प्रकरण 7

भौमितिक रचना

संकल्पना चित्र

पूर्वज्ञान: मोजपट्टी, कोनमापक व कंपास या साहित्यांचा योग्य उपयोग करता येणे.

i) रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकाची रचना करून मध्यबिंदू मिळविणे.
ii) कोणत्याही मापाच्या कोनाच्या कोनदुभाजकाची रचना
iii) रेषेला तिच्यावरील व तिच्या बाहेरील बिंदूतून लंब रेषेची रचना
iv) दिलेल्या कोनाशी एकरूप कोनाची रचना
v) रेषेबाहेरील बिंदूतून रेषेला समांतर असलेल्या रेषेची रचना

↓

i) त्रिकोणाचा पाया, पायालगतचा एक कोन व इतर दोन बाजूंच्या लांबीची बेरीज दिली असता त्रिकोणाची रचना करण्याच्या रीतीचे विश्लेषण करता येणे व ते रचनेच्या पाय-या योजून त्यानुसार रचना करणे.

↓

ii) त्रिकोणाचा पाया, पायालगतचा एक कोन व इतर दोन बाजूंमधील फरक दिल्यास त्रिकोणाची रचना करण्याच्या रीतीचे विश्लेषण करता येणे.

नमुना 1 :
दिलेल्या कोनासमोरील बाजू उरलेल्या बाजूपेक्षा मोठी असल्यास रचना करणे.

नमुना 2 :
दिलेल्या कोनासमोरील बाजू उरलेल्या बाजूपेक्षा लहान असल्यास रचना करणे.

त्रिकोणाची फक्त परिमिती दिल्यास व दोन कोनांची मापे दिल्यास रचनेच्या पाय-या योजून त्यानुसार रचना करता येणे.

T7_L1

भौमितिक रचना

रेषाखंडाचा लंबदुभाजक :

लंबदुभाजक या शब्दात दोन संकल्पना एकत्र येतात.

i) **लंब रेषा** आणि ii) **दुभाजक रेषा**

1) लंब रेषा म्हणजे थोडक्यात काटकोनात छेदणारी रेषा

2) दुभाजक रेषा म्हणजे दोन एकरूप भागात विभाजन करणारी रेषा किंवा मध्यबिंदूत छेदणारी रेषा .

विचार करा :-

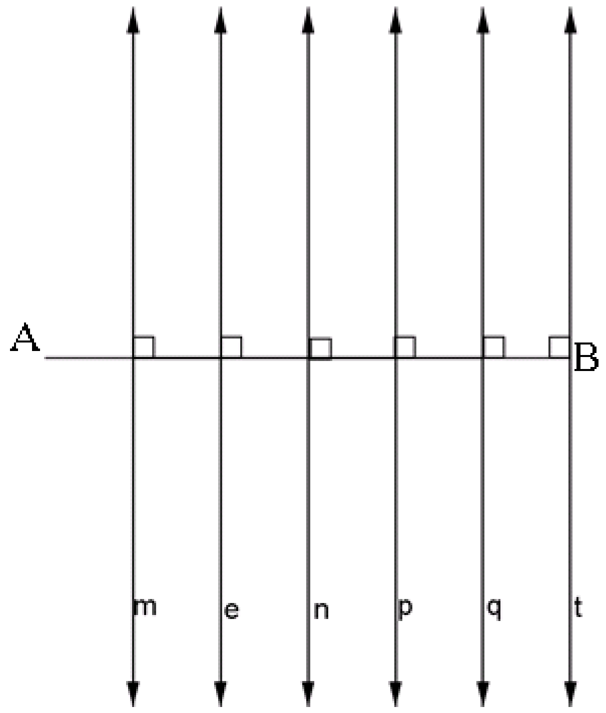
a) आपण एखाद्या रेषेचा किंवा एखाद्या किरणाचा लंबदुभाजक काढू शकतो का?

नाही, का बरे?

कारण रेषा आणि किरण यांची लांबी अमर्याद असते, त्यामुळे त्यांना मध्यबिंदूच नसतो, त्यामुळे त्यांना दुभागता येणारच नाही.

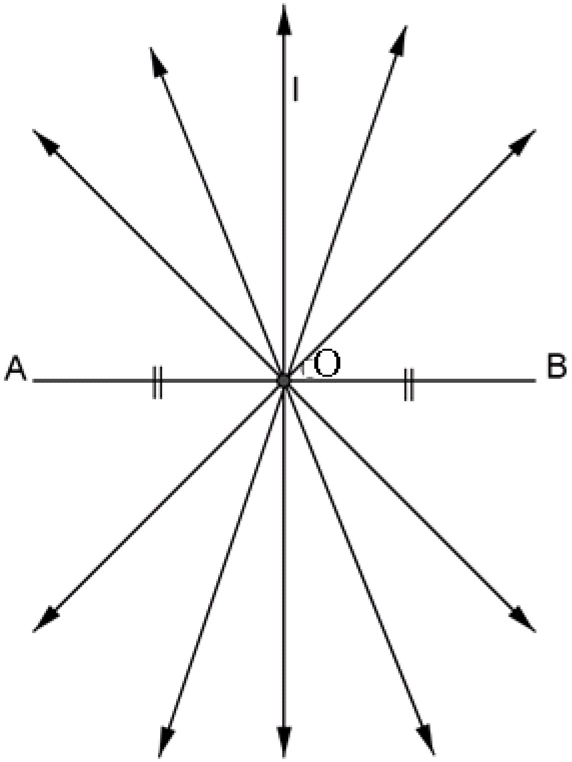
b) एका रेषाखंडाला किती लंब रेषा काढता येतील?

रेषाखंड हा अनंत बिंदूंचा संच असतो त्या प्रत्येक बिंदूत आपण त्याला (रेषाखंडाला) एक लंब रेषा काढू शकतो, म्हणजे एका रेषाखंडाला अनेक लंब रेषा काढता येतात. त्यांपैकी काही रेषा पाहू.



या आकृतीत रेख AB चा C हा मध्यबिंदू आहे.

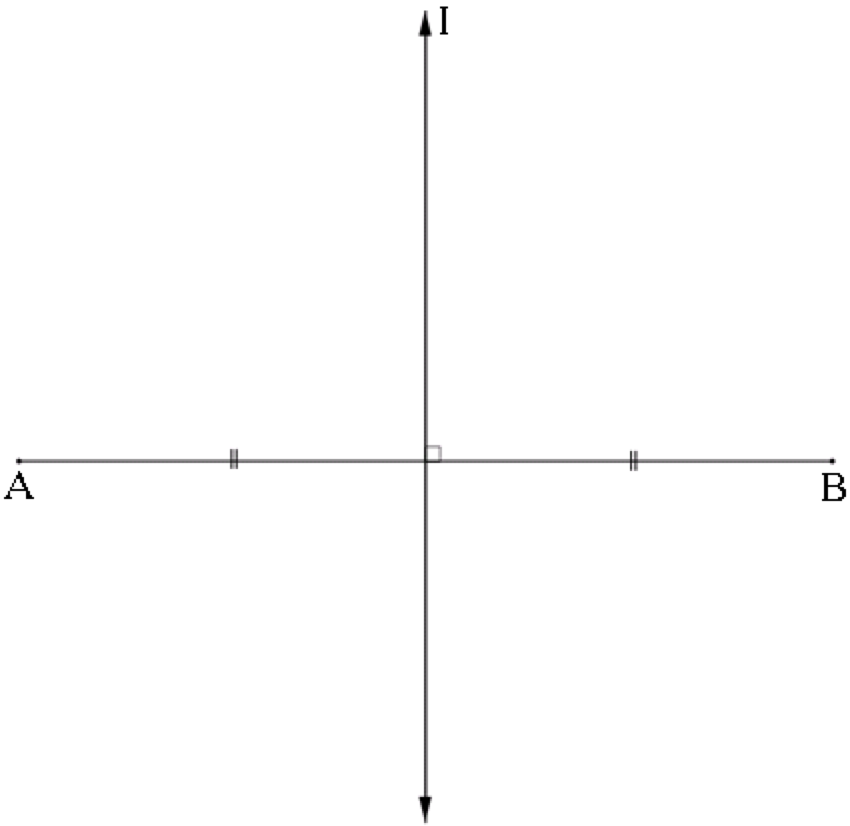
C बिंदूतून जाणाऱ्या सर्वच रेषा या रेख AB च्या दुभाजक रेषा आहेत.



T7_L1_A1

3) या आकृत्यांवरून आपल्याला कळले की, रेषाखंडाला केवळ लंब असणाऱ्या अनेक रेषा असतात आणि रेषाखंडाला दुभाजक रेषासुद्धा अनेक असतात. आता विचार करा की, एका रेषाखंडाच्या लंबदुभाजक रेषा एका प्रतलात किती असतील?

उत्तर: एका प्रतलात एका रेषाखंडाला **एक** आणि **एकच** लंबदुभाजक रेषा असते.



रेख AB चा रेषा I लंबदुभाजक आहे.

प्रत्येक वेळी आपण अशा अनेक लंब, अनेक दुभाजक रेषा काढून मग दोन्ही अटी पूर्ण करणारी लंबदुभाजक रेषा काढणार की काय?

नाही.

T7_L1_A1

म्हणूनच आपण यंदा प्रमेये शिकत आहोत.

लंबदुभाजकाचे प्रमेय समजले की आपल्याला रीतही सापडेल.

आपल्याला माहित आहे की,

i) दिलेल्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर असतो.

आणि

ii) प्रतलातील जो जो बिंदू दिलेल्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासूनच समदूर असतो

तो बिंदू त्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावर असतो.

याशिवाय आपल्याला माहित आहेच की,

दोन भिन्न बिंदूंनी **एक** आणि **एकच रेषा** निश्चित होते.

समजा , आपल्याला 6.3 सेमी लांबीचा रेषाखंड AB काढून त्याचा मध्यबिंदू पाहिजे.

6.3 सेमी च्या निम्मे अंतर $\frac{6.3}{2}$ = 3.15 सेमी हे अंतर आपण पट्टीवर मोजू शकत नाही कारण

पट्टीवर से.मी, मि.मी च्या खुणा असतात परंतू प्रत्येक मि.मी चे भाग पाडलेले नसतात.

त्यामुळे पट्टीने 3.15 से.मी अंतर मोजता येणार नाही.

म्हणून आपल्याला रेषाखंड AB चा मध्यबिंदू हा लंबदुभाजकाच्या रचनेशिवाय मिळणार नाही.

T7_L1_A1_F1

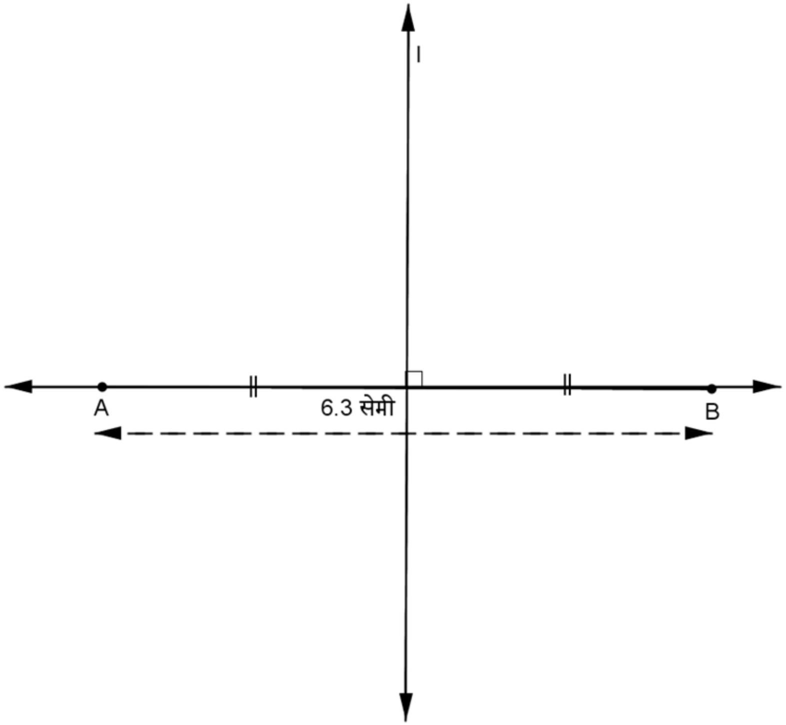
लंबदुभाजकाची रचना:

प्रथम एक रेषा काढून घ्या. रेषेच्या वर आणि खाली मोकळी जागा कंस काढण्यासाठी पाहिजे. नंतर कर्कटकच्या दोन लोखंडी टोकांमध्ये 6.3 से.मी अंतर मोजून घ्या. त्यावेळी कर्कटक पट्टीला लंब ठेवा म्हणजे अंतर कमी - जास्त न होता बरोबर 6.3 से.मी च येते.

कर्कटकाने रेषेवर दोन बिंदू मिळवा त्यांना A व B नावे द्या. हे बिंदू पेनने किंवा पेन्सिलीने ठळक करू नका, गिरवू नका.

आता कंपास मध्ये अंदाजे AB च्या निम्म्याहून जास्त त्रिज्या घ्या.

A केंद्र घेऊन त्या त्रिज्येने रेषा AB च्या विरुद्ध बाजूंना कंस काढा.



आता कंपास मध्ये अंदाजे AB च्या निम्म्याहून जास्त त्रिज्या घ्या.

A केंद्र घेऊन त्या त्रिज्येने रेषा AB च्या विरुद्ध बाजूंना कंस काढा.

त्रिज्या न बदलता B केंद्र घेऊन पहिल्या कंसांना छेदणारे दोन कंस काढा. हे दोन छेदनबिंदू जोडणारी रेषा काढा. ही रेषा l, रेख AB ची लंबदुभाजक रेषा आहे ती रेख AB ला ज्या बिंदूत छेदते;

तोच रेख AB चा मध्यबिंदू आहे.

दिलेल्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूपासून समदूर असलेला प्रतलातील कोणताही बिंदू पाहिजे असल्यास ही रचना केली जाते.

खालील वेबसाईट पहा.

http://www.mathopenref.com/constbisectline.html

त्रिकोण रचना:

त्रिकोणाचा पाया, उरलेल्या दोन बाजूंच्या लांबीची बेरीज व पायालगतचा एक कोन दिला असता त्रिकोण काढणे.

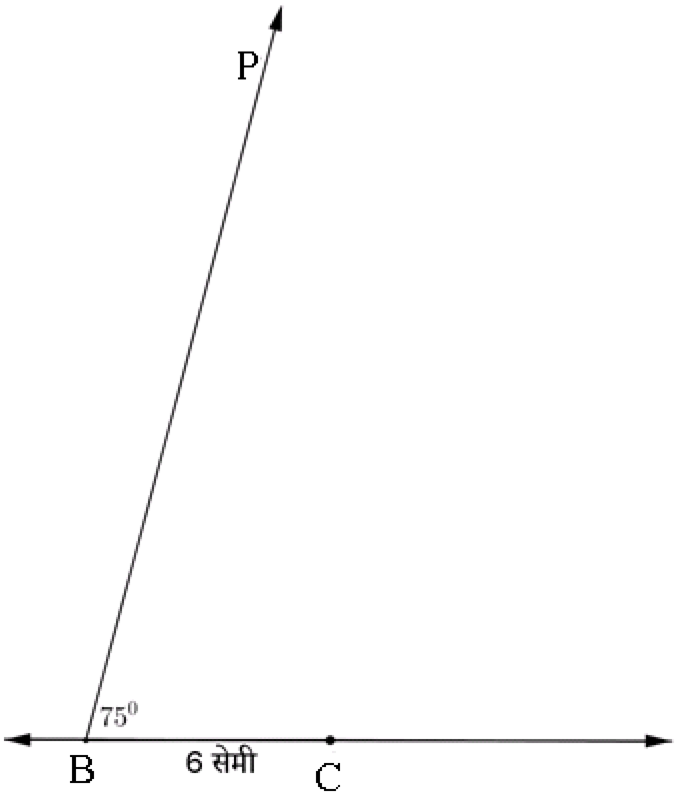
रचना क्रमांक 1 :

ΔABC ची रचना अशी करा की, BC = 6 सेमी, m∠CBA = 75^0 व AB + AC = 10.5 सेमी.

विश्लेषण :

1) पक्षातील किंमती पाहताना तुम्हाला तीनही किंमतीत शिरोबिंदू B हा सामाईक आहे हे कळले असेलच.

2) BC बाजूची लांबी दिली आहे आणि तिच्या लगतचा कोन 75^0मापाचा दिला आहे. त्याअर्थी आपल्याला रेख BC हा 6 सेमी लांबीचा काढून B बिंदूशी 75^0मापाचा कोन करणारा किरण काढावा लागेल. आता आपण कच्ची आकृती काढताना आपल्याला रीत सुचत जाते. त्यानुसार रचनेचा क्रम कळतो म्हणून अशी आकृती काढणे आवश्यक असते. त्यात बाजू, कोन मोजून घेण्याची गरज नसते. पण दिलेला कोन 75^0 मापाचा म्हणजे लघुकोन आहे. याचे भान ठेवले पाहिजे.



ही आकृती पाहिली तर आता हे कळेल की, शिरोबिंदू A हा

या किरण BP वर असणार. पण A बिंदूचे B किंवा C

पासूनचे अंतर म्हणजे BA किंवा CA च्या किंमती माहित

नाहीत यापुढे काय करावे?

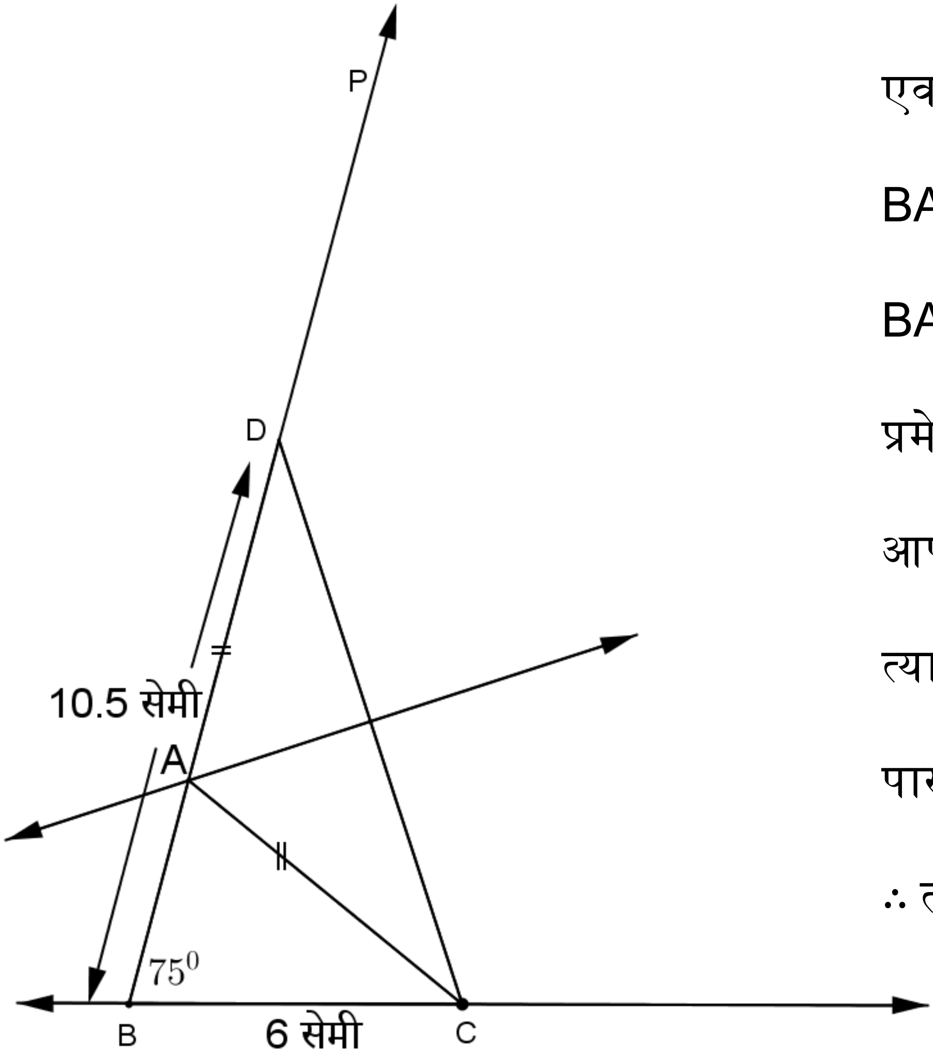
यासाठी तुम्ही त्रिकोणांची एकरूपता या प्रकरणात

त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या लांबीची बेरीज ही तिसऱ्या

बाजूपेक्षा मोठी असते हे प्रमेय सिद्ध करताना (BA + AC)

हे अंतर कसे मिळविले होते ती रचना आठवा.

कच्ची आकृती:



B, A आणि C नैकरेषीय बिंदू असल्याने (BA + AC) एवढ्या लांबीचा रेषाखंड मिळविण्यासाठी आपण किरण BA वर D बिंदू असा घेतो की, AD = AC त्यामुळे BA + AC = BA + AD = BD (B – A – D) ही त्या प्रमेयासाठी केलेली रचना लक्षात आली असेल तर आता आपण किरण BD = BA + BA = 10.5 सेमी घेणार. त्या किरणावरच तिसरा शिरोबिंदू A असून तो C व D पासून समदूर आहे.

∴ तो रेख CD च्या लंबदुभाजकाची रचना करावी लागेल.

तो किरण BD ला ज्या बिंदूत छेदेल तोच बिंदू A असणार.

खालील वेबसाईट पहा.

https://www.youtube.com/watch?v=dsxWLiE95DI

रचना क्रमांक : 2

त्रिकोणाचा पाया, पायालगतचा एक कोन आणि इतर बाजूंची वजाबाकी दिली असता त्रिकोणाची रचना करणे.

ह्यामध्ये दोन नमुने असतात.

i) दिलेल्या कोनासमोरील त्रिकोणाची बाजू ही दुसऱ्या बाजूपेक्षा लहान असते.

किंवा

ii) दिलेल्या कोनासमोरील त्रिकोणाची बाजू दुसऱ्या बाजूपेक्षा मोठी असते.

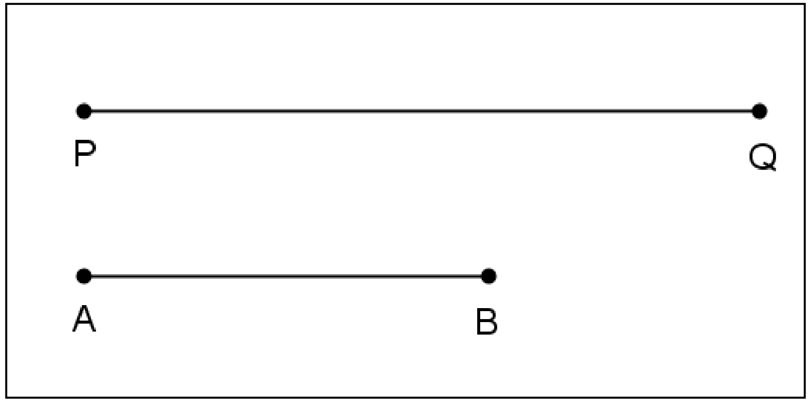
ह्यांपैकी आधी आपण पहिल्या नमुन्याची रचना पाहू.

प्रश्न:

ΔABC ची रचना अशी करा की, BC = 6.5 सेमी, $\angle ABC = 45^0$ व AB – AC = 2.5 सेमी

(AB > AC)

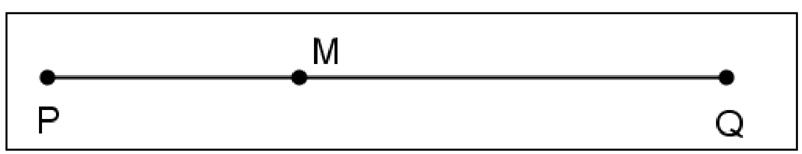
खालील आकृतीचा विचार करा.



येथे PQ ही AB पेक्षा मोठी आहे. आता जर आपल्याला (PQ – AB) या वजाबाकीएवढ्या

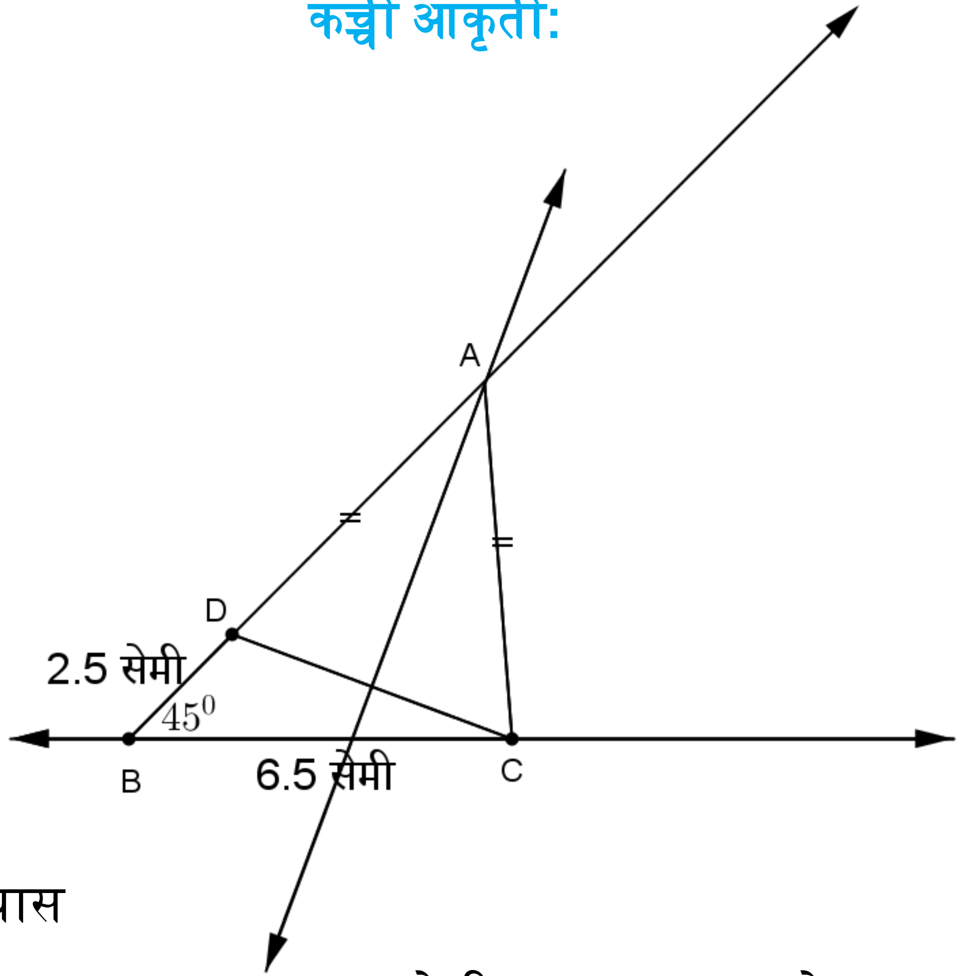
रेषाखंड दाखवायचा असेल तर रेख PQ वर आपण M बिंदू असा घेऊ शकतो की, MQ = AB

$PM = PQ - MQ$, $\therefore PM = PQ - AB$



अशीच पद्धत त्रिकोणाच्या या रचनेमध्ये आपण वापरणार आहोत.

कच्ची आकृती:



AD = AC असल्यास

AB – AC = BA – AD = BD = 2.5 सेमी (B- D- A) तसेच

AD = AC म्हणजे A बिंदू D व C पासून समदूर असला पाहिजे.

त्याचाच अर्थ A बिंदू रेख CD च्या लंबदुभाजकावर आहे.

खालील वेबसाईट पहा.

http://www.youtube.com/watch?v=ZyiLQAnBLwQ

(नमुना 2) रचना क्रमांक : 3

त्रिकोणाचा पाया, पायालगतचा एक कोन आणि इतर दोन बाजूंची वजाबाकी दिली असता त्रिकोणाची रचना करणे.

(दिलेली कोनासमोरील त्रिकोणाची बाजू दुसऱ्या बाजूपेक्षा मोठी असल्यास:-)

प्रश्न: ΔPQR ची रचना अशी करा की, QR = 6 सेमी $\angle PQR = 55^0$ व PR – PQ = 2.2 सेमी

येथे PR – PQ = 2.2 सेमी दिले आहे. याचा अर्थ PR ही बाजू PQ पेक्षा मोठी आहे आणि रेख PR ही दिलेल्या $\angle PQR$ च्या समोर आहे.

अशा रचनेमध्ये मागच्या रचनेपेक्षा थोडे वेगळेपण आहे.

बाजू PR ही बाजू PQ पेक्षा 2.2 सेमीने मोठी आहे. त्यामुळे तेवढेच अंतर किरण QP च्या

विरूद्ध किरणावर घ्यावे लगेल. त्यामुळे आपल्याला PR एवढ्या लांबीचा रेषाखंड मिळेल व

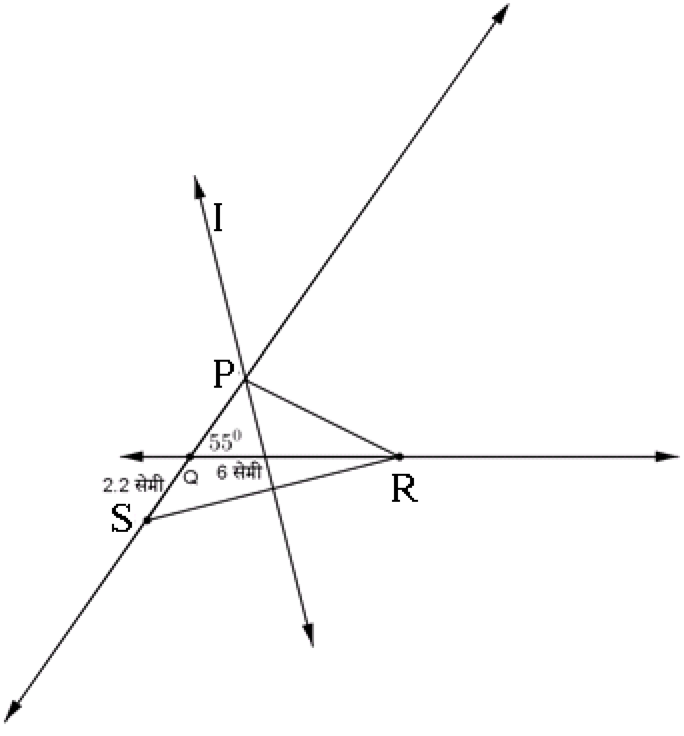
मग लंबदुभाजकाची रचना केल्यास त्रिकोणाचा तिसरा शिरोबिंदू P मिळेल.

PS = PR (रेषा l हा रेख SR चा लंबदुभाजक)

PQ + QS = PR

$\therefore$QS = PR – PQ

$\therefore$QS = 2.2 सेमी



खालील वेबसाईट पहा.
https://www.youtube.com/watch?v=vZabbK81t8A

रचना क्रमांक : 4

त्रिकोणाची परिमिती व दोन कोनांची मापे दिली असता त्रिकोणाची रचना करणे.

प्रश्न: ΔDEF ची रचना अशी करा की, $\angle E = 70^0$, $\angle F = 50^0$ व त्याची परिमिती = 11 सेमी.

विश्लेषण :-

या रचनेसाठी रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील बिंदू त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंपासून समदूर असतो हा गुणधर्म वरील रचनांप्रमाणेच वापरावा लागतो व त्याचबरोबर आणखी दोन प्रमेयांचा ही उपयोग करून घ्यावा लागतो.

ती दोन प्रमेये:-

1) **समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय:**

जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप असतील तर त्या बाजूंसमोरील त्या त्रिकोणाचे दोन कोन एकरूप असतात.

व

2) **दूरस्थ आंतरकोनांचे प्रमेय:**

त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे माप हे त्याच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या मापांच्या बेरजेइतके असते.

T7_L2_A4

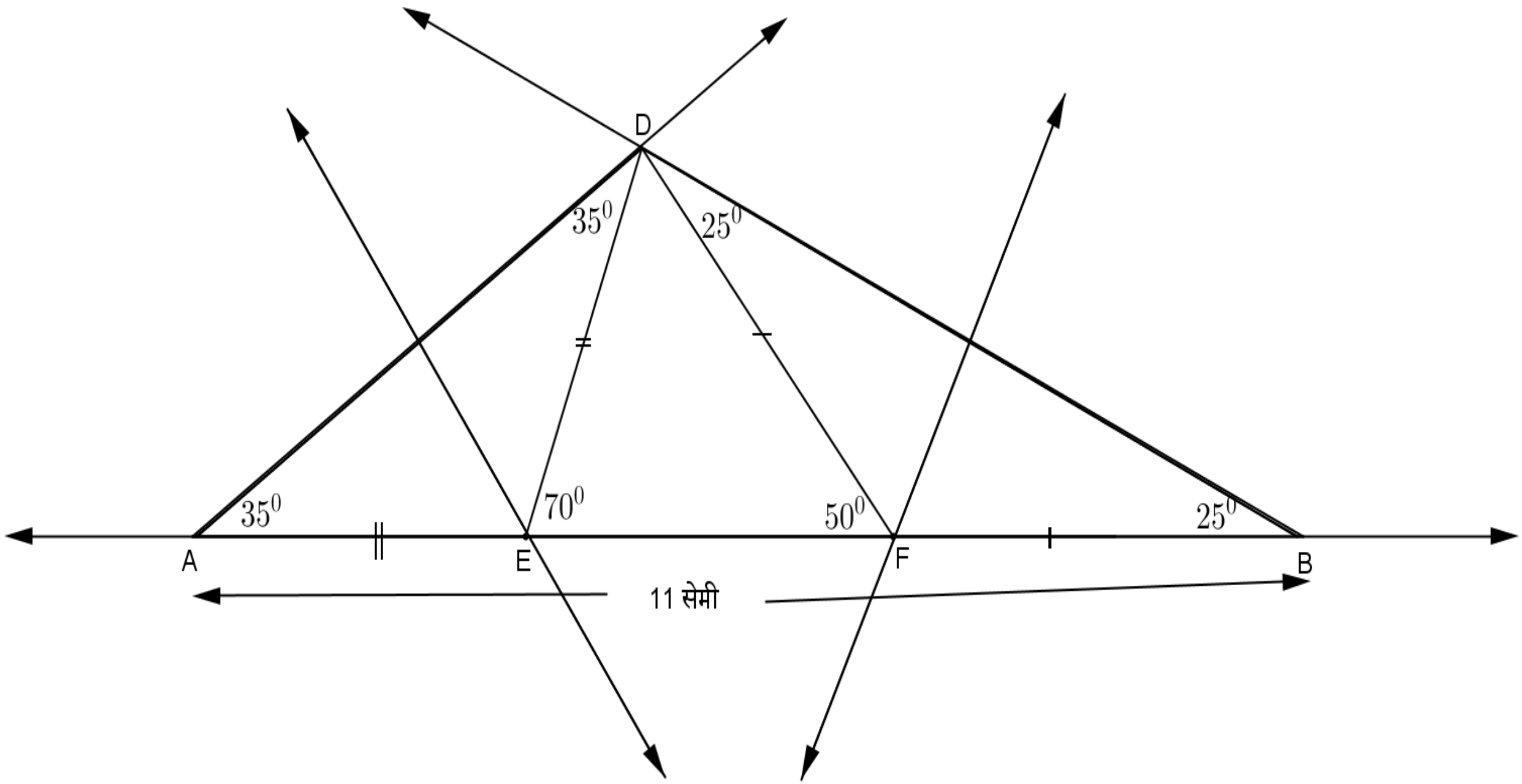
येथे त्रिकोणांच्या कोणत्याही एका बाजूची लांबी दिलेली नाही पण तीन बाजूंच्या लांबीची बेरीज म्हणजे परिमिती दिली आहे.

त्रिकोणाचे शिरोबिंदू नैकरेषीय असले तरी दोन बाजूंशी एकरूप दोन रेषाखंड व तिसरी बाजू असे एकरेषीय काढता आले तर त्या मोठ्या रेषाखंडाची लांबी त्रिकोणाच्या परिमितीएवढी होईल याचा उपयोग करू.

A, E, F व B एकरेषीय आहेत.

जर DE = AE व DF = FB असेल तर

AB = AE + EF + FB = DE + EF + FD = ΔDEF ची परिमिती = 11 सेमी



ΔAED मध्ये, $AE = DF$

$\therefore \Delta AED$ हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.

$\therefore \angle EAD \cong \angle EDA$ ....(समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

$\therefore \angle DEF$ हा ΔAED चा बाह्यकोन आहे.

$\therefore m\angle DEF = m\angle EAD + m\angle EDA$ ...(दूरस्थ आंतरकोनांचे प्रमेय)

$\therefore m\angle DEF = m\angle EAD + m\angle EAD$

$70^0 = 2 \times m\angle EAD$

$35^0 = m\angle EAD$ म्हणजेच $\angle BAD = 35^0$

त्याचप्रमाणे ΔDEFमध्ये $DF = BF$

$\therefore$तो समद्विभुज त्रिकोण आहे. $\therefore \angle FDB \cong \angle FBD$

तसेच ∠DEF हा ΔDFB चा बाह्यकोन आहे.

∴ ∠DFE = ∠FDB + ∠FBD

∴ ∠DFE = ∠FBD + ∠FBD

∴ 50^0 = 2 × m∠FBD

∴ 25^0 = m∠FBD

∴ m∠ABD = 25^0

आता AB = 11 सेमी व तिच्या लगतचे दोन कोन ∠BAD व ΔABD हे अनुक्रमे 35^0, 25^0 मापांचे आहेत. म्हणून आपण प्रथम ΔDAB ची रचना करू शकतो.

तसेच DE = AE असल्यामुळे E बिंदू D व A पासून समदूर आहे.

∴तो रेख AD च्या लंबदुभाजकावर आहे.

∴रेख AD व रेख BD चे लंबदुभाजक काढू म्हणजे ते रेख AB हा ज्या बिंदूत छेदतील ते अनुक्रमे E व F बिंदू असतील.

रेख DE व रेख DF जोडून ΔDEF हा साध्यातील ΔDEF मिळेल.

आता AB = 11 सेमी व तिच्या लगतचे दोन कोन ∠BAD व ΔABD हे अनुक्रमे 35^0, 25^0

मापांचे आहेत.

म्हणून आपण प्रथम ΔDAB ची रचना करू शकतो.

तसेच DE = AE असल्यामुळे E बिंदू D व A पासून समदूर आहे.

∴ तो रेख AD च्या लंबदुभाजकावर आहे.

∴ रेख AD व रेख BD चे लंबदुभाजक काढू म्हणजे ते रेख AB हा ज्या बिंदूत छेदतील ते अनुक्रमे

E व F बिंदू असतील.

रेख DE व रेख DF जोडून ΔDEF हा साध्यातील ΔDEF मिळेल.

खालील वेबसाईट पहा.

http://www.youtube.com/watch?v=j466hZ74dPA

Exercise

1) 10.4 सेमी लांबीचा रेषाखंड AB काढा. त्यावर C बिंदू असा घ्या की,

AC = 3.7 सेमी. रेख AB ला C बिंदूत लंब रेषा m ची रचना करा.

2) ∠LMN हा 105^0 मापाचा काढा.

त्याच्या किरण MS ह्या कोनदुभाजकाची रचना करा.

3) 7.9 सेमी लांबीचा रेख CD काढा. त्याचा P हा मध्यबिंदू रचनेने मिळवा.

(म्हणजेच रेख CD च्या लंबदुभाजकाची रचना करा.)

4) रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकाची रचना करताना आपण जे चार कंस काढले त्यांसाठी घेतलेली त्रिज्या त्या रेषाखंडाच्या लांबीच्या निम्म्याहून जास्त घेतो. जर ती निम्म्याहून कमी किंवा बरोबर निम्मीच घेतली तर काय होते हे करून पहा.

5) ΔRST ची रचना अशी करा की, RS = 5.4 सेमी, m∠RST $=45^0$ व RT + ST = 8.7 सेमी

6) ΔPQR ची रचना अशी करा की, QR = 5.6 सेमी, $\angle PQR = 45^0$ व

(PQ – PR) = 2.5 सेमी (लक्षात घ्या: PQ > PR म्हणजे $\angle PQR$ ची

संमुख बाजू PR ही त्याच्या लगतच्या बाजू PQ पेक्षा लहान आहे.)

7) ΔABC ची रचना अशी करा की, BC = 7 सेमी, $\angle ABC = 75^0$ व

(AC – AB) = 2 सेमी.

(लक्षात घ्या: AC > AB असून $\angle ABC$ ची संमुख बाजू ही त्याच्या लगतच्या

बाजू AB पेक्षा मोठी आहे.)

7) ΔABC ची रचना अशी करा की, BC = 7 सेमी, ∠ABC =75^0 व

(AC – AB) = 2 सेमी.

(लक्षात घ्या: AC > AB असून ∠ABC ची संमुख बाजू ही त्याच्या लगतच्या

बाजू AB पेक्षा मोठी आहे.)

8) ΔPQR ची रचना अशी करा की, त्याची परिमिती = 10.6 सेमी आणि

∠PQR = ∠PRQ = 60^0

9) ΔABC ची परिमिती 10.5 सेमी असून ∠ABC =80^0, ∠ACB =60^0

यावरून ΔABC ची रचना करा.