T6

प्रकरण 6
निर्देशक भूमिती
संकल्पना चित्र:

पूर्वज्ञान:

प्रतलात **X** व **Y** अक्ष काढून बिंदूंचे निर्देशक ठरविणे व दिलेल्या निर्देशकांवरून बिंदू स्थापन करणे, अक्षांना समांतर रेषांची समीकरणे, पायथागोरसचे प्रमेय, चिन्हांकित संख्यांची वजाबाकी, वर्ग, वर्गमूळ, रेषाखंडाची लांबी, रेषाखंडाचा मध्यबिंदू व गुणोत्तर या संकल्पना माहित असणे.

निर्देशकांची क्रमित जोडी, प्रतलातील बिंदूंचा **x** व **y** निर्देशक यांवरून रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंचे निर्देशक माहित असल्यास त्यांवरून रेषाखंडाची लांबी (अंत्यबिंदूंमधील अंतर) काढण्याचे सूत्र तयार करणे व त्याचे उपयोजन.

वरील सूत्रावरून प्रतलातील दिलेल्या बिंदूचे आरंभबिंदू (0,0) पासूनचे अंतर काढण्याचे सूत्र तयार करणे.

रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंच्या निर्देशंकांवरून रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढण्याचे सूत्र तयार करणे व त्याचे उपयोजन.

रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात

i) आंतरविभाजन व
ii) बाह्यविभाजन करणारे बिंदू

रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूचे निर्देशक व विभाजनाचे गुणोत्तर माहित असल्यास विभाजन करणा-या बिंदूचे निर्देशक काढण्याची सूत्रे तयार करणे व त्यांचे उपयोजन.

निर्देशक भूमिती

T6_L1

दुकाने (market)

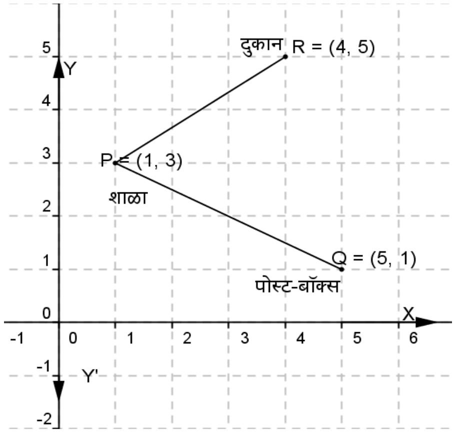
शाळा

मिनी

पोस्ट- बॉक्स

प्रमाण: 200m. = 1 एकक घेऊ.

आलेख:



उजळणी

T6_L2_A1

उजळणी 1

तुम्ही संख्यारेषा व तिच्यावरील दोन बिंदूंमधील अंतर त्यांच्या निर्देशकांवरून कसे काढतात हे शिकला आहात.

वरील संख्यारेषेवरून खालील अंतरे काढा व योग्य जोड्या जुळवून लिहा.

दोन बिंदूंमधील अंतर:
d(E, A)
d(D, F)
d(E, F)
d(O, D)

उत्तर:
5
1
6
-2
0
3

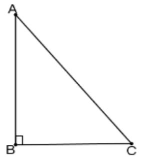
उजळणी 2

T6_L2_A2

II) आलेखात तुम्ही शिकला आहात की, आपण X अक्ष व Y अक्ष हे परस्परांना लंब काढतो.

वरील आलेखामुळे तुम्हाला अंदाज आला असेल की, इथेही 'पायथागोरसचे प्रमेय' आपल्या मदतीला येणार आहे.

खालील काटकोन त्रिकोणासाठी या प्रमेयामुळे मिळणारे समीकरण लिहा.



Δ ABC मध्ये, m$\angle$ ABC = 90

$\therefore (AC)^2 = (\quad)^2 + (\quad)^2$

$\therefore (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

उजळणी 3

III) तुम्हाला चिन्हांकित संख्यांची बेरीज, वजाबाकी येते.खालील आकडेमोडी करा म्हणजे सरावामुळे तुमचा आत्मविश्वास वाढेल. y या चलाच्याच दोन किंमती दिल्या आहेत हे कळावे म्हणून त्या $y_1,\ y_2$ अशा लिहितात हे लक्षात घ्या.

i) $y_1 = 4$, $y_2 = -3$. $\therefore (y_2 - y_1) = (\ ...\ ) - (...\ ) =$ ....

ii) $x_1 = -2$, $x_2 = 8$ $\therefore (x_2 - x_1) = (....) - (...) =$ ....

iii) $y_1 = 0$, $y_2 = -6$. $\therefore (y_2 - y_1) = (\ ...\ ) - (....\ ) =$ .... $\therefore (y_2 - y_1)^2 =$...

iv) $x_1 = -7$, $x_2 = 0$ $\therefore (x_2 - x_1) = (....) - (....) =$ .... $\therefore (x_2 - x_1)^2 =$...

उजळणी 4

T6_L2_A4

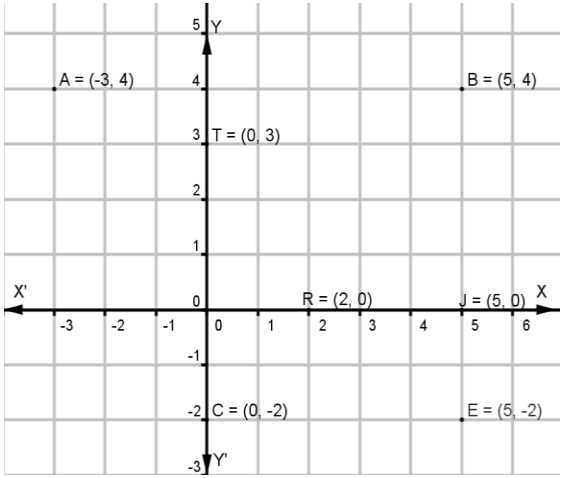
पुढील वर्गमूळांच्या किंमती काढा

$\sqrt{121}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{225}$, ($\sqrt{x^2}$)

उत्तर अनुक्रमे: 15, 8, x, 11

अक्षांवरील दोन बिंदूंमधील अंतर व निर्देशक :

आलेखाचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा.



i) R(2, 0) व J(5, 0) या X अक्षावरील बिंदूंमधील अंतर आलेखावरून किती एकक आहे ते प्रथम मोजा व नंतर निर्देशकांवरून तेच उत्तर मिळते का ते पडताळून पहा.

d(R,J) = (….) - (…) =

ii) T(0, 3) व C(0, -2)) या Y अक्षावरील बिंदूंमधील अंतर आलेखावरून किती एकक आहे ते प्रथम ते मोजा व नंतर निर्देशकांवरून तेच उत्तर मिळते का ते पडताळून पहा.

d(T, C) = (…) - (…) =

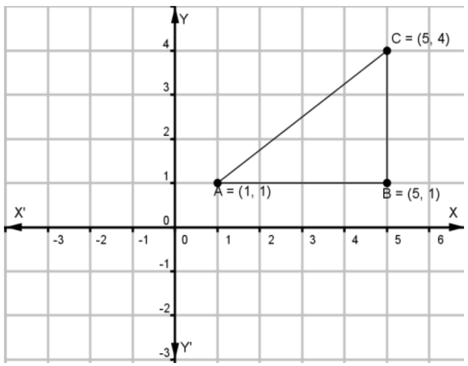
iii) A(-3, 4) व B(5, 4) हे बिंदू अनुक्रमे दुस-या व पहिल्या चरणात असून त्यांना जोडणारी रेषा काढली तर ती X अक्षाला समांतर आहे . आता त्यांच्यातील अंतर आलेखावरून प्रथम मोजा. त्यांच्या कोणत्या निर्देशकांमधील फरकही तेवढाच आहे ते शोधा.

d(A, B) = (…..)- (…) =

याचप्रकारे d(B , E) ठरवा.

अक्षांना समांतर रेषांवरील दोन बिंदूंमधील अंतर व निर्देशक :

नेहमी असे बिंदू मिळतील असे नाही यासाठी पुढील आलेख पहा.



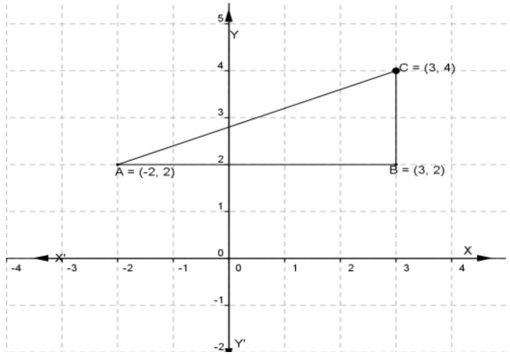
येथे A(1, 1) व B (5, 1) व C(5, 4) हे दिलेले बिंदू आहेत .

रेख AB ची लांबी किती एकक आहे ते आलेखावरून मोजा.

तसेच रेख BC मोजा. ΔABC कोणत्या प्रकारचा आहे? आता d(A,C) काढण्यासाठी पायथागोरसचे प्रमेय तुम्हाला माहित आहे त्यावरून d(A,C) = किती?

आणखी एक उदाहरण पाहू.

खालील आलेख पहा.



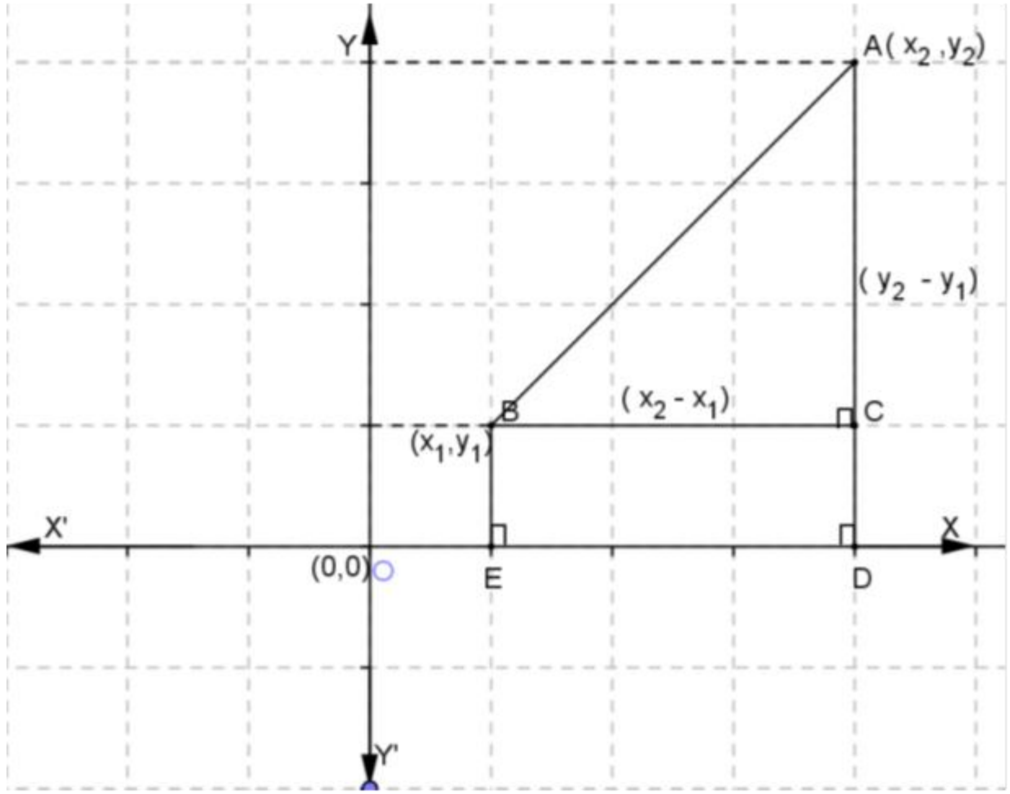
वरील आलेखावरून रेख AB,BC यांची लांबी मोजा . पण लक्षात असू दे की अंतर ऋण नसते.

आता वरीलप्रमाणे d(A,C) ठरवा.

आता आपण कोणत्याही दोन बिंदूंच्या निर्देशकांवरून त्यांमधील अंतर काढण्याचे सूत्र तयार करू शकतो.

कोणत्याही दोन बिंदूंमधील अंतराचे सूत्र :

खालील आलेख पहा.



यामध्ये A(x_2 , y_2) व B(x_1 , y_1) हे कोणतेही दोन भिन्न बिंदू असून

$x_2 > x_1$ व $y_2 > y_1$.

रेख AD ⊥ X अक्ष , रेख BE ⊥ X अक्ष , रेख BC ⊥ रेख AD काढू.

BC = ED = OD-OE= ($x_2 – x_1$) त्याचप्रमाणे AC = ($y_2 – y_1$)

$m\angle$BCA = 90^0 ∴ Δ BCA मध्ये, $m\angle$BCA = 90^0

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार, $(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$

∴ $(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

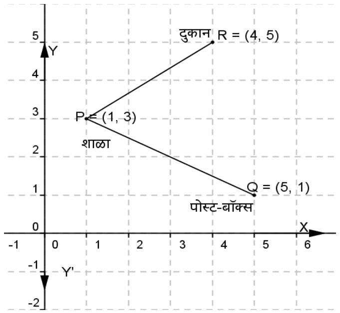
∴ AB = d(A,B) = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

d(A,B) = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

हे सूत्र वापरून मिनीला मदत करू शकाल ना?

T6_L3_A4

सुरूवातीचा आलेख परत पाहू.



तिच्या शाळेच्या P बिंदूचे निर्देशक (1, 3) व पोस्ट- बॉक्स च्या Q बिंदूचे निर्देशक (5,1) यांतील अंतर सूत्राने ठरवू.

$\therefore (x_1, y_1) = (1,3)$ व $(x_2, y_2) = (5,1)$

$\therefore x_1 = 1, \quad y_1 = 3$ व $x_2 = 5, y_2 = 1.$

$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$

$= \sqrt{(5-1)^2+(1-3)^2}$

$= \sqrt{(4)^2+(-2)^2}$

$= \sqrt{16+4}$

$= \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5}$ एकक

$= 200 \times 2\sqrt{5}$ मी. (आलेखामध्ये 100 मीटर = 1 एकक हे प्रमाण घेतले होते.)

$= 400\sqrt{5}$ मीटर

पोस्ट- बॉक्स चे शाळेपासूनचे अंतर $400\sqrt{5}$ मीटर

T6_L3_A4

आता तिच्या शाळेच्या P बिंदूचे निर्देशक (1,3) व दुकानाच्या R बिंदूचे निर्देशक (4,5) यांतील अंतर काढू.

$\therefore (x_1, y_1) = (1,3)$ व $(x_2, y_2) = (4,5)$

$\therefore x_1 = 1, \quad y_1 = 3$ व $x_2 = 4, y_2 = 5.$

$= \sqrt{(4-1)^2+(5-3)^2}$

$= \sqrt{(3)^2+(2)^2}$

$= \sqrt{9+4}$

$= \sqrt{13}$ एकक

$= 200 \times \sqrt{13}$ मी. (आलेखामध्ये 100 मीटर = 1 एकक हे प्रमाण घेतले होते.)

दुकानाचे शाळेपासूनचे अंतर $200 \times \sqrt{13}$ मी .

आता कोणते अंतर जास्त आहे याची तुलना $\sqrt{20}$, $\sqrt{13}$ वरून कळेल.

$20 > 13.$

$\therefore \sqrt{20} > \sqrt{13}$

म्हणजे पोस्ट-बॉक्सचे शाळेपासूनचे अंतर जास्त असल्याने आपण मिनीला सांगू की,

तिने दुकानात जावे.

आरंभबिंदूपासूनच्या अंतराचे सूत्र:

A(x_2 , y_2) व B(x_1 , y_1) या दोन भिन्न बिंदूंमधील अंतर काढण्याचे सूत्र आता कळले आहे .

जर दोनपैकी एक बिंदू जर आरंभबिंदूच असेल तर सूत्र बदलणार नाही पण आकडेमोड कमी होईल.

त्यामुळे त्यासाठी एक सूत्रच तयार करू.

समजा, B(x_1 , y_1) व O(0,0) यांधील अंतर काढावयाचे आहे.

$$d(O,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2}$$

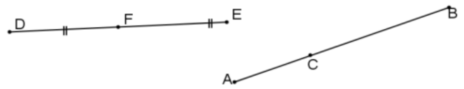
$$= \sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}$$

B(x_1 , y_1) व O(0,0) यांतील अंतर = $\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}$ हे सोपे सूत्र लक्षात ठेवा.

रेषाखंडाचे आंतरविभाजन: ओळख

रेषाखंडाचे आंतरविभाजन:-

पुढील आकृत्या पहा.



आकृतीत F हा रेख DE चा मध्यबिंदू आहे. F बिंदूमुळे रेख DE चे दोन समान लांबींचे म्हणजेच एकरुप भाग पडले आहेत म्हणून F बिंदू रेख DE चे 1:1 गुणोत्तरात विभाजन करतो असे म्हणतात.

रेख AB वरील C बिंदूसुध्दा रेख AB चे विभाजन करतो. (A-C-B) परंतु C हा रेख AB चा मध्यबिंदू नाही. बिंदू C मुळे रेख AC व रेख CB असे दोन भाग झाले आहेत म्हणून C बिंदू रेख AB चे $\frac{AC}{CB}$ या गुणोत्तरात **आंतरविभाजन** करतो असे म्हणतात.

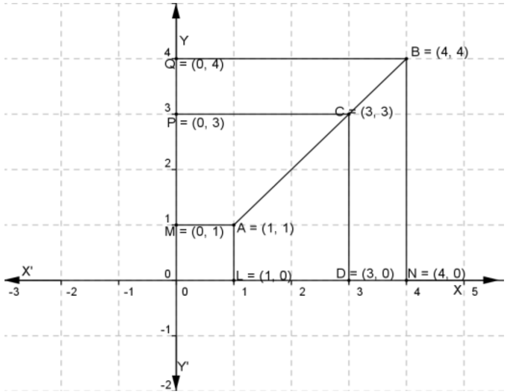
रेषाखंडाचे आंतरविभाजन करणाऱ्या बिंदूचे निर्देशक:

T6_L4_A1

खालील आकृती पहा. त्यावरून आधी शिकलेल्या कोणत्या प्रमेयाची आठवण झाली?

बरोबर 'तीन समांतर रेषांच्या आंतरछेदांचे प्रमेय'.

हेच वापरून रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात विभाजन करणा-या बिंदूचे निर्देशक कसे शोधता येतात हे पाहू



i) रेख AL || रेख CD || रेख BN व त्यांची छेदिका आहे X अक्ष.

तिच्यावरील आंतरछेद = LD व DN.

वरील प्रमेयानुसार कोणती गुणोत्तरे समान असतात?

$$\frac{LD}{DN} = \frac{AC}{CB} = \frac{2}{1}$$

ii) त्याचप्रमाणे, रेख AM || रेख CP || रेख BQ

$$\frac{MP}{PQ} = \frac{AC}{CB} = \frac{2}{1}$$

म्हणजेच C बिंदू रेख AB चे विभाजन कोणत्या गुणोत्तरात करतो?

C बिंदू रेख AB चे आंतरविभाजन 2:1 या गुणोत्तरात करतो.

रेषाखंडाचे आंतरविभाजन करणा-या कोणत्याही बिंदूचे निर्देशक काढण्यासाठी तुम्हाला सूत्र आता तयार करणे सोपे वाटेल.

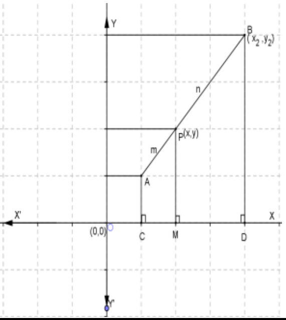
रेषाखंडाचे दिलेल्या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करणा-या बिंदूचे निर्देशांक काढण्याचे सूत्र:.

आकृतीमध्ये A (x_1 , y_1) व B(x_2 , y_2) हे रेख AB हे रेख AB चे अंत्यबिंदू आहेत व P(x ,y) हा बिंदू रेख AB चे m:n या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करतो.

$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$ ......(I)

रेख AC ⊥ X अक्ष, रेख PM ⊥ X अक्ष, रेख BD ⊥ X अक्ष काढले.

∴ रेख AC ∥ रेख PM ∥ रेख BD



वरील उदाहरणात दाखविल्यानुसार, तीन समांतर रेषांच्या आंतरछेदांच्या प्रमेयानुसार,

$\frac{CM}{MD} = \frac{m}{n}$..........(I) वरून

CM = OM –OC = $(x - x_1)$ व MD = OD – OM= $(x_2 - x)$

T6_L4_A2

$$\frac{(x - x_1)}{(x_2 - x)} = \frac{m}{n}$$

तिरकस गुणाकाराने, $m(x_2 – x) = n(x – x_1)$

$\therefore m x_2 – mx = nx – n x_1$

$\therefore m x_2 + n x_1 = mx + nx$

$\therefore m x_2 + n x_1 = x(m + n)$

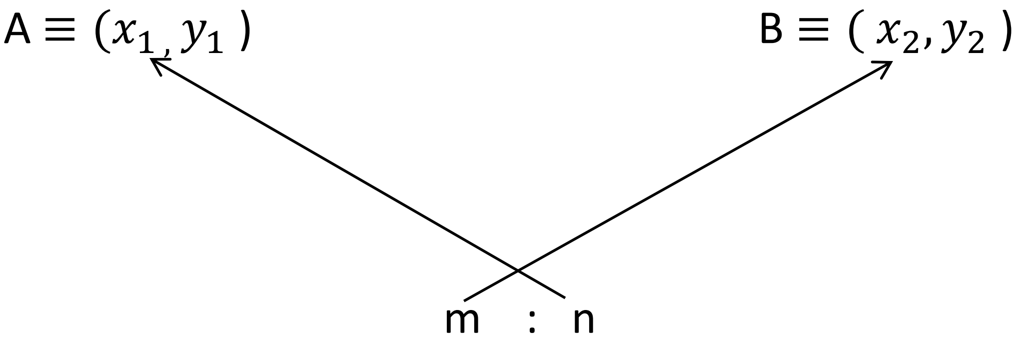
$\therefore \frac{mx_2+nx_1}{m+n} = x$

त्याचप्रमाणे $y = \frac{my_2+ny_1}{m+n}$ असे दाखविता येते.

A (x_1 , y_1) व B(x_2 , y_2) हे रेख AB हे रेख AB चे अंत्यबिंदू आहेत व P(x ,y) हा बिंदू रेख AB चे m:n या गुणोत्तरात आंतरविभाजन करीत असेल तर ,

P बिंदूचे निर्देशक $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n} , \frac{my_2+ny_1}{m+n} \right)$

हे सूत्र अचूकपणे वापरता येणे आवश्यक आहे, पुढीलप्रमाणे ते लक्षात ठेवणे सोपे असते.



$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_{2+}\,ny_1}{m+n}\right)$$

रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूच्या निर्देशकाचे सूत्र

समजा, P हा बिंदू रेख AB चा मध्यबिंदू आहे. मग AP = PB असल्यामुळे वरील सूत्रात

m:n = 1:1 असा बदल होईल. त्यावरून आपण रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढू शकतो.

$\therefore \left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n} , \frac{my_2+ny_1}{m+n} \right)$ या सूत्रात m:n = 1 : 1 घालून

P चे निर्देशक मिळतील $\left(\frac{x_2+x_1}{1+1} , \frac{y_2+y_1}{1+1} \right) = \left(\frac{x_2+x_1}{2} , \frac{y_2+y_1}{2} \right)$

याला रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे सूत्र म्हणतात.

(टीप : हे सूत्र दोन संख्यांची सरासरी काढण्यासारखेच आहे.)

रेषाखंडाचे बाह्यविभाजन

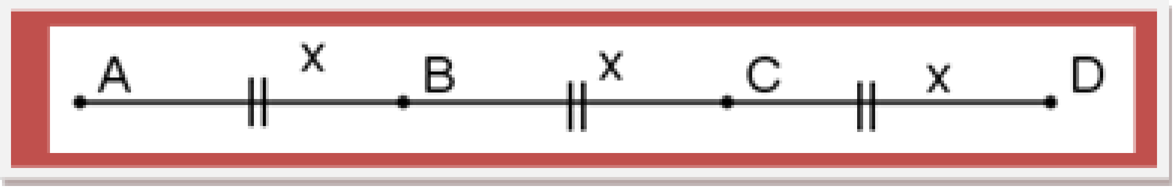
वरील आकृतीत R हा बिंदू रेख PQ वर नाही परंतु तो रेषा PQ वर आहे. (P- Q - R)

त्यामुळे R हा बिंदू रेख PQ चे बाह्यविभाजन करतो असे म्हणतात .

त्या विभाजनाचे गुणोत्तर = $\frac{PR}{RQ}$ = $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ असेल तर R बिंदूचे निर्देशक पुढील सूत्राने मिळतात.

R बिंदूचे निर्देशक ($\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}$, $\frac{my_2 - ny_1}{m - n}$) या सूत्राने मिळतात.

रेषाखंडाचे त्रिभाजन



वरील आकृतीत रेख AD वर B व C हे दोन बिंदू असे आहेत की, त्यांच्यामुळे तयार झालेल्या रेख AB ,रेख BC व रेख CD यांची लांबी समान आहे. म्हणून B व C हे दोन बिंदू रेख AD चे त्रिभाजन करतात असे म्हणतात.

समजा त्या तीन रेषाखंडांची लांबी = x आहे.

AB =BC= CD = x.

∴ BD = 2x म्हणजे B बिंदू रेख AD चे आंतरविभाजन $\frac{AB}{BD} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$ = 1:2

या गुणोत्तरात करतो.

∴ AC = 2x म्हणजे C बिंदू रेख AD चे आंतरविभाजन $\frac{AC}{CD} = \frac{2x}{x} = \frac{2}{1}$ = 2:1

या गुणोत्तरात करतो.

येथे हे ही लक्षात येईल की, B हा रेख AC चा मध्यबिंदू आहे व C हा रेख BD चा मध्यबिंदू आहे.

Exercise:

गट I) 1 गुणांचे प्रश्न:

1) P(5, 12) या बिंदूचे आरंभबिंदूपासूनचे अंतर सूत्राने काढा.

2) रेख MN चा T मध्यबिंदू आहे. जर M≡ (-8 , 2) व N≡ (8 , 0) असेल तर T बिंदूचे निर्देशक काढा.

3) जर A ≡ (-7 , 0) व B ≡ (8 , 0) असेल तर d(A , B) काढा.

गट II) : 2 गुणांचे प्रश्न:

1) P(0 , 9) हा A (-4 , 1) आणि B (4 , 1) या बिंदूपासून समदूर आहे हे दाखवा.

2) जर S≡ (-10 , -9) व T ≡ (16 , -3) असेल तर रेख ST च्या N या मध्यबिंदूचे निर्देशक काढा.

3) ΔPQR च्या परिकेंद्र C चे निर्देशक (2, 3) आहेत. जर P ≡ (4, 8) असेल तर परिवर्तुळाची त्रिज्या किती?

गट III) : 3 गुणांचे प्रश्न:

1) अंतराचे सूत्र वापरून B ≡ (1 , 3) , A ≡ (-3 , -5) व C ≡ (-1 , -1) हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे दाखवा व त्यांमधील दरम्यानता ठरवा.

2) Q ≡ (-5 , 4) , P ≡ (1 , 4) व R ≡ (1 , -3) हे ΔPQR चे शिरोबिंदू आहेत तर ΔPQR काटकोन त्रिकोण दाखवा.

3) S ≡ (-5 , 8) R ≡ (-4 , 4). P ≡ (1 , 0) हा रेख SR चे k:1 या गुणोत्तरात विभाजन करतो तर k:1 ≡ ?

P हा रेख SR चे आंतरविभाजन करतो की बाह्यविभाजन करतो ते लिहा.

गट IV) : 4 गुणांचे प्रश्न:

1) B(-7, 2), C(-7, -6), D(1, -6), A(1, 2) हे चौरसाचे शिरोबिंदू आहेत हे दाखवा.

2) बिंदू A(0, 5), B(5 , 0), C(0, -5), D(-5 , 0) हे आरंभबिंदू 0(0,0) पासून समदूर आहेत हे सिद्ध करा. यावरून A, B, C, D मधून जाणाऱ्या वर्तुळाचा केंद्र 0(0 , 0) आहे. या वर्तुळावर E(-3, 4) व F (-4 , -3) आहेत का हे पडताळून पहा.

Assessment:

पुढील प्रत्येक उपप्रश्नासाठी चार पर्याय देले आहेत. त्यांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

1) p ≡ (x_1, y_1) व Q ≡ (x_2, y_2) हे रेख PQ चे अंत्यबिंदू आहेत तर d ≡ (P, Q)≡ ....

i) $\sqrt{(x_1+y_1)^2+(y_1+y_2)^2}$

ii) $\sqrt{(x_2-x_1+y_2-y_1)^2}$

iii) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

iv) $\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+{y_1}^2+{y_2}^2}$

2) जर A≡ (-3 , - 4) व B ≡ (3 , 4), d(A , B)≡.........

i) 0

ii) 5

iii) 10

iv) $\sqrt{14}$

3) जर K≡ (3.5 , 6.8) व M ≡ (1.5 , 2.8) तर $[d(K, M)]^2$ ≡ ....

i) $\sqrt{20}$

ii) 6

iii) 20

iv) 64

4) A ≡ (-1 , 7) आणि B ≡ (5 ,-5) असेल तर या बिंदूंना जोडणाऱ्या रेख AB ला 1:2 या गुणोत्तरात विभागणाऱ्या P बिंदूचे निर्देशक ≡ ....

i) ($\frac{7}{3}$, $\frac{-19}{3}$)

ii) (1, 3)

iii) (3 ,-1)

iv) (2 , 1)

5) जर C ≡ (-7 , 3) आणि D ≡ (-5 , 2) असेल तर रेख CD चे 4:3 या गुणोत्तरात बाह्यविभाजन करणाऱ्या E बिंदूंचे निर्देशक ≡ ....

i) (1 , -1)

ii) (-41, 17)

iii) ($-\frac{12}{7}$, $\frac{5}{7}$)

iv) (-6 , $\frac{5}{2}$)

6) जर C हा रेख DE चा मध्यबिंदू असेल व D ≡ (-7 , 1) व E ≡ (11 , -5) असेल तर C बिंदूचे निर्देशक :

i) (4 , -4)

ii) (-9 , 3)

iii) ($-\frac{9}{2}$, $\frac{3}{2}$)

iv) (2 , -2)