T9

प्रकरण 9 : महत्वमापन
संकल्पना चित्र

पूर्वज्ञान: एकप्रतलीय बंदिस्त आकृतींचे क्षेत्रफळ ही संकल्पना व त्यांपैकी काही आकृत्या उदाहरणार्थ, त्रिकोण, आयत, समभुज चौकोन, चौरस, समलंब चौकोन, अर्धवर्तुळ यांच्या क्षेत्रफळ व परिमितीची सूत्रे फक्त वापरणे.

↓

आयताकृती, त्रिकोणी वर्तुळाकृती बहुभुजाकृती क्षेत्राची संकल्पना

↓

क्षेत्रफळ मोजण्याचे एकक: चौरसाकृतीचे क्षेत्रफळ

↓

चौरसाकृतीच्या क्षेत्रफळावरुन आयताकृतीच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र तयार करणे.

↓

त्यावरून काटकोन त्रिकोण, लघुकोन त्रिकोण, विशालकोन त्रिकोण यांची क्षेत्रफळे काढणे व त्यातून त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र मिळविणे. हेरॉनचे सूत्र वापरणे.

↓

समांतर रेषांच्या एकाच जोडीतील व एकाच किंवा एकरूप पायांवरील त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळातील संबंध

↓

समांतर रेषांच्या एकाच जोडीतील व एकाच किंवा एकरूप पायांवरील त्रिकोण व समांतरभुज चौकोन यांच्या क्षेत्रफळातील संबंध

↓

समभुज त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र व उपयोजन

↓

समांतरभुज चौकोनाच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र मिळविण्यासाठी त्याच्या पाया संगत उंचीची संकल्पना व त्यातून क्षेत्रफळाचे सूत्र

↓

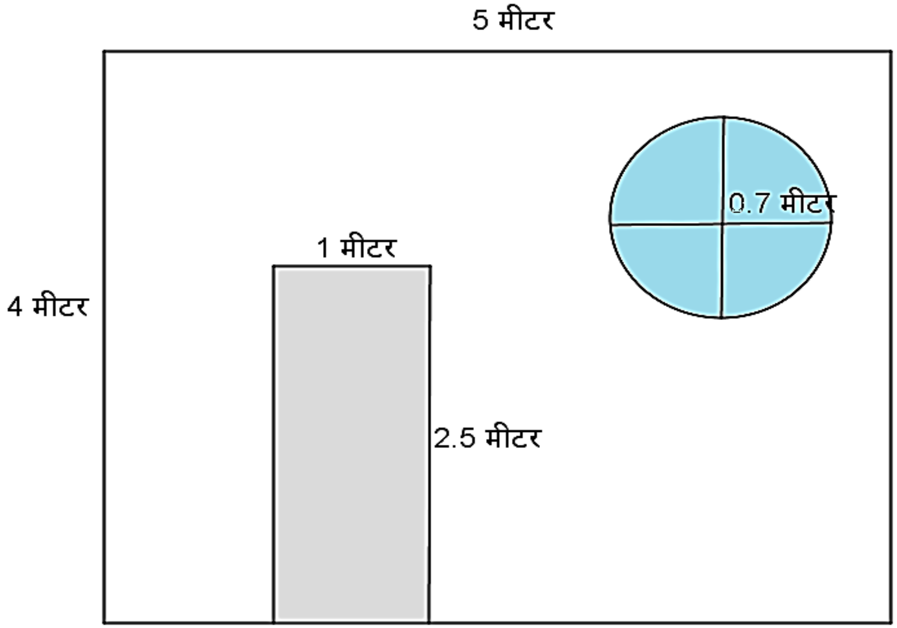
त्रिकोण, आयत, चौरस, समांतरभुज चौकोन याच्या क्षेत्रफळाच्या सूत्रातून समलंब चौकोन व समभुज चौकोन यांच्या क्षेत्रफळांची सूत्रे मिळविणे व त्यांचे उपयोजन

↓

वर्तुळाचा परिघ, अर्धवर्तुळाची लांबी व परिमिती यांची सूत्रे समजून घेऊन त्यांचे उपयोजन

T9_L1

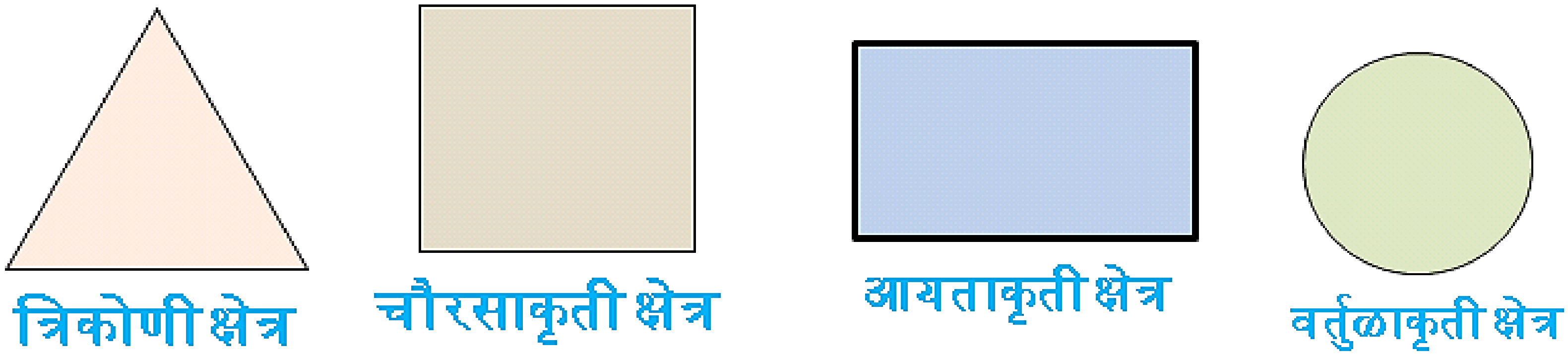
महत्त्वमापन : विषयप्रवेश



T9_L1_A1

क्षेत्रफळ

1) एकप्रतलीय बंदिस्त आकृती व तिचा अंर्तभाग यांच्या संयोग संचाला 'क्षेत्र' म्हणतात.
उदाहरणार्थ चौरसाकृती क्षेत्र, त्रिकोणाकृती क्षेत्र इ.



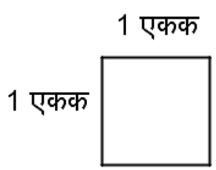
2) एकप्रतलीय आकृती व तिचा अंर्तभाग त्या प्रतालातील मर्यादित जागा व्यापतात.
त्याचे मापन म्हणजे त्या क्षेत्राचे क्षेत्रफळ असते.

3) गृहितक 1: कोणत्याही क्षेत्राचे क्षेत्रफळ ही धन वास्तव संख्या असते.

आयताचे क्षेत्रफळ

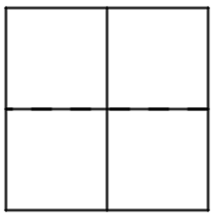
4) एक एकक बाजूच्या चौरसाकृती क्षेत्राचे क्षेत्रफळ = 1 चौरस एकक
हे क्षेत्रफळ मोजण्याचे एकक असते.

5) चौरसाच्या क्षेत्रफळावरून आयतांची क्षेत्रफळे :-



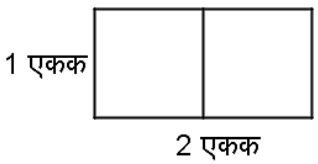
1 चौरस

∴ एका चौरसाचे क्षेत्रफळ
= (बाजू)^2
= (1)^2
= 1 चौ एकक



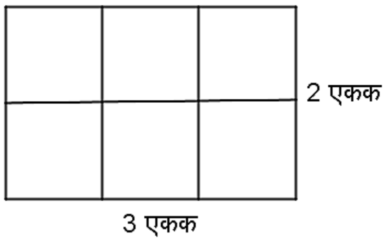
चार चौरसांचा चौरस

∴ चार चौरसांचे क्षेत्रफळ
= 4 चौ एकक
= 2^2
= (बाजू)^2



दोन चौरसांचा आयत

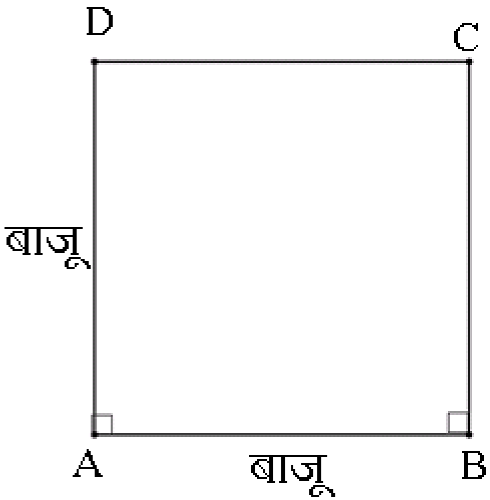
∴ एका आयताचे क्षेत्रफळ
= दोन चौरसांचे क्षेत्रफळ
= 2 × 1
= 2 चौ एकक



सहा चौरसांचा आयत

∴ आयताचे क्षेत्रफळ
= सहा चौरसांचे क्षेत्रफळ
= 6 × एका चौरसाचे क्षेत्रफळ
= 6 चौ एकक
= (2 × 3) चौ एकक

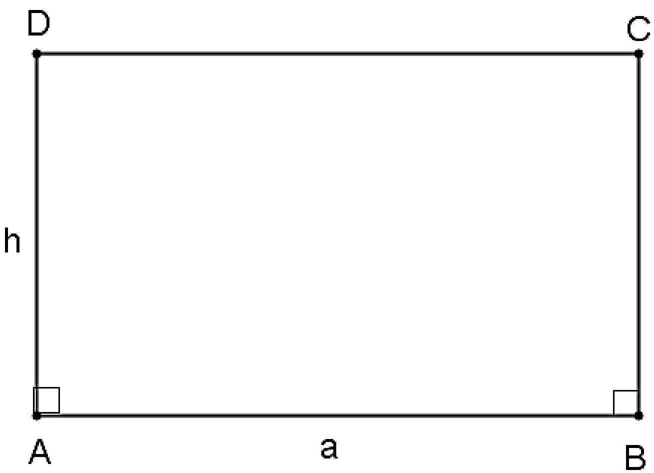
आयताचे क्षेत्रफळ



चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू × बाजू

= $(\text{बाजू})^2$

चौरसाची परिमिती = 4 × बाजू



आयताचे क्षेत्रफळ = पाया × उंची

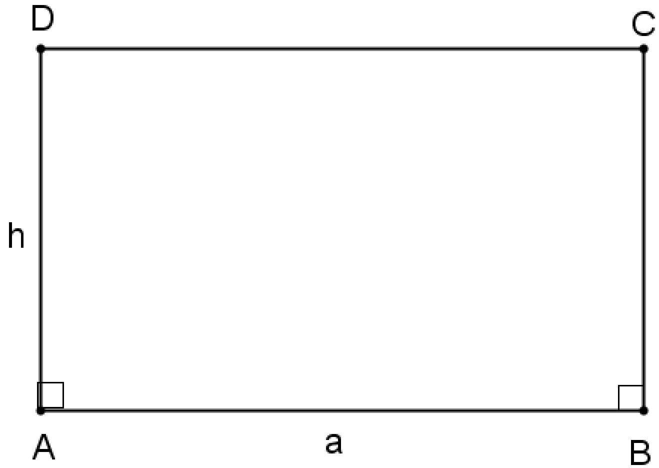
= लांबी × रूंदी

∴ आयताचे क्षेत्रफळ = a × h

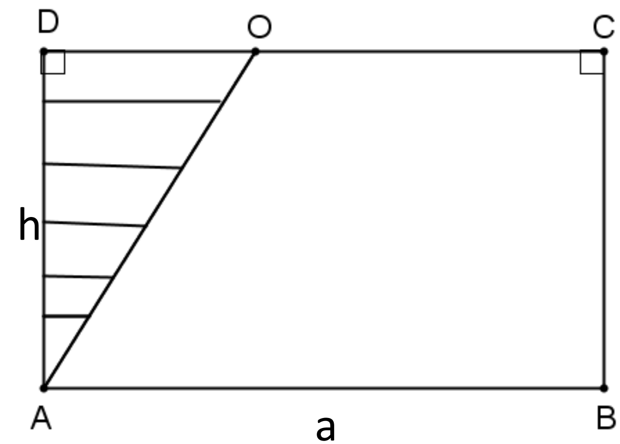
आयताची परिमिती = 2 (लांबी + रूंदी)

आयतावरून समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ

(आकृती क्रमांक 1)



(आकृती क्रमांक 2)

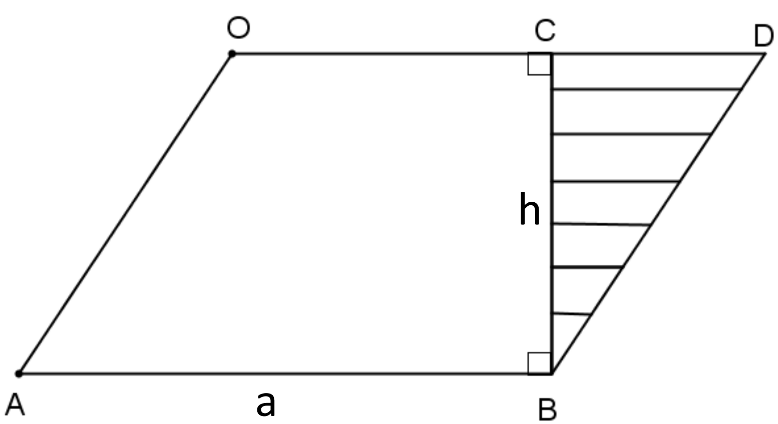


आयताचे क्षेत्रफळ= लांबी × रूंदी

∴ आयताचे क्षेत्रफळ = a × h

आकृती क्रमांक 2 मध्ये आयताच्या क्षेत्रफळातून ΔADO त्रिकोणी क्षेत्र कापले व ते खालील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे जोडले.

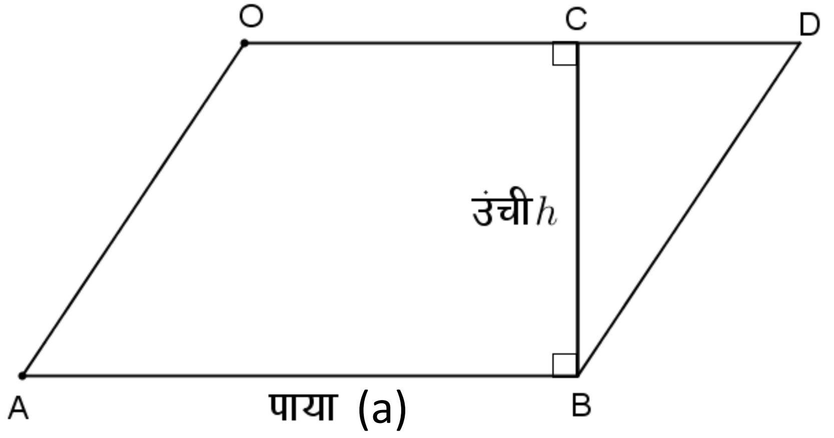
(आकृती क्रमांक 3)



आकृती क्रमांक 3 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे नवीन तयार झालेले क्षेत्र हे समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्र आहे.

ΔADO म्हणजेच ΔBCD आहे.

म्हणजेच दिलेल्या आयताचे क्षेत्रफळ = तयार झालेल्या समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ



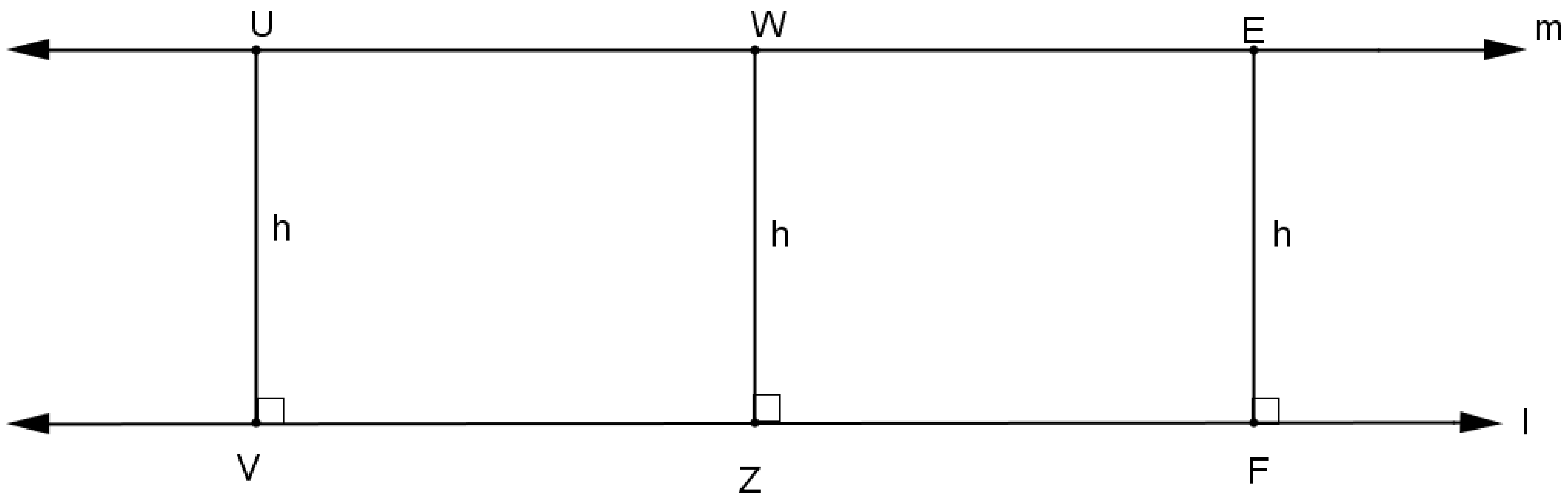
नवीन तयार झालेल्या क्षेत्राचे क्षेत्रफळ = समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ

= (a × h) = पाया × उंची

टीप:

समांतरभुज चौकोनाची कोणतीही बाजू पाया म्हणून घेता येते तिच्या समोरील बाजू वरील कोणत्याही बिंदूतून पायावर काढलेल्या लंबाची लांबी = त्या पाया संगत उंची असते.

समांतर रेषांमधील लंबांतर



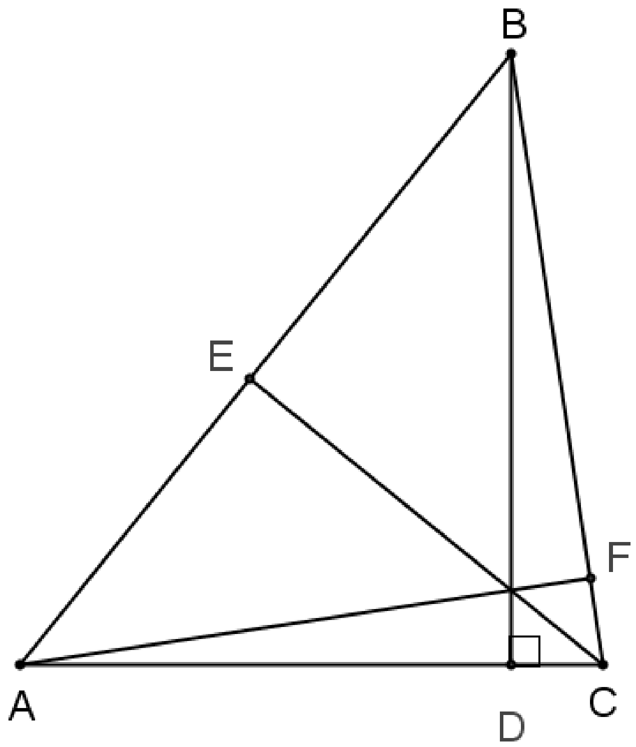
आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे समांतर रेषा l व रेषा m या दोन समांतर रेषा आहेत.

दोन समांतर रेषांमधील लंबांतर सर्वत्र समान असते.

(समांतर रेषा म्हणजे समान अंतरावरील रेषा)

$\therefore VU = WZ = EF = h$

लघुकोन त्रिकोणाच्या पाया व त्याची संगत उंचींच्या जोड्या :



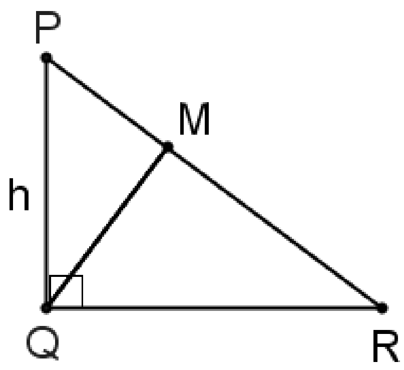
i) त्रिकोणाचा पाया = AC व रेख BD ⊥ रेख AC ∴ AC पाया संगत उंची = BD

ii) त्रिकोणाचा पाया = AB व रेख CE ⊥ रेख AB ∴ AB पाया संगत उंची = CE

iii) त्रिकोणाचा पाया = BC व रेख AF ⊥ रेख BC ∴ BC पाया संगत उंची = AF

याचप्रमाणे कोणत्याही त्रिकोणात पाया व संगत उंची यांच्या तीन जोड्या असतात.

काटकोन त्रिकोणाच्या पाया व त्याची संगत उंचीच्या जोड्या :-



ΔPQR मध्ये $\angle PQR$ काटकोन आहे.

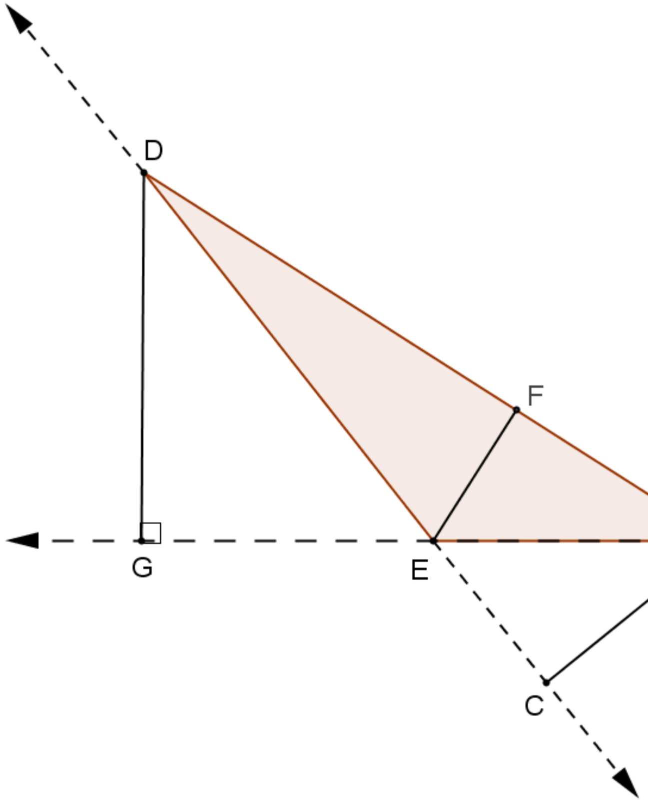
i) त्रिकोणाचा पाया = QR व रेख PQ ⊥ रेख QR ∴ QR पाया संगत उंची = PQ

ii) त्रिकोणाचा पाया = PQ व रेख QR ⊥ रेख PQ ∴PQ पाया संगत उंची = QR

iii) त्रिकोणाचा पाया = PR व रेख QM ⊥ रेख PR ∴ PR पाया संगत उंची = QM

विशाल कोन त्रिकोणाचा पाया व त्याची संगत उंचीच्या जोड्या :

T9_L3_A3



ΔDEB मध्ये ∠DEB हा विशालकोन आहे.

i) त्रिकोणाचा पाया= BE व रेख DG ⊥ रेषा BE ∴ BE पाया संगत उंची = GD

ii) त्रिकोणाचा पाया = DB व रेख EF ⊥ रेख DB ∴ DB पाया संगत उंची = EF

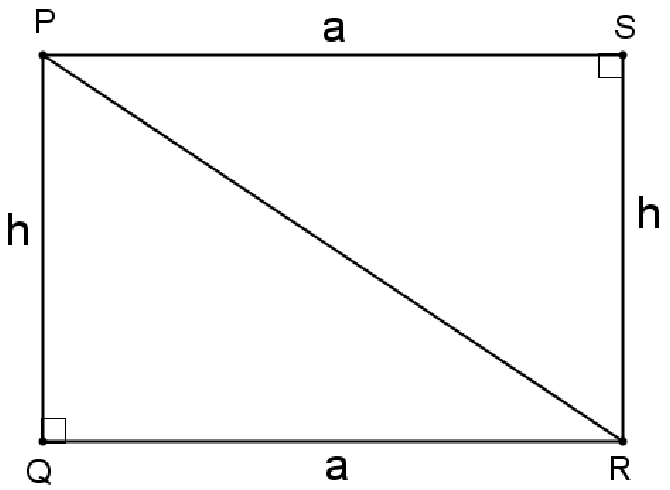
iii) त्रिकोणाचा पाया = DE व रेख BC ⊥ रेषा DE ∴ DE पाया संगत उंची = BC

विशालकोन त्रिकोणात विशालकोन समाविष्ट करणाऱ्या बाजूवर शिरोलंब काढल्यास तर तो त्या बाजूला समाविष्ट करणाऱ्या रेषेला त्रिकोणाच्या बाह्यभागात छेदतो.

हे वरील आकृतीमध्ये दिसत आहे.

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ :



□PQRS हा आयत आहे.

QR = a , PQ= h , ΔPQR हा काटकोन त्रिकोण आहे.

पुढील रिकाम्या जागा भरा.

1. □PQRS चे क्षेत्रफळ = ...× ....(आयताच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र)

   कर्ण PR जोडल्यास तयार होणारे ΔPQR व ΔRSP हे ....त्रिकोण असून ते एकरूप आहेत.

2. एकरूप त्रिकोणांची क्षेत्रफळे ....असतात. ∴ A(ΔPQR)= A(Δ.......)

3. A(□PQRS) = A(ΔPQR) + A(Δ.......)

4. A(□PQRS) = 2 × A(ΔPQR)   (........................)

   ∴ a × h   = 2 × A(ΔPQR)   (........................)

   ∴1/2 × a × h = A(ΔPQR)

उत्तरे

T9_L4_A1

1. □PQRS चे क्षेत्रफळ = a × h .....(आयताच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र)

   कर्ण PR जोडल्यास तयार होणारे ΔPQR व ΔRSP हे काटकोन त्रिकोण असून ते एकरूप आहेत.

2. एकरूप त्रिकोणांची क्षेत्रफळे समान असतात. ∴ A(ΔPQR)= A(Δ RSP)

3. A(□PQRS) = A(ΔPQR) + A(Δ RSP)

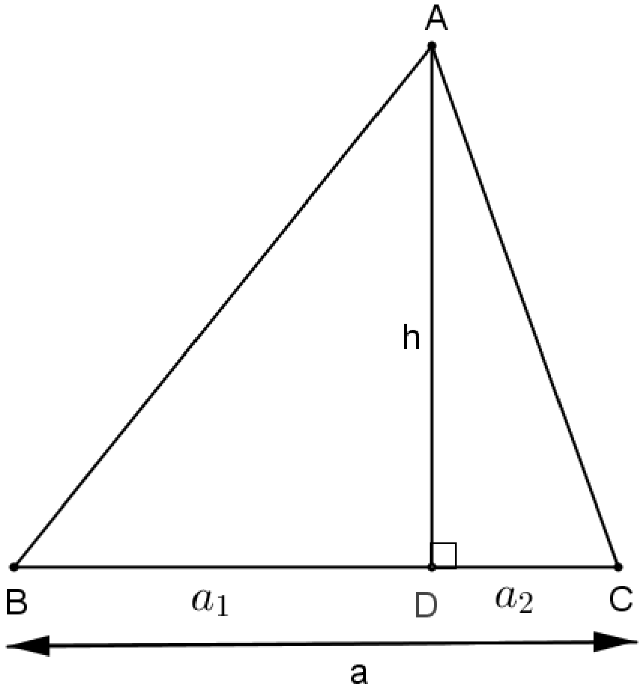
4. A(□PQRS) = 2 × A(ΔPQR) (विधान 3 वरून)

   ∴ a × h = 2 × A(ΔPQR) (विधान 1 वरून)

   ∴1/2 × a × h = A(ΔPQR)

निष्कर्ष: कोणत्याही काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या काटकोन करणाऱ्या बाजूंच्या गुणाकाराच्या निम्मे असते.

लघुकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ :



ΔABC हा लघुकोन त्रिकोण आहे.

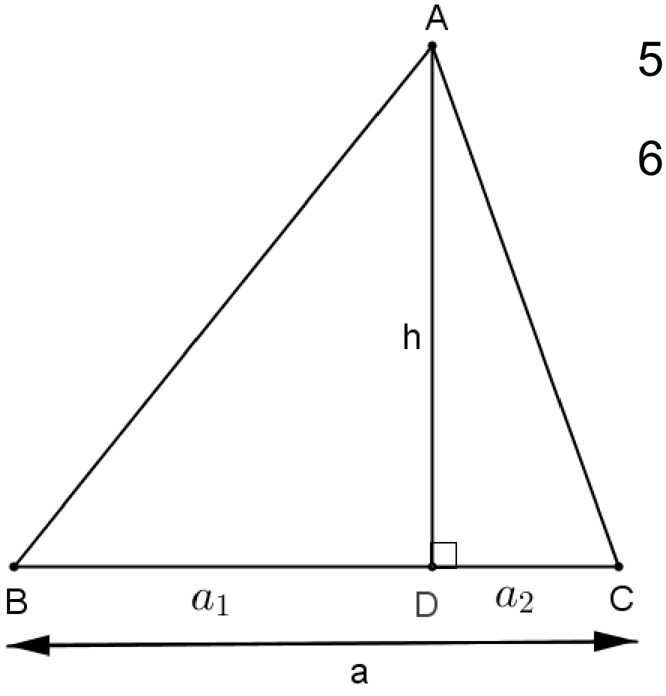
काटकोन त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे तयार केलेले सूत्र वापरून लघुकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी ΔABC च्या क्षेत्राचे दोन काटकोन त्रिकोणात विभाजन करू. रेख BD⊥ बाजू AC काढला.

1. AD=h , BD= a_1 , DC= a_2, BC = a

2. रेख AD ने ΔABC चे Δ...... व Δ...... या दोन काटकोन त्रिकोणात विभाजन झाले आहे.

3. काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ= $\frac{1}{2}$ × काटकोन करणाऱ्या बाजूंचा गुणाकार

4. ∴ A(ΔBDA) = $\frac{1}{2}$ × (..... × .....)



5. त्याचप्रमाणे A(ΔADC) = $\frac{1}{2}$ × (..... × .....)

6. ∴ A(ΔABC)

=A(ΔBDA) +A(ΔADC)

= ($\frac{1}{2}$ × a_1 × h) +($\frac{1}{2}$ × a_2 × h) … (विधान … व …वरून)

= $\frac{1}{2}$ × h × (.....+ ......)

= $\frac{1}{2}$ × h × (… …)…….(∵ $a_1 + a_2 = \cdots$)

= $\frac{1}{2}$ × … . .× h

= $\frac{1}{2}$ × BC × AD

= $\frac{1}{2}$ × पाया × संगत उंची

उत्तरे:

2. रेख AD ने ΔABC चे ΔBDA व ΔADC या दोन काटकोन त्रिकोणात विभाजन केले आहे.

3. काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ= $\frac{1}{2} \times$ काटकोन करणाऱ्या बाजूंचा गुणाकार

4. $\therefore A(\Delta BDA) = \frac{1}{2} \times (a_1 \times h)$

5. त्याचप्रमाणे $A(\Delta ADC) = \frac{1}{2} \times (a_2 \times h)$

6. $\therefore A(\Delta ABC)$

$= A(\Delta BDA) + A(\Delta ADC)$

$= (\frac{1}{2} \times a_1 \times h) + (\frac{1}{2} \times a_2 \times h)$ … (विधान 4 व 5 वरून)

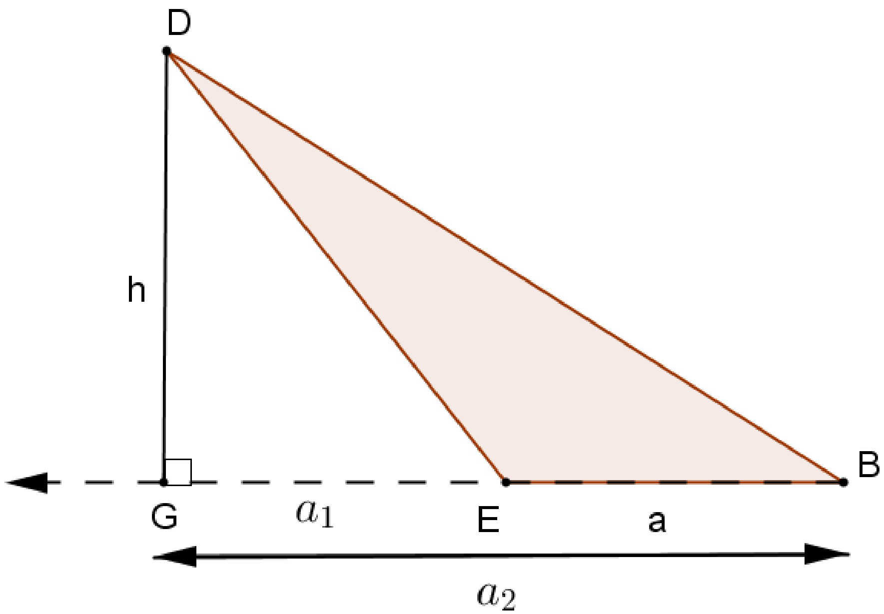
$= \frac{1}{2} \times h \times (a_1 + a_2)$

$= \frac{1}{2} \times h \times (a)$…….$(\because a_1 + a_2 = a)$

$= \frac{1}{2} \times a \times h$

$= \frac{1}{2} \times BC \times AD \quad = \frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ संगत उंची

विशालकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ:



Δ DEB मध्ये $\angle$DEB हा विशाल कोन आहे.

काटकोन त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे तयार केलेले सूत्र वापरून विशालकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी रेख DG $\perp$ बाजू EB व G- E- B

DG= h, GE= a_1, EB= a आणि

GB= a_2, a=(a_2 -a_1)……..(I)

लघुकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी जी रीत वापरली त्यावरून विशालकोन त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र तेच राहते का बदलते ते ठरवा.

उत्तर:

वरील आकृतीत, ΔDGE व ΔDGB हे दोन काटकोन त्रिकोण आहेत.

काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × काटकोन करणाऱ्या बाजूंचा गुणाकार

$\therefore A(\Delta DGE) = \frac{1}{2} \times a_1 \times h$

व $A(\Delta DGB) = \frac{1}{2} \times a_2 \times h$

परंतू $A(\Delta DEB) = A(\Delta DGB) - A(\Delta DGE)$

$\therefore A(\Delta DEB) = \frac{1}{2} \times a_2 \times h - \frac{1}{2} \times a_1 \times h$

$= \frac{1}{2} \times h \times (a_2 - a_1)$

$= \frac{1}{2} \times h \times a$ ..(विधान (I) वरून)

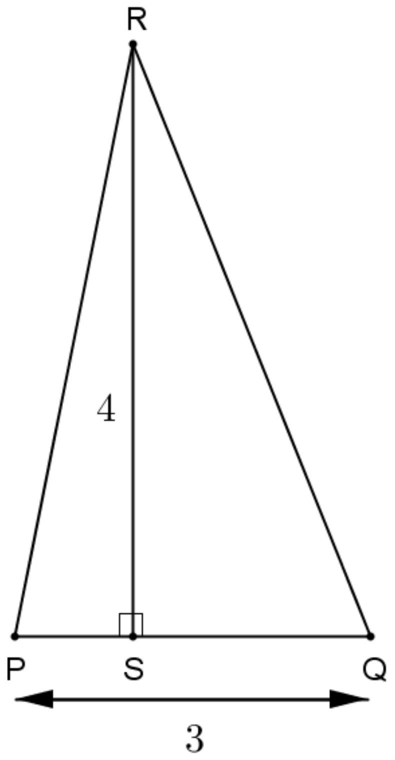
$= \frac{1}{2} \times a \times h = \frac{1}{2} \times EB \times DG = \frac{1}{2}$ × पाया × संगत उंची

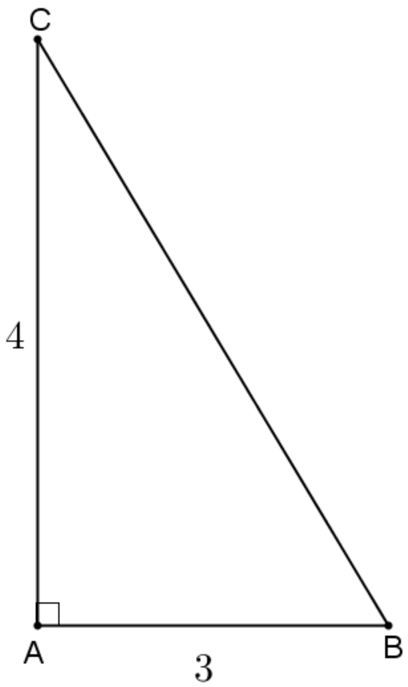
एकरूप त्रिकोण व समक्षेत्र त्रिकोण

शिक्षकांनी मुलांना विचारले की, दोन त्रिकोण एकरूप असल्यास ते एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात यावरून त्यांच्या क्षेत्रफळांबद्दल काय कळते?

उत्तर: एकरूप त्रिकोणांची क्षेत्रफळे म्हणजेच त्यांनी व्यापलेली जागा असल्याने त्यांची क्षेत्रफळे समान असतात.

पण दुसऱ्या मुलाने खालील आकृती दाखवून विचारले की, माझ्या आकृतीमधील दोन त्रिकोण पहा.





त्या दोन्हींचा पाया = 3 सेमी व उंची = 4 सेमी आहे.

सूत्रानुसार त्यांची क्षेत्रफळे = $\frac{1}{2} \times 3 \times 4$

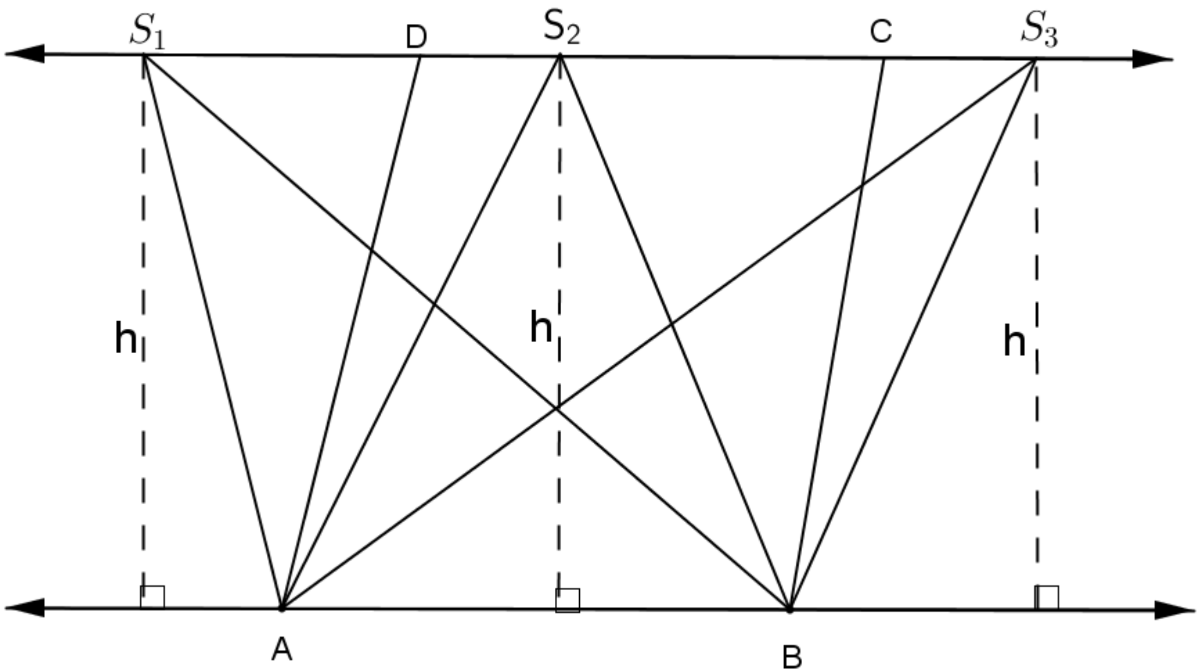
= 6 सेमी ^{2}

म्हणजे समान आहेत पण ते एकरूप तर नाहीत असे का?

यावर सगळ्यांनी चर्चा करून ठरविले व शिक्षकांना सांगितले की, आपण असे

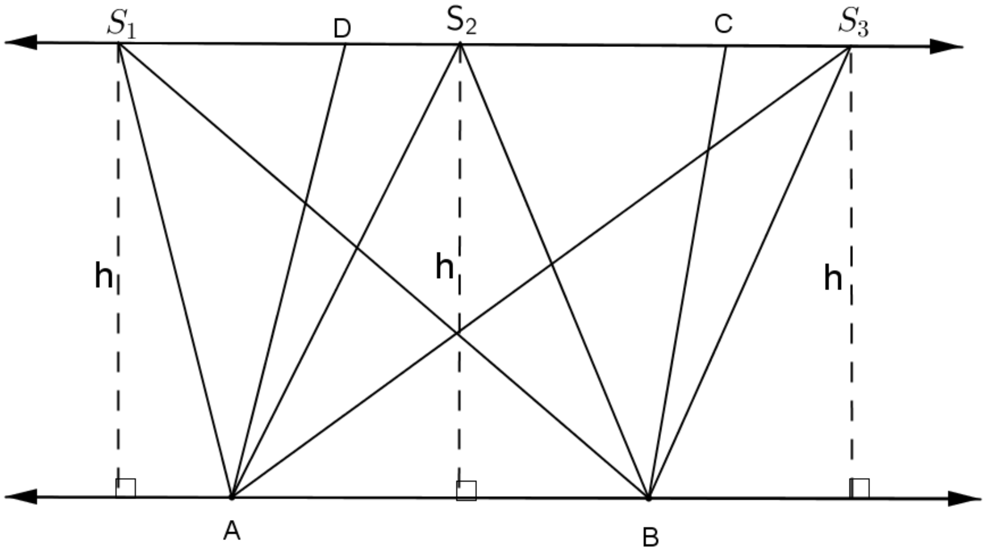
म्हणू या की, एखादा रस्ता one way असतो त्यावरून एकाच दिशेने वाहने जाऊ शकतात पण विरूद्ध दिशेने नाही. तसेच एकरूप त्रिकोण समक्षेत्र असतात पण समक्षेत्र त्रिकोण एकरूप असतातच असे नाही.

समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ व त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ यांतील संबंध



आकृत्यांचे निरीक्षण केल्यास दिसून येते, रेषा AB // रेषा CD व S_1, S_2 व S_3 हे रेषा CD वरील कोणतेही तीन बिंदू आहेत. रेषा AB व रेषा CD मधील लंबांतर हीच समांतरभुज चौकोन ABCD व ΔS_1AB , ΔS_2AB व ΔS_3AB यांची उंची असते, कारण दोन समांतर रेषांमधील लंबांतर सर्वत्र समान असते.

तसेच या सर्वांचा सामाईक पाया = AB आहे.



समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ= पाया × उंची

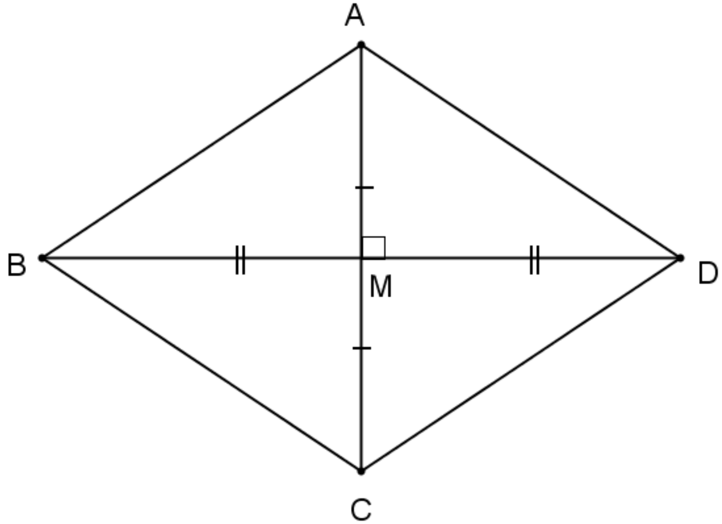
$\therefore A(\square ABCD) = AB \times h$

$A(\Delta S_1 AB) = A(\Delta S_2 AB) = A(\Delta S_3 AB) = \frac{1}{2}(AB \times h)$

$= \frac{1}{2} A(\square ABCD)$

निष्कर्ष: जेव्हा एखादा त्रिकोण व समांतरभुज चौकोन दोन समांतर रेषामध्ये एकाच पायावर किंवा एकरूप पायांवर स्थित असतात. तेव्हा त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ, समांतरभुज चौकोनाच्या क्षेत्रफळाच्या निम्मे असते.

समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ :



□ABCD हा समभुज चौकोन आहे.

समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.

$\therefore AM + MC = AC \ldots \ldots \ldots (I)$

$A(\Delta ABD) = \frac{1}{2} \times BD \times AM$

$A(\Delta BCD) = \frac{1}{2} \times BD \times CM$

$A(\square ABCD) = A(\Delta ABD) + A(\Delta BCD)$

$= \frac{1}{2} \times BD \times AM + \frac{1}{2} \times BD \times CM$

$= \frac{1}{2} \times BD \times (AM + CM)$

$= \frac{1}{2} \times BD \times AC$ ……….विधान (I) वरून

समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × कर्णांच्या लांबीचा गुणाकार

टीप: 1) चौरस हा समभुजही असतो व त्याचे कर्ण एकरूपही असतात.

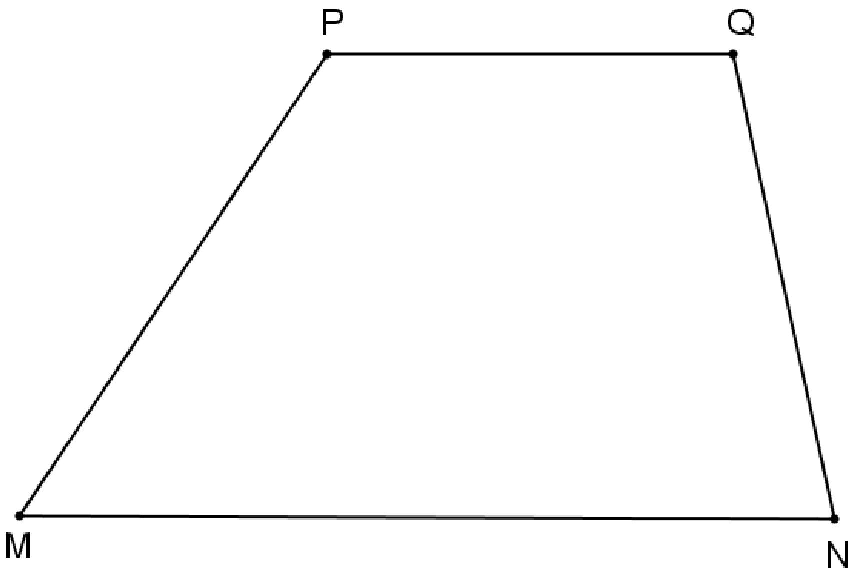
$\therefore$ चौरसाचे क्षेत्रफळ= $\frac{(\text{कर्ण})^2}{2}$

2) कोणत्याही चौकोनाचे कर्ण परस्परांना लंब असतील तर

चौकोनाचे क्षेत्रफळ= $\frac{1}{2}$ × कर्णांच्या लांबीचा गुणाकार

हेच सूत्र वापरून त्याचे क्षेत्रफळ काढता येते.

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ:



आकृती दाखवल्याप्रमाणे □PQNM हा समलंब चौकोन आहे. त्यामध्ये रेख PQ // रेख NM त्याचे क्षेत्रफळ काढण्याचे सूत्र आपण तयार करू शकतो का यावर विचार करा.

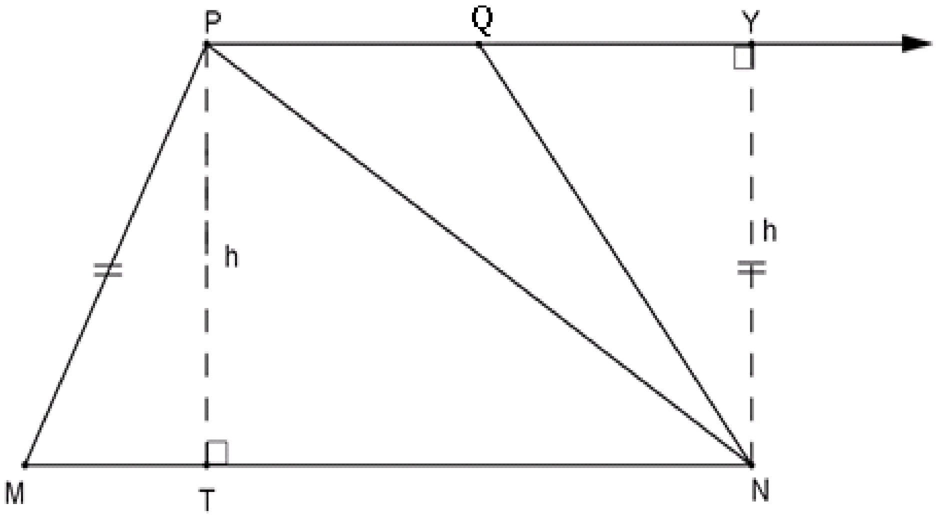
त्यासाठी पुढील दोन प्रमुख मुद्दे विचारात घ्या:-

1) आपण त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ सूत्राने काढू शकतो
2) दोन समांतर रेषांमधील लंबांतर सर्वत्र समान असते.

प्रश्न : आता तुम्हाला आकृतीमध्ये काय रचना करायला सूचते?

उत्तर: त्याचे दोन त्रिकोणात विभाजन केले पाहिजे. शिवाय त्या त्रिकोणांचे अंर्तभाग न छेदणारे असले पाहिजेत. म्हणून रेख PN किंवा रेख QM हा कर्ण काढू. P मधून रेषा NM वर आणि N मधून रेषा PQ वर लंब काढू. कारण त्या परस्परांना समांतर आहेत.

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ:



रेख NY ⊥ रेषा PQ , रेख PT ⊥ रेषा NM ,
NY = PT = h कारण

समांतर रेषांमधील लंबांतर सर्वत्र समान असते.

$A(\Delta PMN) = \frac{1}{2} \times MN \times h$

$A(\Delta PQN) = \frac{1}{2} \times PQ \times h$

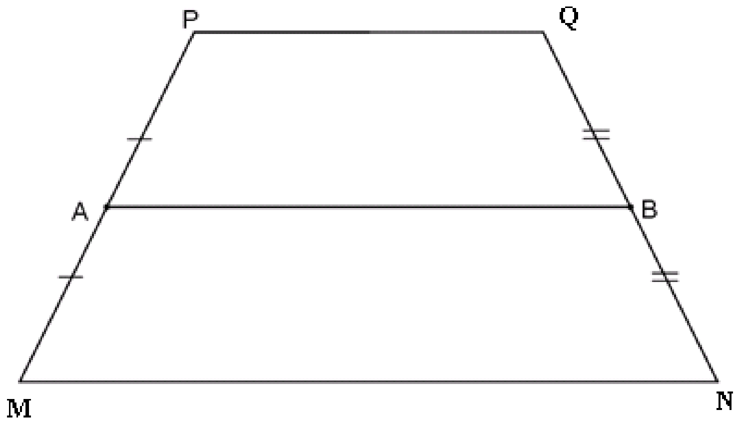
$A(\square PQNM) = A(\Delta PMN) + A(\Delta PQN)$

$= \frac{1}{2} \times MN \times h + \frac{1}{2} \times PQ \times h$

$= \frac{1}{2} \times h \times (MN + PQ)$ ......(I)

∴ समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}$ × समांतर बाजूंच्या लांबीची बेरीज × समांतर बाजूंतील लंबांतर

समलंब चौकोनाची मध्यगा व क्षेत्रफळ यांतील संबंध:



□PQNM या समलंब चौकोनात रेख PQ // रेख MN

A व B हे अनुक्रमे असमांतर बाजू PM व QN यांचे मध्यबिंदू आहेत.

समलंब चौकोनात असमांतर बाजूंचे मध्यबिंदू जोडणारा रेषाखंड म्हणजे त्याची मध्यगा व तिचे गुणधर्म:

i) समांतर बाजूस समांतर असतो

ii) समांतर बाजूंच्या लांबीच्या बेरजेच्या निम्मा असतो.

$AB = \frac{1}{2}(MN + PQ)$ ....(I)

$A(\square PQNM) = \frac{1}{2} \times (MN + PQ) \times h$ .... सूत्रानुसार

$= AB \times h$ ....विधान (I) वरून

∴ **समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = समलंब चौकोनाची मध्यगा** × लंबांतर

अपरिमेय संख्या π बद्दल:

π ही एक अशी संकल्पना आहे की, जिचा अभ्यास गणिताच्या अगदी प्राथमिक अवस्थेपासून सुरू झाला आणि आजही तो सुरू आहे.

जवळजवळ अडीच हजार वर्षे π ही गणिती संस्कृतीचा अविभाज्य भाग बनून राहिला आहे. π ची किंमत अधिकाधिक अपूर्णांकांपर्यंत काढणे, हे एव्हरेस्टवर वेगवेगळ्या मार्गांनी चढाई करण्यासारखेच एक आव्हान म्हणून गणितज्ञांनी मानले आहे.

π ही अपरिमेय संख्या आहे. त्यामुळे कोणताही दशांश अपूर्णांक π एवढा असू शकत नाही. परंतु π च्या अधिकाधिक जवळ जाणारे दशांश अपूर्णांक काढता येतात.

π साठी $\frac{22}{7}$ ही अंदाजे किंमत आपल्यापैकी अनेकांनी शाळेत असताना वापरली असेल.

$\frac{355}{113}$ हा अपूर्णांक π ची किंमत $\frac{22}{7}$ पेक्षा जास्त अचूकतेने दर्शवतो.

हा अपूर्णांक लक्षात ठेवण्यास सोपा आहे.

प्रथम 355113 असे लिहायचे, मग ही संख्या बरोबर मध्ये विभागून अंश व छेद बनवायचे.

वर्तुळ परिघ व क्षेत्रफळ:

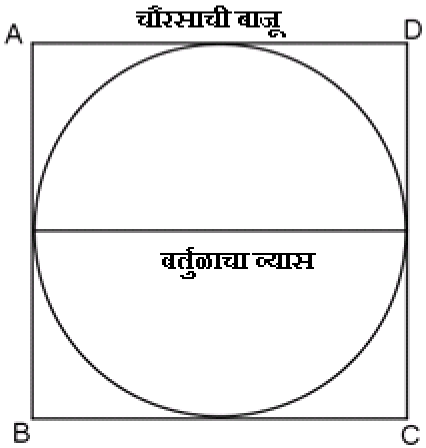
1) वर्तुळाचा परिघ = $2\pi r = \pi D$ (r = त्रिज्या , D = व्यास = 2r)

2) कोणतेही चाक वर्तुळाकृती असते चाकाच्या एका फेरीत त्याच्या परीघाइतके अंतर जाते.

3) चाक गेलेले एकूण अंतर = परिघ × चाकाचे फेरे

4) वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2 (ही सूत्रे आपण सध्या सिद्ध करु शकत नाही.)

चौरसात आंतरलिखित वर्तुळ:



□ABCD या चौरसामध्ये वर्तुळ आंतरलिखित केले आहे.

अशा वर्तुळाला चौरसाचे आंतरवर्तुळ म्हणतात.

चौरसाच्या बाजू त्या वर्तुळाच्या स्पर्शिका असतात.

चौरसात आंतरलिखित केलेल्या वर्तुळाचा व्यास हा चौरसाची बाजू असते.

चौरसाची बाजू = x = वर्तुळाचा व्यास

चौरसाचे क्षेत्रफळ =(बाजू)^2 = x^2

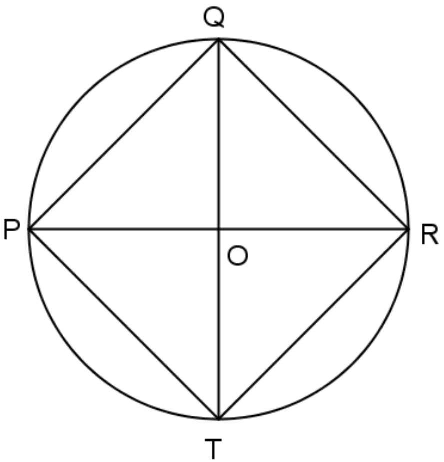
∴ वर्तुळाची त्रिज्या = $\frac{x}{2}$

∴ वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2

$$= \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{4}$$

∴**चौरसात आंतरलिखित वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = $\frac{\pi}{4}$ × ते वर्तुळ आंतरलिखित करणाऱ्या चौरसाचे क्षेत्रफळ**

चौरसाचे परिवर्तुळ:



□PQRT हा चौरस O केंद्र असलेल्या वर्तुळात आंतरलिखित केला आहे. म्हणून हे वर्तुळ चौरसाचे परिवर्तुळ आहे. रेख PR आणि रेख QT हे चौरसाचे कर्ण त्याच्या परिवर्तुळाचे व्यास आहेत.

परिवर्तुळाचा व्यास= चौरसाचा कर्ण

चौरसाची बाजू = x

∴ चौरसाचे क्षेत्रफळ = (बाजू)^2= $(x)^2$

∴ $(x)^2 = \frac{(\text{कर्ण})^2}{2}$

∴ x = $\frac{\text{कर्ण}}{\sqrt{2}}$ ......(दोन्ही बाजूंचे वर्गमूळ घेऊन)

∴ चौरसाचा कर्ण = $x\sqrt{2}$ = परिवर्तुळाचा व्यास

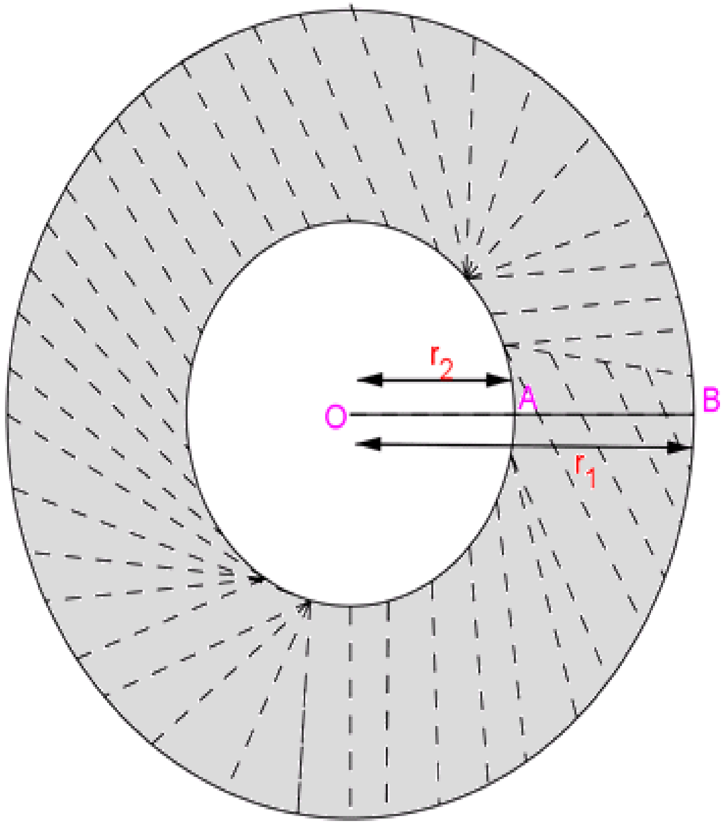
∴ परिवर्तुळाची त्रिज्या = $\frac{x\sqrt{2}}{2}$

∴ वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = $\pi\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2\pi x^2}{4} = \frac{\pi x^2}{2}$

∴ चौरसाच्या परिवर्तुळाचे क्षेत्रफळ= $\frac{1}{2} \times \pi \times$ त्या चौरसाचे क्षेत्रफळ

क्षेत्रफळावरील उदाहरणे:

उदाहरण : 1



सोबतच्या आकृतीत वर्तुळाकृती बाग दिसत आहे.

रेखांकित केलेला भाग हा बागेभोवतीची पायवाट आहे.

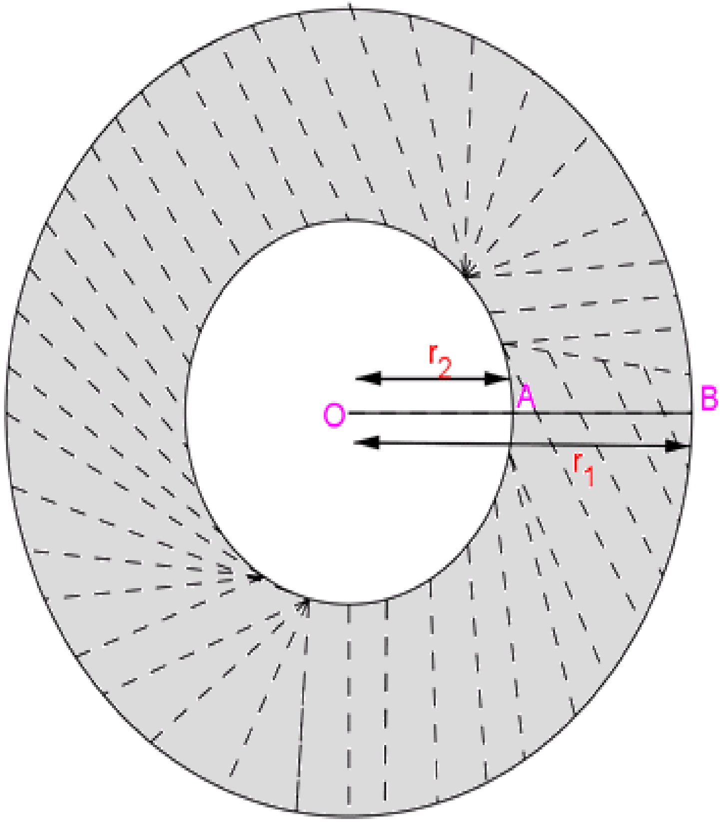
बाहेरील वर्तुळाची त्रिज्या =OB = r_1= 60 मीटर

आतील वर्तुळाची त्रिज्या =OA = r_2 = 40 मीटर

पायवाटेला फरशी घालायची आहे, पायवाटेचे क्षेत्रफळ काढा. तसेच पायवाटेभोवती बाहेरील बाजूने काटेरी एकेरी तारेचे कुंपण घालायचे आहे त्यासाठी किती मीटर तार लागेल ते काढा. (π = 3.14)

उत्तर:

T9_L9_A1



आकृतीत O केंद्र असलेली दोन समकेंद्री वर्तुळे आहेत.

आपल्याला रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढायचे आहे. रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी मोठ्या वर्तुळाच्या क्षेत्रफळातून लहान वर्तुळाचे क्षेत्रफळ वजा करावे लागेल.

वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2

$\therefore$ बाहेरील वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= \pi {r_1}^2$

व आतील वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= \pi {r_2}^2$

T9_L9_A1

∴रेखांकित भागाचे क्षेत्रफळ = बाहेरील वर्तुळाचे क्षेत्रफळ – आतील वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

$= \pi r_1^2 - \pi r_2^2$

$= \pi (r_1^2 - r_2^2)$

$= \pi (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$ ....($\because (a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$)

$= \pi (60 + 40)(60 - 40)$

$= 3.14 (100)(20)$

$= 3.14 \times (2000)$

$= 6280.00$

∴फरशी घालावयाच्या पायवाटेचे क्षेत्रफळ = 6280 चौ. मीटर

T9_L9_A1

वर्तुळाकृती बागेला बाहेरील बाजूने एकेरी काटेरी तारेचे कुंपण घालायचे असल्यास किती तार लागेल ते काढू.

∴ वर्तुळाकृती बागेचा परीघ आपल्याला काढावा लागेल.

परीघाची किंमत = कुंपणाच्या एका फेऱ्यासाठी लागणाऱ्या तारेची लांबी

वर्तुळाकृती बागेचा परीघ = $2\pi r$ = बाहेरील वर्तुळाचा परीघ

$= 2\pi r_1$ ....(∵ बाहेरील वर्तुळाची त्रिज्या = r_1)

$= 2 \times 3.14 \times 60$

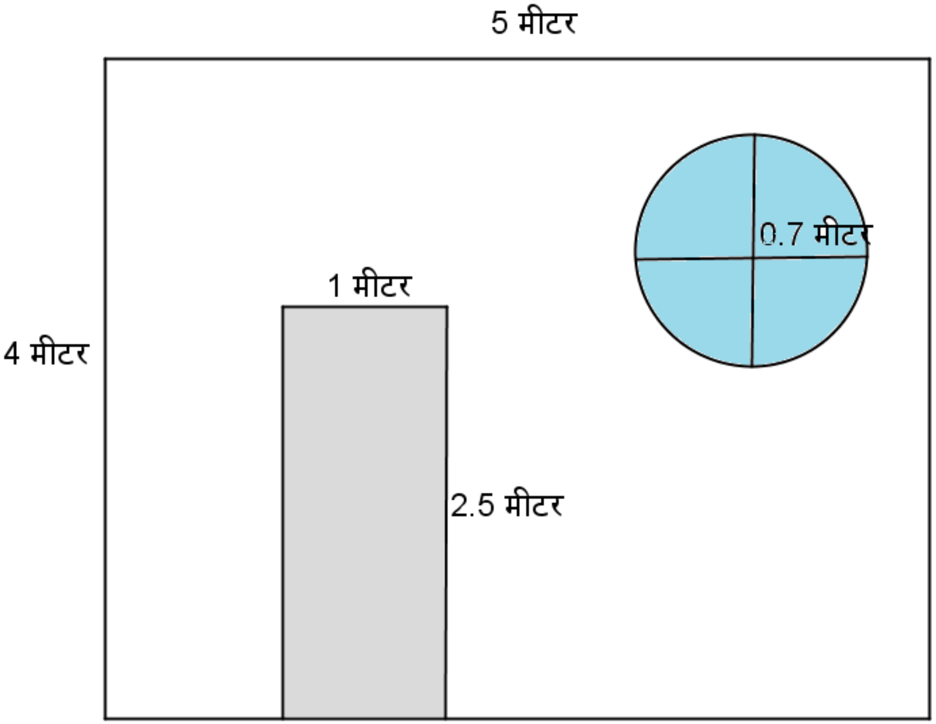
$= 120 \times 3.14$

= 376. 80 मीटर

∴ **वर्तुळाकृती बागेला बाहेरील बाजूने एकेरी काटेरी कुंपण घालण्यासाठी 376.80 मीटर तार लागेल.**

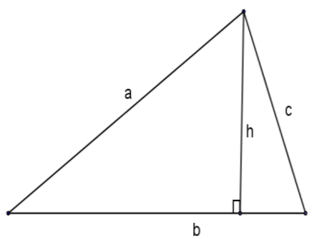
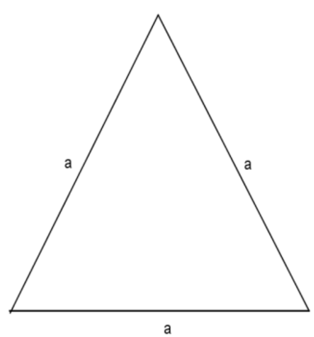
उदाहरण 2:

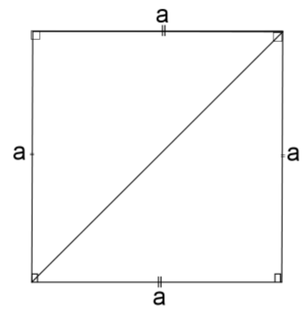
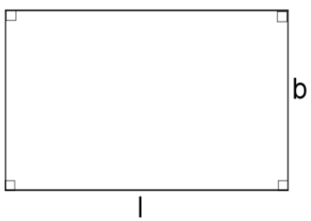
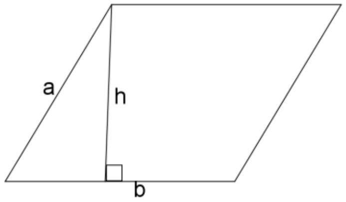
आता सुरूवातीच्या चित्रात दाखवलेली भिंत पुन्हा पहा.

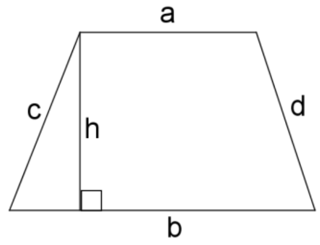
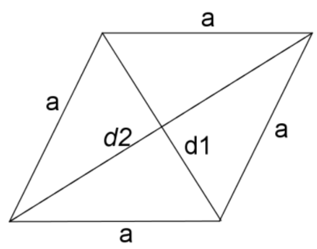


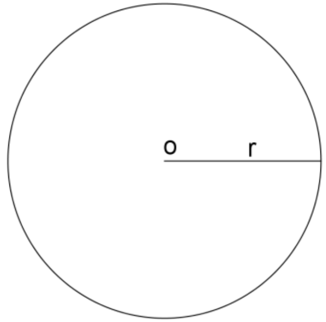
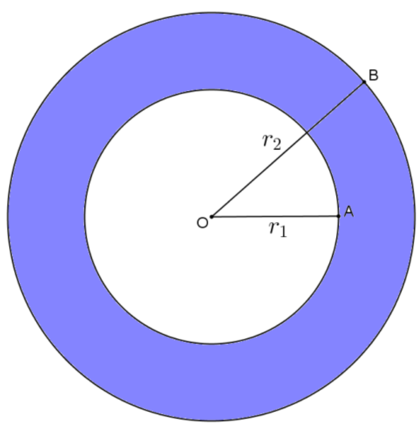
आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एका आयताकृती भिंतींची लांबी 5 मी. व उंची 4 मी. आहे. खिडकी वर्तुळाकृती असून, तिची त्रिज्या 0.7 मी. आहे. आयताकृती दरवाज्याची लांबी व उंची अनुक्रमे 1 मी. व 2.5 मी. आहे. भिंतीला रंग लावायचा असेल तर भिंतीचे क्षेत्रफळ काढा.

काही प्रतलीय आकृत्यांच्या परिमिती व क्षेत्रफळांची सूत्रे पूर्ण करा व तुमच्या वर्गात त्याचा तक्ता तयार करून लावा.

अ.न.	आकृतीचे नाव	आकृती	परिमिती(P)	क्षेत्रफळ(A)
1	त्रिकोण		P=a +b +c	$A = \frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ ..... हिरोचे सूत्र: A= $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ जेव्हा s= .....
2	समभुज त्रिकोण		P = 3 × …	A=$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\dots)^2$

3	**चौरस**		P = 4 × ….	$A=(\dots)^2$ तसेच $A = \frac{\text{कर्ण}^2}{2}$ कारण प्रत्येक चौरस हा समभुज असून त्याचे कर्ण ……असतात.
4	**आयत**		P = 2(… +…)	A= पाया × उंची
5	**समांतरभुज चौकोन**		P = 2(समांतर बाजूंची बेरीज)	A= पाया × ….. समांतर चौकोनाची कोणतीही बाजू = पाया व पायावर त्याच्या संमुख बाजूवरील कोणत्याही बिंदूतून काढलेल्या लंबाची लांबी = त्याची ….

6	समलंब चौकोन		P=a+b+c+d	A= $\frac{1}{2}$ (समांतर बाजूंच्या लांबीची बेरीज)× समांतर बाजूंतील लंबांतर = $\frac{1}{2}$× समलंब चौकोनाची मध्यगा × समांतर बाजूंतील लंबांतर कारण समलंब चौकोनाच्या मध्यगेची लांबी = ...
7	समभुज चौकोन		P= 4 ×	A = $\frac{1}{2}$ × कर्णाच्या लांबीचा गुणाकार

8	**वर्तुळ**		C=वर्तुळाचा परिघ C=2 πr किंवा C= .... × व्यास d=2r	A = πr^2
9	**दोन समकेंद्री वर्तुळां मधील जागेचे क्षेत्रफळ**			**दोन समकेंद्री वर्तुळां मधील जागेचे क्षेत्रफळ** = π ((. .)^2 - (. .)^2) = π (r_2 + r_1) (… _ …)

Exercise:

1 गुणांचे प्रश्न:

1) सायकलच्या चाकाचा परीघ 286 सेमी आहे तर चाकाच्या 100 फेऱ्यात ती किती अंतर जाईल?

2) दोन चौरसाच्या बाजू 6 सेमी व 8 सेमी असतील तर त्यांच्या क्षेत्रफळांमधील फरक काढा. (दोन्ही चौरसाची क्षेत्रफळे न काढता कोणत्या अवयव सूत्राचा उपयोग करता येईल यावर विचार करा.)

3) ΔABC व ΔPQR यांची क्षेत्रफळे समान आहेत यावरून ते त्रिकोण परस्परांशी एकरूप आहेत हे विधान नेहमीच सत्य असते काय?

4) □ABCD हा समांतरभुज असून A(□ABCD) = 40 चौ.सेमी तर A(ΔADC) किती?

2 गुणांचे प्रश्न:

1) □ABCD हा समलंब चौकोन असून रेख AB ∥ रेख CD. AB = 8 सेमी , CD = 12 सेमी व A(□ABCD) = 65 चौ. सेमी तर □ABCD ची उंची किती?

2) वर्तुळाचा परीघ 62.8 सेमी आहे तर वर्तुळाचा व्यास किती? (π = 3.14)

3) समभुज त्रिकोणाची बाजू 6 सेमी आहे त्याचे क्षेत्रफळ $x\sqrt{3}$ चौ. सेमी असल्यास x ची किंमत काढा.

3 गुणांचे प्रश्न:

1) ΔDAM मध्ये DA=17 सेमी, AM = 12 सेमी, DM = 25 सेमी, तर ΔDAM चे क्षेत्रफळ काढा. (हिरोचे सूत्र वापरा)

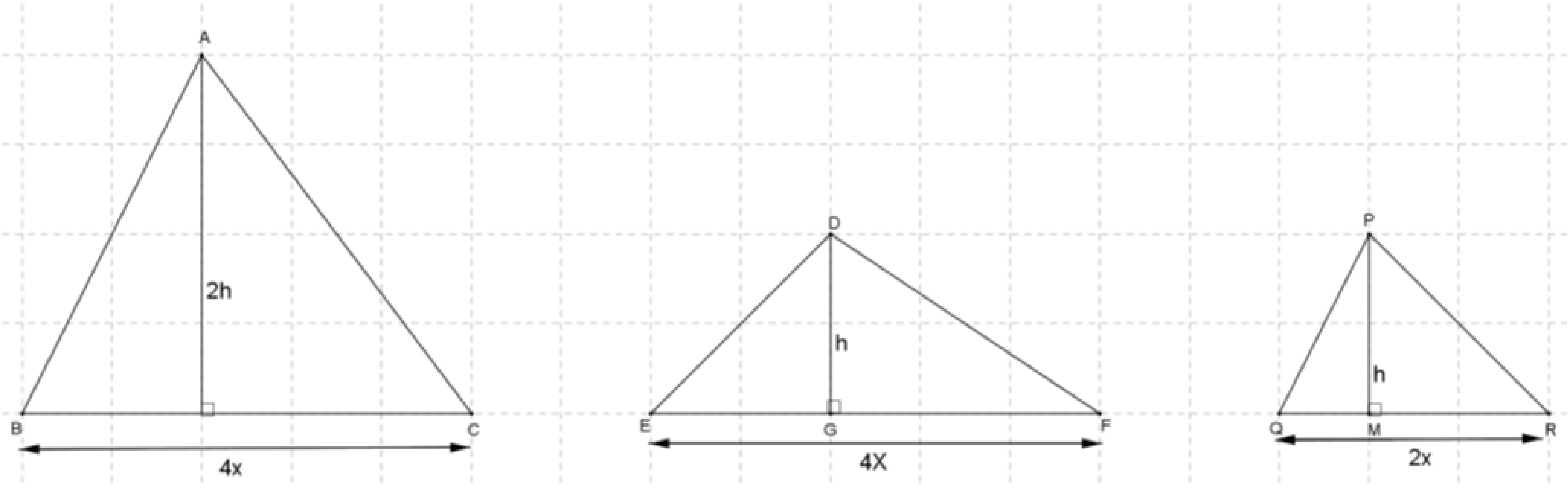
2) एका आयताकृती खोलीची लांबी 15 सेमी व रूंदी 8 सेमी आहे. खोलीच्या तळामध्ये फरशी घालावयाची आहे. प्रत्येक फरशीचे क्षेत्रफळ 400 चौ. सेमी असेल तर किती फरशा लागतील?

4 गुणांचे प्रश्न:

1) दोन वर्तुळांच्या त्रिज्यांचे गुणोत्तर $r_1 : r_2$ =1 : 2 आहे. मोठ्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ 616 चौ.सेमी असेल तर लहान वर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढा व त्यांच्या त्रिज्या काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$)

2) खालील आकृतीत ΔABC, ΔDEF व ΔPQR यांचा पाया व संगत उंची दाखवली आहे. त्यावरून तिन्ही त्रिकोणांची क्षेत्रफळे काढा व त्यावरून पुढील गुणोत्तरे लिहा.

i) $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DEF)}$ ii) $\frac{A(\Delta DEF)}{A(\Delta PQR)}$ iii) $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)}$



3) यावरून पुढील विधान रिकाम्या जागा भरून पूर्ण करा.

जर दोन त्रिकोणांच्या पायांचे गुणोत्तर 1:2 असून उंचीचे गुणोत्तरही

1:2 असेल तर त्यांच्या क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर = ...

Assessment:

1) एका समभुज त्रिकोणाची बाजू 5 सेमी असल्यास त्याची परिमिती = ...सेमी.

a) 25

b) 15

c) 12.5

d) 7.5

2) चौरसाच्या कर्णाची लांबी 4 सेमी असल्यास त्या चौरसाचे क्षेत्रफळ = ...$सेमी^2$

a) 8

b) 16

c) 20

d) 32

3) एका आयताची लांबी 20 सेमी व रूंदी 15 सेमी असल्यास त्या आयताची परिमिती =.....सेमी

a) 300

b) 35

c) 70

d) 37

T9_L12

4) समांतरभुज चौकोनाचा पाया 15 सेमी व उंची 5 सेमी असल्यास समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = ...सेमी^{2}

a) 20

b) 75

c) 40

d) 65

5) एका समलंब चौकोनात समांतर बाजू अनुक्रमे 10 सेमी व 20 सेमी असून, त्यांच्यातील अंतर 15 सेमी आहे. तर त्या समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = ...सेमी^{2} असेल.

a) 225

b) 450

c) 300

d)125

6) समभुज चौकोनाची बाजू 6 सेमी असल्यास त्याची परिमिती = ...सेमी.

a) 12

b) 24

c) 36

d) 18

7) एका समभुज चौकोनाच्या कर्णांची लांबी 6 सेमी व 8 सेमी आहे.

तर त्या समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = ...सेमी^{2}

a) 24

b) 48

c) 100

d) 96

8) एका चौरसाची बाजू 10 सेमी आहे. त्यात वर्तुळ आंतरलिखित केल्यास त्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ=.....सेमी^{2} (π = 3.14)

T9_L12

a) 314.0

b) 78.5

c) 31.4

d) 157

9) एका त्रिकोणाच्या बाजू 5 सेमी, 12 सेमी, 13 सेमी आहेत. ∴ त्याचे क्षेत्रफळ = ...सेमी^{2}

a) 30

b) 60

c) 78

d) $\frac{65}{2}$

10) चौरसाच्या कर्णाची लांबी $8\sqrt{2}$ सेमी आहे. तर त्या चौरसाची बाजू = ...सेमी

a) 16 b) 8 c) 32 d) 64