) चौरस हा आयत असतो कारण त्याचे सर्व कोन.........असतात.	a) कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक नसतात.
ii) चौरस हा समभुज असतो कारण त्याच्या सर्व बाजू ....असतात.	b) कर्ण परस्परांशी एकरूप असतात.
	c) कर्ण परस्परांशी एकरूप नसतात.
	d) कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.

चौरसाची कसोटी :



पक्ष :□MNOP मध्ये, कर्ण MO ≅ कर्ण NP,

कर्ण MO ⊥ कर्ण NP (A मध्ये)

व A हा रेख MO व रेख NP चा मध्यबिंदू आहे.

साध्य :□MNOP हा चौरस आहे.

सिद्धता : दिलेला चौकोन चौरस आहे हे सिद्ध करण्यासाठी तो चौरसाच्या व्याख्येतील अटी पूर्ण करतो हे सिद्ध केले पाहिजे.

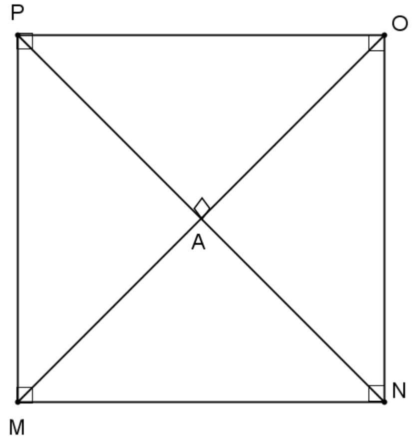
चौरसाची व्याख्या : सर्व कोन काटकोन व सर्व बाजू एकरूप असलेला चौकोन.

1) A हा रेख MO व रेख NP चा मध्यबिंदू दिला आहे. म्हणजे □MNOP चे कर्ण MO व NP परस्परांना दुभागतात. तसेच कर्ण MO ⊥ कर्ण NP (A मध्ये) हे दिले आहे.

ज्या चौकोनाचे कर्ण परस्परांना लंब असतात व ते परस्परांना दुभागतात तो ....असतो.

∴ □MNOP हा ....चौकोन आहे.

T5_L9_A2



2) □MNOP मध्ये कर्ण MO ≅ कर्ण NP हे पक्षात आहे.

ज्या चौकोनाचे कर्ण परस्परांशी एकरूप असतात

तो चौकोन..........असतो. म्हणून □MNOP हा ..... आहे

3) विधान 1 व 2 वरून, □MNOP हा ......असून तो ....आहे.

यावरून तो ....आहे.

निष्कर्ष:

जर चौकोनाचे कर्ण एकरूप आणि परस्परांचे लंबदुभाजक असतील तर तो चौकोन चौरस असतो.

कृती:

त्रिकोणाच्या बाजूंच्या मध्यबिंदूंचे प्रमेय:

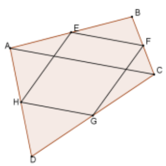
अपेक्षित वेळ: 10 ते 12 मिनिटे

i) एका कागदावर □ABCD हा कोणताही चौकोन काढा.

विशिष्ट प्रकारचा नको.

ii) मोजपट्टी वापरून बाजू AB, BC, CD, DA यांचे E, F, G, H हे मध्यबिंदू खुणा करून घ्या.

शेजारील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे □EFGH काढा.

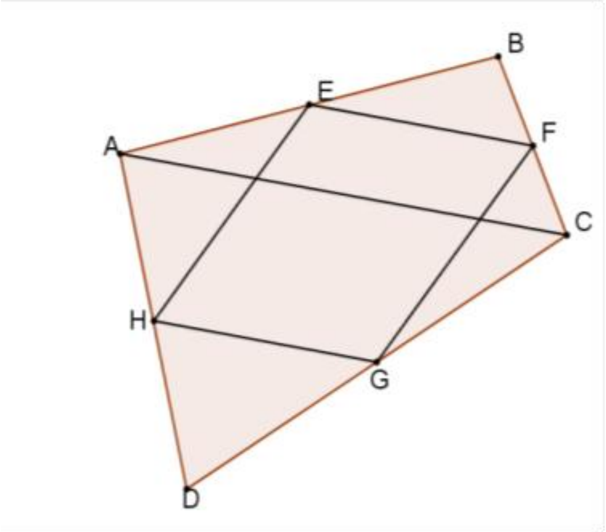


iii) आता मोजपट्टीने EF, HG व AC यांची लांबी मोजा.

iv) या लांबींमध्ये कोणकोणते संबंध आढळतात?

v) आता ∠BEF व ∠BAC यांची मापे कोनमापकाने मोजा. त्यावरून रेख EF व रेख AC यांमधील संबंध ठरवा. तुम्ही कोणत्या कसोटीचा उपयोग केला?

vi) वरीलप्रमाणेच ∠DAC व∠DHG यांची मापे मोजून रेख HG व रेख AC यांमधील संबंध ठरवा.



vii) आता रेख EF व रेख HG यांमध्ये कोणते दोन संबंध सापडले ते लिहा.

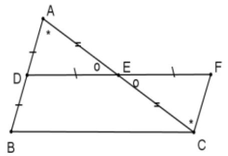
viii) त्यावरून □EFGH कोणत्या प्रकारचा आहे ते ठरवा.

ix) त्यासाठी कोणत्या कसोटीचा आधार घेतलात ते लिहा.

या कृतीतून कळलेला गुणधर्म सिद्ध कसा करता येईल?

त्रिकोणाच्या बाजूंच्या मध्यबिंदूंचे प्रमेय

पक्ष: Δ ABC मध्ये, बिंदू D व E हे अनुक्रमे बाजू AB व बाजू AC चे मध्यबिंदू आहेत.



साध्य: i) रेख DE || रेख BC ii) DE = ½ BC

हे प्रमेय सिध्द करण्यासाठी आपण

i) समांतर रेषांची व्युत्क्रम कोन कसोटी व
ii) समांतरभुज चौकोनाच्या कसोटयांपैकी एक कसोटी वापरणार आहोत.

त्यामुळे त्याची तयारी असणे आवश्यक आहे.

टीप:

येथे DE = ½ BCसिध्द करावयाचे आहे. अशा प्रकारच्या सिध्दतेत एकतर आपण बाजू BC चा मध्यबिंदू मिळवून BC च्या निम्म्या लांबीचे दोन रेषाखंड मिळवू शकतो व त्यातला एक रेषाखंड रेख DE शी एकरूप दाखविता येतो का असा प्रयत्न करू शकतो.

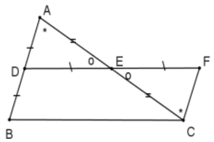
किंवा

DE च्या दुप्पट लांबीचा रेषाखंड तयार करून तो रेख BC शी एकरूप दाखविण्याचाप्रयत्न करू शकतो.

वरील आकृती पाहून रचनेसाठी येथे कोणता पर्याय निवडला आहे ते तुम्हाला कळले का?

आकृतीवरून कळलेली रचना लिहून ठेवा.

सिध्दतेसाठी विश्लेषण:



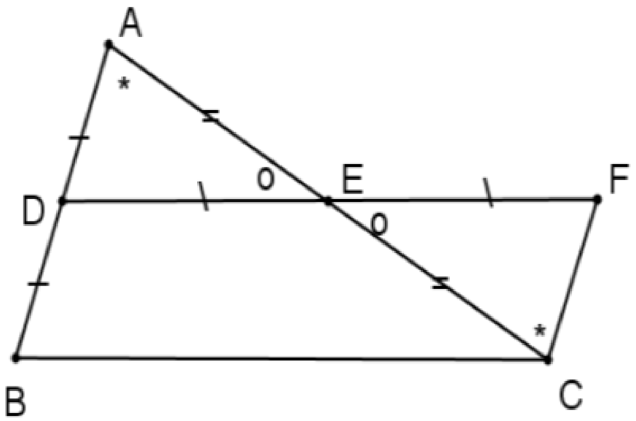
i) ΔAED≅ ΔCEFदाखविण्यासाठी आकृतीमधील एकरूप घटक कारणांसह शोधा.

ii) या एकरूप त्रिकोणांमुळे ΔCEF चा कोणता कोनΔAED च्या ∠DAE शी एकरूप आहे हे सिध्द झाले?

iii) रेख AD व रेख CF यांना रेख AC ने छेदल्याने तयार झालेल्या ∠DAE व ∠FCE या कोनांना कोणत्या प्रकारचे कोन असे आपण म्हणतो? ते एकरूप सिध्द झाल्यामुळे समांतर रेषांच्या कोणत्या कसोटीनुसार रेख AD // रेख CF हे सिध्द झाले?

iv) A-D-B असल्यामुळे आता रेख DB // रेख CF हे सिध्द झाले.

v) ΔAED ≅ ΔCEF हे आपण आधी सिध्द केले आहे व D हा रेख AB चा मध्यबिंदू दिला आहे. त्यामुळे रेख DB व रेख CF बद्दल आणखी कोणती माहिती मिळते?



vi) या दोन्ही माहितीच्या आधारे समांतरभुज चौकोनाची योग्य कसोटी वापरून □DBCF समांतरभुज दाखवा.

vii) आता समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख बाजूंचे दोन गुणधर्म वापरून

i) रेख DE // रेख BC व ii) DE = ½ BC दाखवा.

या प्रश्नांच्या उत्तरांची योग्य मांडणी करून या प्रमेयाची सुसंगत सिद्धता लिहा.

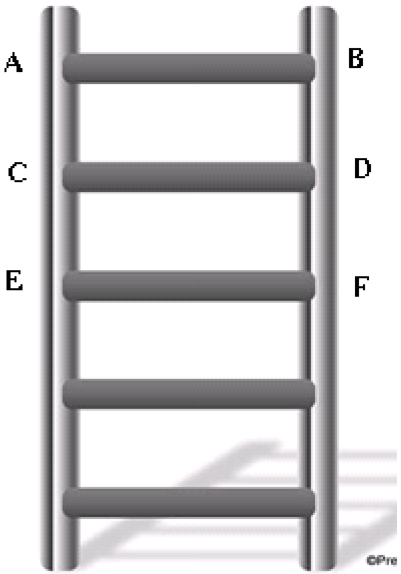
निष्कर्ष: त्रिकोणांच्या दोन बाजूंचे मध्यबिंदू जोडणारा रेषाखंड त्रिकोणाच्या तिसऱ्या बाजूला समांतर असतो व त्याची लांबी तिसऱ्या बाजूच्या निम्मी असते.

तीन समांतर रेषांनी त्यांच्या छेदिकेवर केलेले आंतरछेद

अपेक्षित वेळ: 30 मिनिटे

खाली दिलेली दोन चित्रे सर्वांच्या ओळखी ची आहेत. आता जरा त्यांचेच थोडे अधिक नीट निरीक्षण करू.

आकृती क्र.1



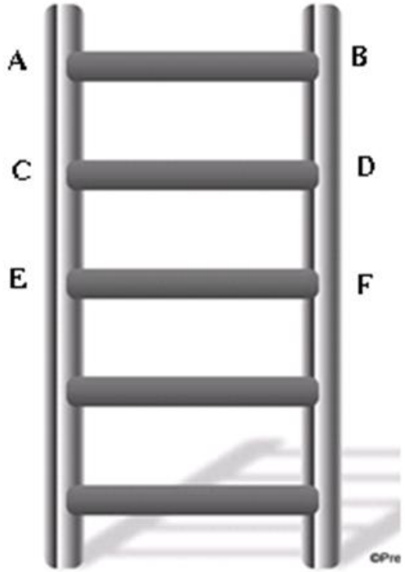
आकृती क्र. 2

i) वरील दोन चित्रांमध्ये काय दिसत आहे?

ii) त्यातील शिड्यांच्या पायऱ्या कशा प्रकारचे रेषाखंड आहेत?

iii) आकृती क्रमांक 1 मध्ये रेख AE // रेख BF असल्यामुळे तयार झालेले □ABDC, □CEFD हे कोणत्या प्रकारचे आहेत?

आकृती क्र.1



आकृती क्र. 2

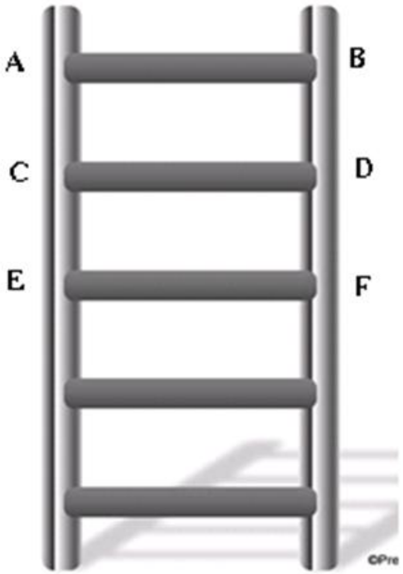
iv) त्यावरून AC व BD च्या लांबी मधील संबंध तसेच रेख CE व रेख DF च्या लांबी मधील संबंध काय आहे ते सकारण ठरवा.

v) AC व CE यांना रेख AB, रेख CD व रेख EF या तीन समांतर रेषांनी त्यांच्या AE या छेदिकेवर केलेले आंतरछेद म्हणतात. मग त्याचप्रमाणे त्याच तीन समांतर रेषांनी रेख BF वर केलेले आंतरछेद कोणते?

समजा, AC = CE असेल तर रेख BD वर त्याच रेषांनी केलेल्या आंतरछेदांमध्ये कोणता संबंध आहे?

कोणते प्रमेय तुम्हाला वापरावे लागले?

आकृती क्र.1



आकृती क्र. 2

आकृती क्र. 2 मध्ये, रेख **MR** व रेख **NS** या परस्परांना समांतर नाहीत हे लक्षात घ्या.

जर MP = PR असेल तर NQ = QS असेल काय ते ठरवावे लागेल.

त्यासाठी आकृती 2 प्रमाणे तीन समांतर रेषा व त्यांच्या दोन छेदिका दाखविणारी आकृती वहीत काढून घ्या. आता आकृती 1 मधून मिळालेला नियम जर या आकृतीमध्ये वापरावयाचा असेल तर कोणती व कशी रचना करावी लागेल?

सुचलेली रचना योग्य असेल तर एकरूप त्रिकोणांची व समांतरभुज चौकोनाचे गुणधर्म वापरून तर NQ = NS सिध्द करणे तुम्हाला थोड्या प्रयत्नाने नक्की जमेल. प्रयत्न तर करा.

निष्कर्ष: तीन समांतर रेषांनी जर त्यांच्या एका छेदिकेवर केलेले आंतरछेद एकरूप असतील तर त्याच तीन रेषा त्यांच्या दुसऱ्या कोणत्याही छेदिकेवर एकरूप आंतरछेद करतात.

कृती

त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या मध्यबिंदूच्या प्रमेयाचा व्यत्यास

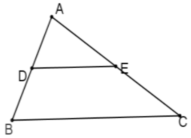
अपेक्षित वेळ : 15 -20 मिनिटे

i) ΔABC हा कोणताही एक त्रिकोण काढून घ्या.

त्याच्या बाजू AB चा मध्यबिंदू D ला खूण करून घ्या.

ii) आता D बिंदूतून रेख BC ला समांतर रेषा काढून घ्या.

ती बाजू BC ला ज्या बिंदूत छेदते त्याला E नाव द्या.

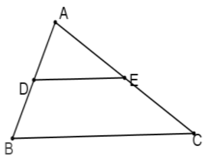


iii) आता AE व CE ची लांबी मोजपट्टीने मोजा. त्यावरून E बिंदूबद्दल काय कळले ते ठरवा.

त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या मध्यबिंदूच्या प्रमेयाचा व्यत्यास

पक्ष: ΔABC हा कोणताही एक त्रिकोण आहे.
त्याच्या बाजू AB चा D हा मध्यबिंदू आहे. D बिंदूतून बाजू BC ला समांतर काढलेला रेख DE हा बाजू AC ला E मध्ये छेदतो.

साध्य: E हा बाजू AC चा मध्यबिंदू आहे.(रेख DE हा बाजू AC ला दुभागतो.



आता या प्रमेयाच्या सिद्धतेसाठी आवश्यक असलेली रचना अशी करा की, त्यामुळे 'तीन समांतर रेषांच्या आंतरछेदांचे प्रमेय' वापरता येईल.

ज्यांना ही रचना सुचेल त्यांना पुढच्या पायरीतच सिध्दता संपली असा अनुभव येईल त्यामुळे रचनेवर थोडा अधिक वेळ गेला तरी चालेल.

निष्कर्ष: त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या मध्यबिंदूतून दुसऱ्या बाजूला समांतर असलेली रेषा त्याच्या तिसऱ्या बाजूला दुभागते.

कृती

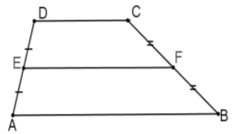
अपेक्षित वेळ : 10 मिनिटे

समलंब चौकोनाच्या मध्यगेचा गुणधर्म:

समलंब चौकोनाच्या व्याख्येनुसार त्याच्या संमुख बाजूंची एकच जोडी समांतर असते व त्या बाजू एकरूप नसतात. (विचार करा की जर त्या समांतर बाजूंची जोडी एकरूपही असेल तर तो कोणत्या प्रकारचा चौकोन होईल?)

समलंब चौकोनाच्या संमुख बाजूंची जी जोडी समांतर नसते त्यांना असमांतर बाजू म्हणतात. या असमांतर बाजूंचे मध्यबिंदू जोडणाऱ्या रेषाखंडाला समलंब चौकोनाची मध्यगा म्हणतात. तिचा एक अतिशय महत्वाचा एक गुणधर्म पुढील कृतीतून आपण शोधणार आहोत.

कृती: समलंब चौकोनाच्या मध्यगेचा गुणधर्म:



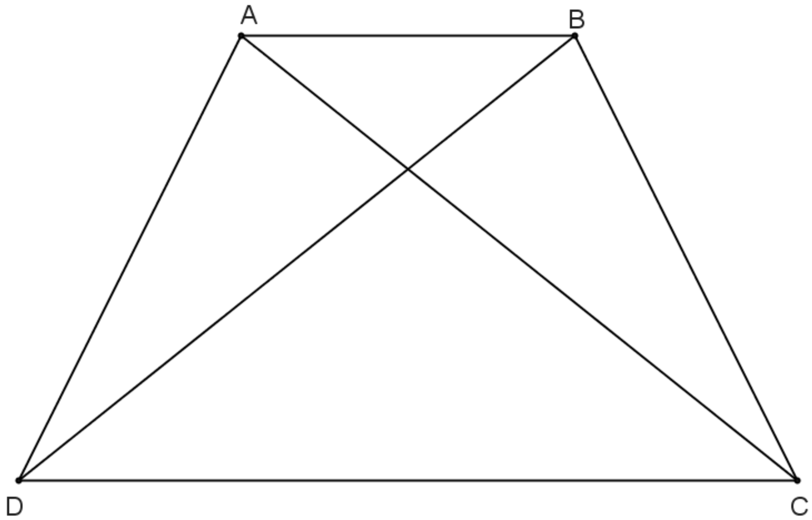
i) वरीलप्रमाणे समलंब चौकोनाची आकृती वहीच्या काढून घ्या. त्यात AB = 7सेमी, CD = 3सेमी घ्या. असमांतर बाजूंची लांबी मोजण्याची गरज नाही.

ii) आता E व F हे अनुक्रमे बाजू AD व BC चे मध्यबिंदू घ्या, ते जोडणारा रेख EF काढून घ्या.

iii) रेख EFची लांबी मोजून नोंद करून ठेवा.

iv) त्या किंमतीचा AB = 7सेमी, CD = 3सेमी यांच्याशी काय संबंध आहे ते शोधा. यातून समलंब चौकोनाच्या मध्यगेची लांबी काढण्याचे कोणते सूत्र मिळाले?

कृती :



शेजारील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे समद्विभुज समलंब चौकोन काढा.

कंपासपेटीतील कंपासच्या सहाय्याने कर्ण AC व कर्ण BD मोजा.

त्यावरून समव्दिभुज समलंब चौकोनाच्या कर्णांचा कोणता गुणधर्म कळला तो योग्य शब्दात लिहून ठेवा.

गुणधर्म: समद्विभुज समलंब चौकोनाचे कर्ण परस्परांशी एकरूप असतात.

Exercise

गट I) 1 गुणांचे प्रश्न:

1) पुढील विधाने सत्य की असत्य ते लिहा.

i) प्रत्येक आयत हा चौरस असतोच.

ii) समभुज चौकोनाचा कर्ण ज्या शिरोबिंदूतून जातो त्या शिरोबिंदूंशी असलेले चौकोनाचे कोन दुभागतो.

iii) एखादा समभुज चौकोन चौरसही असण्यासाठी त्या चौकोनाचा कोणताही एक कोन काटकोन सिद्ध करणे पुरेसे असते.

iv) □ABCD मध्ये रेख AB ∥ रेख CD व रेख BC ≅ रेख AD असेल तर तो समांतरभुज चौकोन असतो.

v) **95°, 70°, 110°, 80°** ही एखाद्या बहिर्वक्र चौकोनाच्या कोनांची मापे असू शकतील का? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.

vi) एका चौकोनाच्या तीन कोनांच्या मापांची बेरीज **3** काटकोनांइतकी आहे. त्या चौकोनाचा प्रकार ओळखा.

vii) एका चौकोनाच्या कोनांच्या मापांचे गुणोत्तर 3 : 6 : 8: 13 आहे त्या कोनांची मापे काढा.

गट II) 2 गुणांचे प्रश्न:

i) एका आयताची एक बाजू 5 सेमी असून कर्ण 13 सेमी आहे तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

ii) □KLMN समांतरभुज असून ∠K - ∠L = 40^0 तर ∠K व ∠L यांची मापे ठरवा.

iii) ΔBAD मध्ये BA = 8 सेमी, AD = 9 सेमी, BD = 7 सेमी बाजू BA, AD व BD चे अनुक्रमे P, Q, R हे मध्यबिंदू आहेत. ΔPQR च्या तीनही बाजूंची लांबी ठरवा.

iv) एका चौरसाची बाजू 8 सेमी आहे तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

v) समांतरभुज चौकोनाच्या दोन क्रमाने येणा-या कोनांचे गुणोत्तर **2 : 5** आहे. त्या कोनांची मापे काढा.

गट III) 3 गुणांचे प्रश्न:

i) एका चौकोनाच्या चार क्रमवार कोनांची मापे 1:2:3:4 या प्रमाणात आहेत तर त्या कोनांची मापे ठरवा व तो समलंब चौकोन दाखवा.

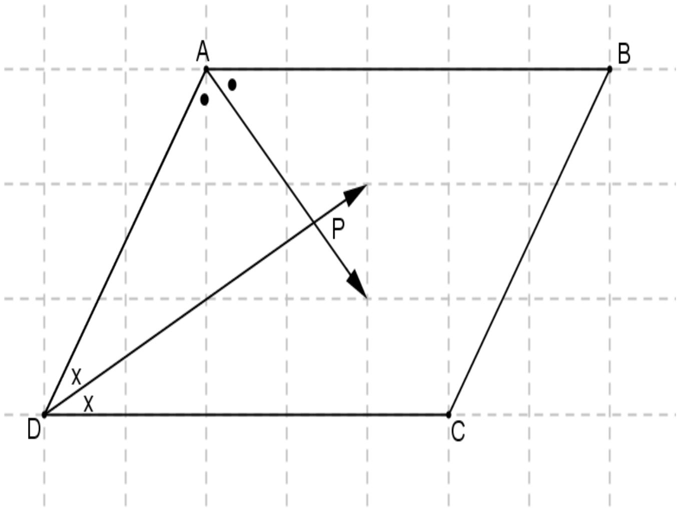
ii) समभुज चौकोनाचे कर्ण व चौरसाचे कर्ण यांच्यातील साम्य व फरक लिहा.

iii) □PQRS या समभुज चौकोनाच्या कर्णांचा छेदनबिंदू M आहे. PR = 6 सेमी, PQ = 5 सेमी तर कर्ण QS ची लांबी ठरवा.

T5_L12

गट IV) 4 गुणांचे प्रश्न

1)



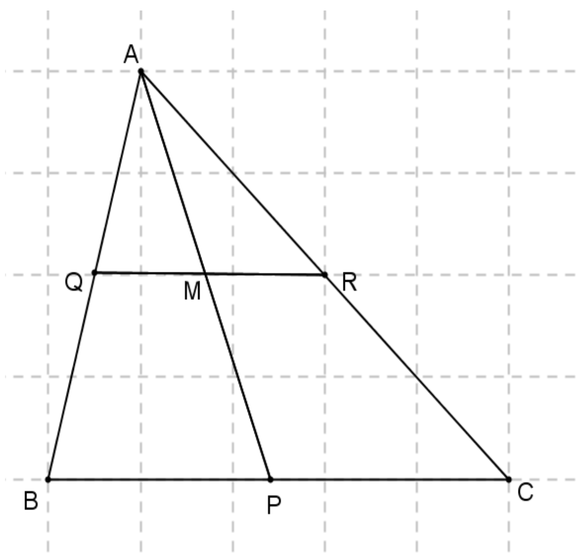
पक्ष: □ABCD हा समांतरभुज आहे.

किरण AP व किरण DP हे अनुक्रमे

∠BAD व ∠CDA चे मध्यबिंदू आहेत.

साध्य: ∠APD = 90^0

2)



पक्ष: ΔABC मध्ये P, Q, R हे अनुक्रमे बाजू BC,

बाजू AC चे मध्यबिंदू आहेत.

रेख QR हा रेख AP ला M मध्ये छेदतो.

साध्य: रेख QR हा रेख AP ला दुभागतो.

(म्हणजेच M हा रेख AP चा मध्यबिंदू दाखवा.)

3) बहिर्वक्र चौकोनांच्या संचास विश्वसंच U नाव द्या. विश्वसंच U चे खालील उपसंच 'वेनचित्राद्वारे' दाखवा.

i) समांतरभुज चौकोनांचा संच

ii) पतंगांचा संच

iii) समभुज चौकोनांचा संच

iv) चौरसांचा संच

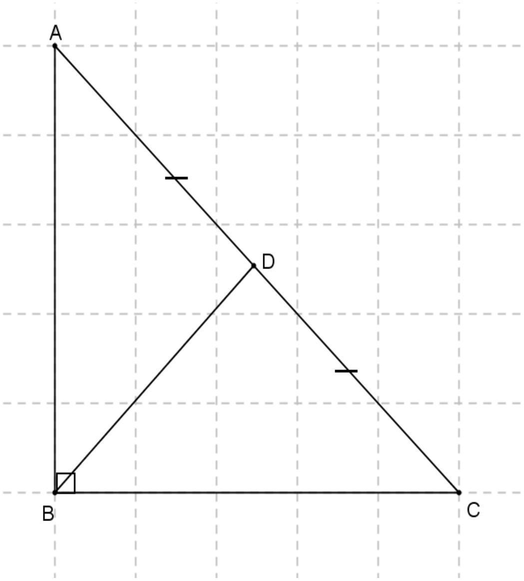
v) आयतांचा संच

vi) समलंब चौकोनांचा संच

vii) समव्दिभुज समलंब चौकोनांचा संच

viii) वरील पैकी कोणत्याही प्रकारच्या नसलेल्या बहिर्वक्र चौकोनांचा संच.

4)

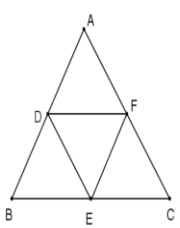


खालील आकृतीत आयताच्या कर्णांच्या गुणधर्माचा उपयोग करून, सिद्ध करा की, काटकोन त्रिकोणात कर्णावर काढलेल्या मध्यगेची लांबी कर्णाच्या लांबीच्या $\frac{1}{2}$ पट इतकी असते.

रचना सुचणे महत्वाचे आहे.

नसल्यास तुमच्या आकृतीच्या शेजारीच **AB** व **BC** एवढ्या मापांचा आयत काढा.

5)



Δ ABC हा समभुज त्रिकोण आहे. बाजू AB, BC व AC चे बिंदू D, E व F हे अनुक्रमे मध्यबिंदू आहेत.

1. दिलेल्या आकृतीत आणखी चार समभुज त्रिकोण तुम्ही शोधू शकाल का? तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.
2. दिलेल्या आकृतीत 3 समभुज चौकोन शोधा. तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.
3. दिलेल्या आकृतीत 3 समव्दिभुज समलंब चौकोन शोधा. तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.
4. ∠BDF , ∠BEF व ∠ADE ची मापे शोधा.
5. जर AB = 10, तर ΔDEF ची परिमिती शोधा.

   ΔABC ची परिमिती व ΔDEF ची परिमिती यांतील संबंध काय?

   तुमच्या उत्तराचे समर्थन करा.

Assessment

1) □KLMN या समांतरभुज चौकोनामध्ये, LK = 5.2 सेमी, LM = 6.8 सेमी, तर त्याची परिमिती=.......सेमी

a) 12 सेमी b) 35.36 सेमी c) 17.68 सेमी d) 24 सेमी

2) □ABCD ह्या समांतरभुज चौकोनामध्ये कर्ण AC व BD परस्परांना P बिंदूत छेदतात. जर AP = 4.2 सेमी तर AC = …………

a) 4.2 सेमी b) 8.4 सेमी c) 2.1 सेमी d) यांपेक्षा भिन्न

3) □PQRS हा आयत आहे. PQ = 6 सेमी, QR = 8सेमी तर कर्ण PR = …… सेमी

a) 10 b) 12 c) 16 d) 28

4) आयताचे कर्ण ....असतात हे विधान पुढीलपैकी अचूक पर्याय निवडून पूर्ण करा.

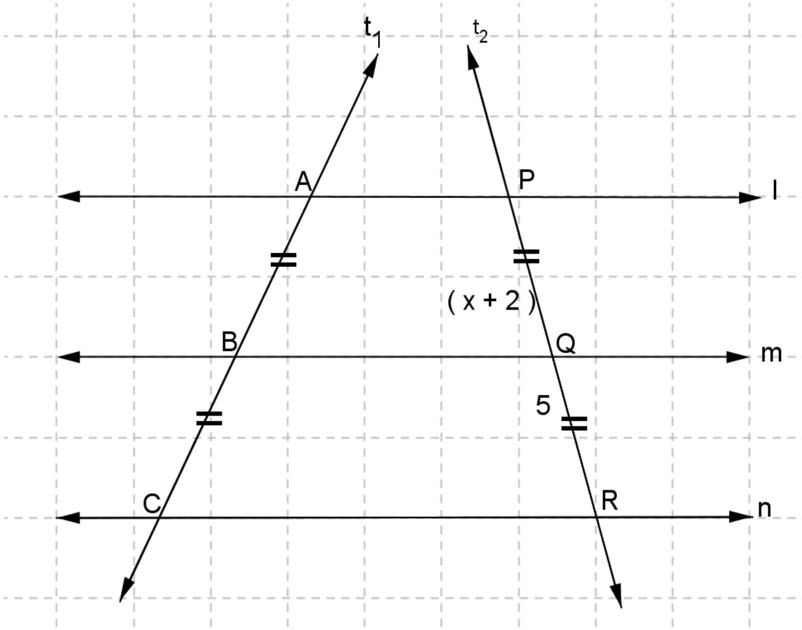
a) परस्परांचे दुभाजक

b) परस्परांचे लंबदुभाजक

c) परस्परांचे लंबदुभाजक आणि परस्परांशी एकरूप

d) परस्परांशी एकरूप आणि परस्परांचे दुभाजक

5)



वरील आकृतीत, रेषा l ∥ रेषा m ∥ रेषा n असून रेषा t_1 व t_2 त्यांच्या छेदिका आहेत.

AB = BC व PQ = (x + 2), QR = 5

तर x = ...

a) 3 b) 7 c) 5 d) 2.5

6) Δ CID मध्ये बाजू CD व ID चे अनुक्रमे M व N मध्यबिंदू आहेत जर CI = 13 सेमी तर MN =....

a) 13 b) 6.5 पेक्षा जास्त c) 6.5 d) 6.5 पेक्षा लहान

7) □PQRS ह्या समलंब चौकोनात रेख PQ ∥ रेख RS. रेख PS व रेख QR चे अनुक्रमे K आणि T मध्यबिंदू आहेत. PQ = 11 सेमी, RS = 7 सेमी तर KT = ...सेमी.

a) 11 b) 7 c) 18 d) 9